DOCTORADO EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Evaluado y acreditado por la Comisión Nacional de Evaluación y Acreditación Universitaria (CONEAU). Resolución Nº 1178/11. Calificación "B".

Operadores minimales y espacios homogéneos bajo la acción del grupo unitario

Trabajo de tesis para optar por el título de Doctor en Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional de General Sarmiento

Autora: Tamara Paula Bottazzi

Director: Alejandro Varela.

Lugar de trabajo: Instituto Argentino de Matemática "Alberto P. Calderón" (IAM-CONICET).

Buenos Aires, 18 de marzo de 2015.

FORMULARIO "E" TESIS DE POSGRADO

Niveles de acceso al documento autorizados por el autor:

Liberar el contenido de la tesis para acceso público.

- a. Título completo del trabajo de Tesis: Operadores minimales y espacios homogéneos bajo la acción del grupo unitario.
- b. Presentado por: Bottazzi, Tamara Paula.
- c. E-mail del autor: tpbottaz@ungs.edu.ar
- d. Estudiante del Posgrado: Doctorado en ciencia y tecnología.
- e. Institución que dictó el Posgrado: Universidad Nacional de General Sarmiento, Instituto de Ciencias.
- f. Para recibir el título de: Doctora en Ciencia y Tecnología.
- g. Fecha de la defensa: 18/03/2015
- h. Director de la Tesis: Varela, Alejandro.
- i. Tutor de la Tesis:–
- j. Colaboradores con el trabajo de Tesis: Varela, Alejandro.
- k. Descripción física del trabajo de Tesis: 132 páginas, 1 gráfico (incluido en el total de páginas).
- l. Alcance geográfico de la Tesis: internacional (publicado parcialmente en revistas internacionales con referato).
- m. Temas tratados en la Tesis: Mejor aproximación en espacios cociente, caracterización de elementos minimales, curvas de longitud mínima en espacios homogéneos, aproximaciones de operadores con matrices.

- n. Resumen en español:

  Título: Operadores minimales y espacios homogéneos bajo la acción del grupo unitario

  Estudiamos la existencia y propiedades de caracterización de operadores compactos Hermitianos C sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que

  $$\|C\| \leq \|C+D\|\,, \text{ para todo } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$$

  o equivalentemente

  $$\|C\| = \min_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C+D\| = \operatorname{dist}\left(C, \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)\right)$$

  donde $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ denota el espacio de operadores compactos Hermitianos diagonales respecto de una base fija de $\mathcal{H}$ y $\|.\|$ es la norma usual de operadores. Exhibimos ejemplos de operadores tipo Hilbert-Schmidt que no alcanzan el mínimo con ningún operador diagonal compacto.

  Utilizaremos los operadores mencionados para estudiar algunos ejemplos de curvas de longitud mínima en espacios homogéneos bajo la acción a izquierda de un grupo unitario. Dichas curvas resolverán un cierto problema de valores iniciales. También mostraremos que las curvas minimales obtenidas pueden aproximarse uniformemente por curvas de tipo matriciales también minimales.

  Palabras clave: Espacio cociente, elementos minimales, curvas de longitud mínima, espacios homogéneos.

- o. Resumen en portugués:

  Título: Operadores mínimos e espaços homogêneo sob a ação do grupo unitário

Estudamos a existência e as propriedades caracterização dos operadores Hermitianas compactos C no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que

$$\|C\| \leq \|C+D\|\,,\text{ para todo } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$$

ou equivalentemente

$$\|C\| = \min_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C+D\| = \operatorname{dist}\left(C, \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)\right)$$

onde $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ denota o espaço de operadores Hermitianas compactos diagonal em relação a uma base fixa $\mathcal{H}$ e $\|.\|$ é a norma habitual dos operadores. Nós exibimos exemplos de operadores de tipo Hilbert-Schmidt que não atendem o mínimo para qualquer operador diagonal compacto.

Usamos os operadores acima para estudar alguns exemplos de curvas de comprimento mínimo em espaços homogêneos deixados sob a ação de um grupo unitário. Estas curvas resolver algum problema de valor inicial. Também mostram que as curvas de mínimos uniformemente ser aproximadas obtidos pelas curvas de tipo matriz também mínima.

Palavras-chave: espaço quociente, elementos minimales, curvas mínimas de comprimento mínimo, espaços homogéneos.

- p. Resumen en inglés:

  Title: Minimal operators and homogeneous spaces under the action of the unitary group

  We study the existence and characterization properties of compact Hermitian operators C on a Hilbert space $\mathcal{H}$ such that

$$\|C\| \leq \|C+D\|\,,\text{ for all } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$$

or equivalently

$$\|C\| = \min_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = \operatorname{dist}\left(C, \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)\right)$$

where $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ denotes the space of compact Hermitian diagonal operators in a fixed basis of $\mathcal{H}$ and $\|.\|$ is the operator norm. We also exhibit Hilbert-Schmidt class operators that fails to attain the minimum in a compact diagonal.

We use the mentioned operators to study some examples of minimal lenght curves in homogeneous spaces under a left action of a unitary group. These curves solve a certain problem with initial values. We also show that the minimal curves obtained can be approximated uniformly by minimal curves of matrices.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 47A58, 47B10, 47B15. Secondary: 47A55, 47C15, 47B07.

Keywords: Quotient spaces, minimal elements, minimal lenght curves, homogeneous spaces.

- q. Aprobado por:

  Andruchow, Esteban;

  Maestripieri, Alejandra;

  Stojanoff, Demetrio.

- Firma y aclaración de la firma del Presidente del Jurado:

- Firma del autor de la tesis:

Agradecimientos

Quisiera mencionar que no ha sido fácil la culminación de esta carrera de doctorado, dado que se trata de un trayecto muy distinto al de grado, lleno de dudas y misterios. Esto último hace que sea profundamente interesante. Se trata de un camino el cual de haberlo transitado en soledad, jamás podría haber llegado a buen destino. Por ello es que me es imperioso comenzar por el agradecimiento a aquellas personas que supieron acompañarme durante estos años.

En primer lugar, quisiera agradecer a las personas que más me han apoyado en TODO lo que hago: Julián y León. Ellos siempre me sostienen y me aguantan en todo. Los amo.

A mi mamá, que siempre está cuando la necesito y siempre me apoya. Y a Willy, que a su modo tan particular siempre me alentó.

A mis suegros, Ignacia y Perfecto, por aceptarme como soy y por su inmensa ayuda en la organización de nuestras vidas.

A Alejandro por aceptar dirigirme y por ser como es, distinto a mí. Por su paciencia, su bondad y su generosidad matemática.

A Cristian, quien ha sido un soporte emocional y matemático en el IAM y en la UNGS. Un gran amigo que esta carrera me supo dar.

A mi amiga y compañera Andre Paul, quien además de ser una gran filósofa, es una persona honesta y sensible quien siempre me alentó y creyó en mí.

A mis amigos de la UNGS: Marcela Reale, Virginia Carnelli y Pablo Rodríguez. Grandes personas que me han acompañado y que aprecio mucho.

A mis amigos y compañeros de la pileta, del pedal y del atletismo. Ellos, muchas veces sin saberlo, me han contenido y me han alentado innumerable cantidad de veces dentro y fuera de mi vida deportiva.

A Fabio Cukiernik y a Helena Ceretti, excelentes personas (además de grandes profesionales) con los que me he trabajado. Fueron los primeros de la UNGS que me dieron la oportunidad de empezar a trabajar en investigación.

A los compañeros de oficina del IAM del pasado y presente: otros locos becarios como yo que intentan hacerse un lugar en la vida matemática.

A la gente del IAM en general: secretarias e investigadores. En especial a Gustavo Corach y a Alejandra Maestripieri por permitirme trabajar en este prestigioso instituto.

Al CONICET por el apoyo económico durante estos 5 años y por apostar a que personas con formación no tradicional puedan realizar estudios de posgrado.

Dedicatorias

A Julián y a León, mis amores.

A mi vieja, que siempre está.

A la memoria de mi tío Néstor,

artífice y motivador de mis pasos por la ciencia.

A la memoria de mis abuelos y de Luciana,

quienes nunca debieron irse.

Índice general

Introducción

En este trabajo de tesis estudiamos dos tipos de problemas de distinta índole pero que se encuentran estrechamente relacionados entre sí. Por un lado, dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el conjunto de los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$, estudiamos la existencia y describimos operadores compactos Hermitianos $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que

$$\|C\| \leq \|C + D\|\,, \text{ para todo } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h),$$

o equivalentemente

$$\|C\| = \operatorname{dist}(C, \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)),$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual de operadores, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es la C^*-álgebra de los operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, y $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ es la subálgebra de los operadores compactos Hermitianos diagonales (respecto de una base ortonormal fija). A estos operadores C se los denomina minimales.

La búsqueda y caracterización de operadores compactos minimales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ resulta equivalente a considerar el problema de mejor aproximación de un operador compacto fijo al conjunto cerrado de los operadores diagonales compactos respecto de una base ortonormal fija.

Por otra parte, el segundo problema que en el que nos hemos enfocado es de tipo geométrico: el estudio de curvas de longitud mínima de la órbita de un operador compacto Hermitiano A dada por la acción de un grupo unitario particular, que es

$$\mathcal{O}_A = \{uAu^* : u \text{ unitario en } \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ y } u - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}.$$

El espacio tangente a cualquier $b \in \mathcal{O}_A$ está dado por

$$(T\mathcal{O}_A)_b = \{zb - bz : z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}\}.$$

Donde el superíndice ah se refiere a los operadores anti-Hermitianos (análogamente, el superíndice h se refiere a los operadores Hermitianos). Si $x \in T_b(\mathcal{O}_A)$, la existencia de un elemento minimal (no necesariamente único) $z_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ tal que

$$\|x\|_b = \|z_0\| = \text{ínf}\left\{\|z\| : \ z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah},\ zb - bz = x\right\}$$

permite la descripción de curvas de longitud mínima en la variedad dadas por la parametrización

$$\gamma(t) = e^{tz_0}\, b\, e^{-tz_0},\ t \in \left[-\frac{\pi}{2\,\|z_0\|}, \frac{\pi}{2\,\|z_0\|}\right].$$

Tales z_0 pueden describirse como $i(C + D)$, con $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y D un operador diagonal real en la base ortonormal de autovectores de A.

0.1. Antecedentes en operadores minimales Hermitianos

En la primera sección observamos que el problema de minimalidad planteado puede verse también como un problema de mejor aproximación en espacios de Banach. En este sentido, algunos trabajos previos relacionados con los espacios $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ aparecen en mucha de la literatura matemática de las últimas décadas. Por ejemplo, dados dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, en [17] Holmes y Kripke prueban que el espacio de operadores compactos $\mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ es proximinal al conjunto de los operadores lineales y acotados $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{L})$. Es decir, dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{L})$ existe siempre $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{L})$ tal que

$$\|T - C\| = \text{dist}(T, \mathcal{K}(\mathcal{H},\mathcal{L})).$$

Por otro lado, Davidson y Power en [14] muestran que, dada una cadena $\mathcal{N} = \{V_i\}_{i\in I}$ completa de subespacios de $\mathcal{H}$, el conjunto de todos los operadores compactos $\mathcal{N}-$invariantes resulta proximinal en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\mathcal{N}$ es un conjunto contable.

Si $M_n^h(\mathbb{C})$ es el álgebra de las matrices Hermitianas de $n \times n$ y $\mathcal{D}(M_n^h(\mathbb{C}))$ es la subálgebra de las matrices diagonales reales respecto de una base ortonormal fija $\{e_i\}_{i=1}^n$, no resulta difícil probar que para cada $M_0 \in M_n^h(\mathbb{C})$ existe siempre $D_0 \in \mathcal{D}(M_n^h(\mathbb{C}))$ tal que

$$\|M_0 + D_0\| \leq \|M_0 + D\|, \text{ para toda } D \in \mathcal{D}(M_n^h(\mathbb{C})).$$

En este contexto finito dimensional es que podemos encontrar los trabajos [2], [6] y [7], entre otros. En los mismos Varela y otros realizan distintas caracterizaciones de las matrices minimales Hermitianas, entre las cuales mencionamos dos de las más relevantes:

Teorema 0.1. *Una matriz $M \in M_n^h(\mathbb{C})$ es minimal si y sólo si existe una matriz $P \geq 0$ tal que*

- *$PM^2 = \lambda^2 P$, donde $\lambda = \|M\|$.*
- *$(PM)_{ii} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Teorema 0.2. *Sea $M \in M_n^h(\mathbb{C})$, $M \neq 0$. Consideremos E_+ y E_-, las proyecciones espectrales de los autovalores $\lambda_{max}(M)$ y $\lambda_{min}(M)$, respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es minimal.*

2. *Existe* $X \in M_n^h(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, *tal que*

    - $\langle Xe_i, e_i \rangle = 0\ ,\ \forall i \in \{1; ...; n\}$;
    - $|tr(XM)| = \|M\|\ \|X\|_1\ ;$
    - $E_+X^+ = X^+\ ,\ E_-X^- = X^-$.

3. $\lambda_{min}(M) + \lambda_{max}(M) = 0$ *y para cada* $D \in \mathcal{D}(M_n^h(\mathbb{C}))$ *existen* $y \in R(E_+)$, $z \in R(E_-)$ *(rangos de* E_+ *y de* E_-*, respectivamente) tales que:*

    - $\|y\| = \|z\| = 1$;
    - $\langle Dy, y \rangle \leq \langle Dz, z \rangle$.

El Teorema 0.1 se deduce a partir del estudio hecho en [15] pero en el contexto más general de la minimalidad en C^*-álgebras unitales. Es un caso particular del siguiente resultado de [15].

Teorema 0.3. *Sea* $\mathcal{A}$ *una* C^**-álgebra unital y* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *una* C^**-subálgebra tal que* $1 \in \mathcal{B}$. *Un elemento* $Z \in \mathcal{A}^h$ *es minimal si y sólo si existen una representación* π *de* $\mathcal{A}$ *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *y un vector unitario* $h \in \mathcal{H}$ *tal que*

- $\pi(Z^2)h = -\|Z\|^2 h$;
- $\langle \pi(Z)h, \pi(B)h \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ *para todo* $B \in \mathcal{B}$.

Si consideramos un álgebra de von Neumann $\mathcal{A}$ y una subálgebra de von Neumann $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, Recht y otros muestran en [15] que para cada $a \in \mathcal{A}$ existe un elemento minimal b_0 en $\mathcal{B}$. Esto significa que $\|a + b_0\| \leq \|a + b\|$, para todo $b \in \mathcal{B}$.

No obstante, en el caso de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, que es sólo un álgebra de Banach real, la existencia de un mejor aproximante no está garantizada en el caso general. En el caso particular en que $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ tenga rango finito siempre existe un elemento diagonal compacto minimal, ya que Andruchow y Larotonda lo han demostrado en [1]. Sin embargo, la minimalidad asegurada en los operadores de rango finito no permite generalizar a priori al caso de cualquier $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$.

0.2. Antecedentes en geometría de operadores

El estudio de variedades de dimensión infinita relacionadas con álgebras de operadores cuenta con numerosos antecedentes que datan desde mitad del siglo XX. A continuación mencionamos sólo algunos artículos, a nuestro entender, aquellos que se relacionan más estrechamente con nuestro trabajo realizado.

Los primeros precedentes de variedades que son órbitas de grupos de Lie-Banach son los trabajos de Corach, Porta y Recht como [22], [12] y [13]. En ellos estudian la geometría diferencial de elementos idempotentes en álgebras de Banach y C^*-álgebras.

Otros autores han estudiado la estructura de espacios homogéneos reductivos en órbitas de distintos tipos de operadores: Andruchow, Argerami, Maestripieri, Stojanoff y Varela. Por ejemplo, en [11] han trabajado con operadores positivos, en tanto que en [5] y [8] lo han hecho con esperanzas condicionales. También podemos citar los trabajos [3] y [4] sobre órbitas de estados.

Durán, Mata-Lorenzo y Recht estudian en [15] y [16] el problema de hallar curvas de longitud mínima en espacios homogéneos en la categoría de C^*-álgebras. Estos trabajos marcan el puntapié inicial para el estudio de problemas de geometría de espacios homogéneos de grupos unitarios pero utilizando técnicas métricas y no dependiendo de ecuaciones diferenciales o tensores.

El contexto de estos dos últimos trabajos mencionados es el siguiente: sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y $\mathcal{B}$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$. El cociente de los grupos unitarios $\mathcal{O} = \mathcal{U}_\mathcal{A}/\mathcal{U}_\mathcal{B}$ resulta ser un espacio homogéneo bajo ciertas condiciones. El álgebra de Lie de $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{U}_\mathcal{B}$) son los operadores anti-Hermitianos $\mathcal{A}^{ah}$ (resp. $\mathcal{B}^{ah}$). Se puede identificar al espacio tangente en $\rho \in \mathcal{O}$ con el cociente entre las álgebras de Lie de cada grupo unitario, es decir

$$(T\mathcal{O})_\rho \cong \mathcal{A}^{ah}/\mathcal{B}^{ah}.$$

Luego, una métrica de Finsler natural se puede definir para cada $x \in (T\mathcal{O})_\rho$ como

$$\|x\|_\rho = \text{ínf}\{\|z - y\| : y \in \mathcal{B}^{ah}\},$$

con $z \in \mathcal{A}^{ah}$ un representante cualquiera de la clase de x.

Los espacios homogéneos $\mathcal{O}$ del grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ módulo el grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ se denominan banderas generalizadas y están dotados con la métrica cociente definida en cada espacio tangente. En este contexto, existen dos tipos de problemas de curvas de longitud mínima o minimales:

- Problema de valores iniciales: dados $\rho \in \mathcal{O}$ y $x \in (T\mathcal{O})_\rho$, hallar una curva $\chi \subset \mathcal{O}$ minimal suave (es decir, que sea C^1 y con derivada no nula) tal que

$$\begin{cases} \chi(0) = b \\ \chi'(0) = x \in (T\mathcal{O})_\rho, \end{cases} \tag{0.2.1}$$

  Este problema se estudia en [15] y el resultado principal es el siguiente teorema.

  Teorema 0.4. *Sea $\mathcal{P}$ una bandera generalizada entre dos C^*-álgebras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Sean $\rho \in \mathcal{P}$ y $x \in (T\mathcal{P})_\rho$. Supongamos que existe $Z \in \mathcal{A}^{ah}$ tal que es una levantada minimal de x, es decir $\|Z\| = \|x\|_\rho$. Entonces la curva parametrizada por $\gamma(t) = e^{tZ}\rho e^{-tZ}$ tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves en $\mathcal{P}$ que unen $\gamma(0)$ con $\gamma(t)$ para cada $t \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z\|}, \frac{\pi}{2\|Z\|}\right]$.*

- Problema de extremos fijos: dados dos puntos en $\mathcal{O}$, hallar una curva minimal en $\mathcal{O}$ que una dichos puntos. Este problema se estudia en [16], teniendo como uno de sus dos resultados principales lo siguiente.

  Teorema 0.5 (Hopf-Rinow local). *Sea $\mathcal{P} = \mathcal{U}_\mathcal{A}/\mathcal{U}_\mathcal{B}$ una bandera de isotropía compacta generalizada, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de von Neumann. Sean $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}$.*

Si existe un entorno abierto V_1 de ρ_0 tal que $\rho_1 \in V_1$, entonces existe una curva minimal uniparamétrica de grupo que une a ρ_0 con ρ_1.

Más enfocado hacia nuestro objetivo geométrico puntual, que es la obtención de curvas de longitud mínima en la órbita unitaria de un operador compacto Hermitiano, se encuentra el trabajo [1]. En éste, Andruchow y Larotonda estudian propiedades de convexidad del grupo de los operadores unitarios de Fredholm, que son

$$\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) = \{u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \ u - 1 \text{ es compacto}\}.$$

Luego utilizan estas propiedades para establecer condiciones para la existencia de curvas minimales que satisfacen cierto problema de valores iniciales en la órbita de un operador Hermitiano A, dada por

$$\mathcal{O}_A = \{uAu^* : \ u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})\}.$$

Dado $b \in \mathcal{O}_A$, si dotamos al espacio tangente $(T\mathcal{O}_A)_b$ de la norma Finsler $\|\cdot\|_b$ correspondiente, es decir

$$\|x\|_b = \text{ínf}\{\|Y\| : Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} \text{ tal que } \delta_b(Y) = x\},$$

uno de los principales resultados del artículo mencionado es el siguiente:

Teorema 0.6. *Sean $A = A^*$ de rango finito, $b \in \mathcal{O}_A$ y x un vector tangente tal que $\|x\|_b < \frac{\pi}{2}$. Si Z_c es una levantada minimal (compacta) de x, entonces la curva $\xi(t) = e^{tZ_c} b e^{-tZ_c}$ tiene longitud mínima para todo $|t| \leq 1$.*

También realizan una caracterización de los operadores Hermitianos tales que su órbita es una subvariedad diferenciable complementada de un espacio de Banach.

0.3. Principales resultados obtenidos

Los aportes originales que presentamos en esta tesis están contenidos principalmente en los trabajos [9] y [10]. En el primero nos enfocamos principalmente en el problema de mejor aproximante diagonal compacto y minimalidad, en tanto que en el segundo abordamos la cuestión sobre la existencia de curvas minimales en órbitas unitarias de operadores Hermitianos específicos.

Los resultados que presentamos en este trabajo de tesis se dividen en distintos capítulos. En el segundo presentamos ejemplos de operadores minimales compactos a modo de acercamiento al problema de minimalidad. En el tercer capítulo describimos y analizamos dos operadores compactos simétricos que no tienen mejor aproximante diagonal compacto real. En el cuarto capítulo mostramos una caracterización de minimalidad basada en una ya existente para matrices (ver en [2]) y realizamos algunas generalizaciones del concepto de minimalidad para $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y álgebras de von Neumann que son imagen de una esperanza condicional. Finalmente, en el último capítulo estudiamos las geometría de la órbita de un operador compacto Hermitiano bajo la acción de unitarios Fredholm. Allí analizamos la existencia de curvas de longitud mínima en dichos espacios a partir de la minimalidad y no minimalidad de distintos operadores compactos estudiados en los capítulos anteriores.

A continuación brindamos una breve sinopsis de los principales resultados que desarrollamos.

0.3.1. Mejor aproximación de diagonales compactos Hermitianos

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de operadores acotados y $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ el ideal de los operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si notamos con el superíndice h al subconjunto de operadores Hermitianos, estudiamos la existencia y las propiedades de operadores $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ tales que

$$\|C\| \leq \|C + D\|, \ \forall\, D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h),$$

siendo $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ la subálgebra de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ de los operadores diagonales reales respecto de una base ortonormal fija $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$. A este operador C se lo denomina minimal y $\mathrm{Diag}(C)$, que es el operador diagonal que tiene la misma diagonal que C respecto de la base $\{e_n\}$ prefijada, es el mejor aproximante diagonal compacto para $C - \mathrm{Diag}(C)$ (o, lo que es igual, 0 es el mejor aproximante diagonal para C).

En este contexto, los primeros dos resultados obtenidos son de existencia de operadores minimales particulares, a saber:

Teorema 0.7. *Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ tal que verifica alguna de las siguientes condiciones:*

1. *C es diagonal por bloques de matrices $C_i \in M_{n_i}^h(\mathbb{C})$ para cada $i \in \mathbb{N}$.*
2. *C es tridiagonal tal que $Re(C) = \dfrac{C^* + C}{2} = 0$ y $\mathrm{Diag}(C) = 0$.*

Entonces C es minimal.

Teorema 0.8. *Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ descripto como $(T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ (i.e $T_{ij} = \langle Te_i, e_j\rangle$). Supongamos que T satisface las siguientes propiedades:*

1. *$T_{ij} \in \mathbb{R}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$,*
2. *existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{i_0 i_0} = 0$, con $T_{i_0 n} \neq 0$, para todo $n \neq i_0$,*
3. *si $T^{[i_0]}$ es el operador T con ceros en su i_0-ésima columna e i_0-ésima fila, entonces*

$$\left\|c_{i_0}(T)\right\| \geq \left\|T^{[i_0]}\right\|,$$

donde $\left\|c_{i_0}(T)\right\|$ denota la norma dos en el espacio de Hilbert de la columna i_0-ésima de T, y

4. si los T_{nn} cumplen que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \neq i_0$:

$$T_{nn} = -\frac{\langle c_{i_0}(T), c_n(T) \rangle}{T_{i_0 n}},$$

entonces T es minimal, es decir

$$\|T\| = \left\|c_{i_0}(T)\right\| = \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|T + D\|.$$

Y más aún, $D = \operatorname{Diag}\big((T_{nn})_{n\in\mathbb{N}}\big)$ es el único operador diagonal acotado minimal para T.

Con este teorema y usando fuertemente la unicidad mencionada del operador diagonal acotado minimal para este caso probamos lo siguiente.

Corolario 0.9. *Existen operadores $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ tales que no poseen mejor aproximante diagonal compacto real, por ejemplo*

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & r\gamma & r\gamma^2 & r\gamma^3 & r\gamma^4 & r\gamma^5 & \cdots \\ r\gamma & 0 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^2 & \gamma & 0 & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^3 & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^4 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & 0 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^5 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ con } \gamma \in (-1, 1), \tag{0.3.1}$$

para un cierto $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

Estudiamos este operador T_0 y otro $S_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ con distintas propiedades que no poseen mejor aproximante diagonal compacta. Buscamos además aproximar al primero de ellos por matrices minimales en alguna topología.

El siguiente teorema es una caracterización de los operadores compactos Hermitianos que resulta una generalización del Teorema 0.2.

Teorema 0.10. *Sean $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$. Consideremos E_+ y E_-, las proyecciones espectrales de los autovalores $\lambda_{max}(C + D_1)$ y $\lambda_{min}(C + D_1)$, respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$C + D_1$ es minimal.*

2. *Existe $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h$, $X \neq 0$, tal que*

   - $\langle Xe_i, e_i \rangle = 0\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}$;
   - $|tr(X(C + D_1))| = \|C + D_1\|\, \|X\|_1\,$;
   - $E_+X^+ = X^+\ ,\ E_-X^- = X^-$.

3. *$\lambda_{min}(C + D_1) + \lambda_{max}(C + D_1) = 0$ y para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ existen $y \in R(E_+)\ ,\ z \in R(E_-)$ tales que:*

   - $\|y\| = \|z\| = 1$;
   - $\langle Dy, y \rangle \leq \langle Dz, z \rangle$.

La función $tr(\cdot)$ corresponde a la traza para operadores positivos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y el espacio $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ es el de los operadores tipo traza, dotado de la norma $\|\cdot\|_1$. Todo esto se encuentra debidamente definido en la sección 1.1.1 de los preliminares.

0.3.2. Curvas minimales en órbitas unitarias

Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ un operador fijo. Consideremos la órbita $\mathcal{O}_A$ dada por la acción del grupo de los unitarios Fredholm, es decir

$$\mathcal{O}_A = \{uAu^* : u \text{ es unitario en } \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ y } u - 1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}.$$

Utilizamos resultados del estudio hecho en [1] y en [15] para este tipo de variedades con el objetivo de obtener curvas uniparamétricas $\chi : [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{O}_A$ de longitud mínima que satisfagan el problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} \chi(0) = b \\ \chi'(0) = x \in (T\mathcal{O}_A)_b, \end{cases} \tag{0.3.2}$$

para $b \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$ y $x = iT_0 b - biT_0$, donde T_0 es el definido en (0.3.1) y que no posee mejor aproximante diagonal compacta real. El espacio tangente a $\mathcal{O}_A$ en b es

$$(T\mathcal{O}_A)_b = \{Yb - bY : Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}\} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}.$$

Para tal T_0 existe un único operador diagonal real acotado pero no compacto D_0 tal que

$$\|T_0 + D_0\| < \|T + D\|, \; \forall D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h).$$

Al estudiar este caso obtuvimos el siguiente resultado.

Teorema 0.11. *Sea $A = u\mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right) u^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, con $u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para cada $i \neq j$. Sean $T_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ el operador definido en (0.3.1) y D_0 su único mejor aproximante diagonal acotado. Entonces, la curva uniparamétrica β definida como*

$$\beta(t) = e^{it(T_0+D_0)} b e^{-it(T_0+D_0)} \tag{0.3.3}$$

está contenida en $\mathcal{O}_A$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, si $b = \mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right) \in \mathcal{O}_A$, esta curva satisface lo siguiente:

1. *$\beta'(0) = x = iT_0 b - biT_0 \in (T\mathcal{O}_A)_b$.*

2. *β tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves de $\mathcal{O}_A$ que unen a b con $\beta(t_0)$, para todo $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|T_0+D_0\|}, \frac{\pi}{2\|T_0+D_0\|}\right]$. Esto es*

$$long\left(\beta|_{[0,t_0]}\right) = \inf\{long(\chi) : \chi \text{ es suave}, \chi(0) = b \text{ y } \chi(t_0) = \beta(t_0)\} = d(b, \beta(t_0)).$$

3. *long* $\left(\beta|_{[0,t_0]}\right) = |t_0|\, \|x\|_b$, *para cada* $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|T_0+D_0\|}, \frac{\pi}{2\|T_0+D_0\|}\right]$.

Una consecuencia interesante de este teorema es la que mencionamos en el siguiente corolario.

Corolario 0.12. *Sea* $A = u\mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right) u^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, *con* $u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ *y* $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *tal que* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *para cada* $i \neq j$. *Entonces, existen curvas de longitud mínima de la forma* $\rho(t) = e^{tZ}be^{-tZ}$ *en* $\mathcal{O}_A$ *tales que unen a* $b = \mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right)$ *con otros puntos de la órbita, pero sin embargo* $Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ *y* $\|Z\| > \|[Z]\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})}$.

También hacemos mención sobre la generalización de algunos de los resultados obtenidos en el contexto de espacios homogéneos asociados a C^*-álgebras en general.

Finalmente, construimos una sucesión de curvas también minimales en $\mathcal{O}_A$ tales que converjan a la curva que satisfaga el PVI (0.3.2). Esto puede verse plasmado en el siguiente resultado.

Teorema 0.13. *Sean* $b \in \mathcal{O}_A$ *como en el Teorema 0.11,* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal fija y* P_n *la proyección ortogonal correspondiente al subespacio* $Gen\{e_1,, ..., e_n\}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces existe una sucesión* $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_A$ *de curvas de matrices tales que*

1. $\begin{cases} \beta_n(0) = b \\ \beta_n'(0) = iP_nT_0P_nb - ibP_nT_0P_n \in (T\mathcal{O}_A)_b. \end{cases}$

2. *Para todo* $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|[P_nT_0P_n]\|}, \frac{\pi}{2\|[P_nT_0P_n]\|}\right]$ *se cumple que*

$$long\left(\beta_n|_{[0,t_0]}\right) = |t_0|\, \|[P_nT_0P_n]\| = long\left(\beta|_{[0,t_0]}\right).$$

3. $\beta_n : [0, t_0] \to \mathcal{O}_A$ *con* $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|[P_nT_0P_n]\|}, \frac{\pi}{2\|[P_nT_0P_n]\|}\right]$ *es una curva de longitud mínima en* $\mathcal{O}_A$.

4. $s_n'(0) \to s'(0) = x$ *con la norma* $\|\cdot\|_b$ *de* $(T\mathcal{O}_A)_b$.

5. *$\beta_n \to \beta$ uniformemente en* $\left[-\frac{\pi}{2\|[P_n T_0 P_n]\|}, \frac{\pi}{2\|[P_n T_0 P_n]\|}\right]$.

De esta forma, hemos obtenido una curva minimal β en $\mathcal{O}_A$ que puede ser aproximada uniformemente por curvas $\{\beta_n\}$ de longitud mínima de matrices pero sin embargo, β no cumple que su levantada minimal sea compacta, a pesar de cada β_n tiene una levantada matricial minimal.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Operadores lineales sobre espacios de Hilbert

En este Capítulo recopilamos una serie de resultados preliminares que utilizaremos luego, en mayor o en menor medida, al desarrollar los contenidos de los capítulos posteriores.

Definición 1.1. *Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo tal que existe una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ la cual satisface las siguientes propiedades*

1. $\langle h, h \rangle \geq 0$ *para todo* $h \in \mathcal{H}$ *y* $\langle h, h \rangle = 0$ *si y sólo si* $h = 0$*;*
2. $\langle h + v, w \rangle = \langle h, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *para todo* $h, v, w \in \mathcal{H}$*;*
3. $\langle \alpha h, v \rangle = \alpha \langle h, v \rangle$ *para todo* $h, v \in \mathcal{H}$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$*;*
4. $\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle$ *para todo* $v, w \in \mathcal{H}$*;*
5. $\mathcal{H}$ *es completo con la norma definida para cada* $h \in \mathcal{H}$ *como* $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$*.*

Notemos que a partir de las propiedades 2 y 3 se deduce que

$$\langle v, \alpha(h + w) \rangle = \overline{\langle \alpha(h + w), v \rangle} = \overline{\langle \alpha h, v \rangle + \langle \alpha w, v \rangle} = \overline{\alpha} \langle v, h \rangle + \overline{\alpha} \langle v, w \rangle$$

para todo $h, v, w \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ que verifica los ítems *1* a *4* se denomina producto interno.

A lo largo de esta tesis consideraremos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable y consideraremos funciones lineales $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que llamaremos operadores. Un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se dice que es acotado si existe una constante $N_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\|Th\| \leq N_0 \|h\|, \text{ para todo } h \in \mathcal{H}.$$

En este contexto, definimos (y notamos) a la norma de T como

$$\|T\| = \text{ínf}\{N \in \mathbb{R}_{>0} : \ \|Th\| \leq N \|h\|\}.$$

Usaremos $\|.\|$ tanto para la norma de operadores como para la que ya hemos definido en $\mathcal{H}$ mediante el producto interno, se entenderá en el contexto en que se encuentre. No resulta difícil deducir que la condición de que un operador sea acotado es equivalente a que éste mismo resulte continuo. Sea $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el conjunto de operadores lineales y acotados sobre $\mathcal{H}$. La norma de operadores, $\|.\|$ cumple que es submultiplicativa, es decir

$$\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\| \ \text{ para todo } S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Usaremos $Ker(T)$ y $R(T)$ para denotar el núcleo y rango de cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, respectivamente. A la dimensión del rango de T la notaremos $ran(T)$.

Dada una base ortonormal fija $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$, consideraremos a cada operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como una matriz infinita definida para cada $i, j \in \mathbb{N}$ como $T_{ij} = \langle Te_i, e_j \rangle$. En este sentido, la j-ésima columna y la i-ésima fila de T son vectores de ℓ^2 dados por $c_j(T) = (T_{1j}, T_{2j}, ...)$ y $f_j(T) = (T_{i1}, T_{i2}, ...)$, respectivamente.

Si $\mathcal{A}$ es $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ o algún subconjunto de éste, denotaremos con $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ al conjunto de operadores diagonales de $\mathcal{A}$, esto es

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ T \in \mathcal{A} : \left\langle Te_i, e_j \right\rangle = 0 \,, \ \text{para todo } i \neq j \right\} .$$

Definimos la aplicación $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $\Phi(X) = Diag(X)$, que esencialmente toma la diagonal principal (i.e. los elementos de la forma $\langle Xe_i, e_i \rangle$ con $i \in \mathbb{N}$) de un operador X y construye un operador diagonal en la base prefijada de $\mathcal{H}$. Dada una sucesión numérica $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ llamaremos $\mathrm{Diag}\big(\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big)$ a la matriz diagonal (infinita) que tiene a $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como su diagonal principal y 0 fuera de ella.

Notamos con $[\ ,\ ]$ al operador conmutador , es decir, para cada $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$[T, S] = TS - ST.$$

Definición 1.2. *Para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existe otro operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que para todo $h, v \in \mathcal{H}$*

$$\langle Th, v \rangle = \langle h, Sv \rangle \,.$$

Dicho operador S se denomina adjunto de T y es único. Lo denotaremos como $S = T^*$. Tiene la particularidad que

$$\|T\| = \|T^*\| = \|T^*T\|^{1/2} \,.$$

La función identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador lineal acotado y lo notaremos como I. A continuación clasificaremos algunos tipos operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición 1.3. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, diremos que*

1. *T es normal si $TT^* = T^*T$.*

2. *T es Hermitiano si $T = T^*$.*

3. *T es anti-Hermitiano si $T = -T^*$.*

4. *T es una proyección si $T^2 = T$. Si además $T = T^*$, diremos que T es ortogonal.*

5. *T es positivo ($T \geq 0$) si $\langle Th, h\rangle \geq 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$.*

6. *T es unitario si $TT^* = T^*T = I$.*

Al conjunto de operadores unitarios de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ lo notaremos $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Para notar al conjunto de operadores Hermitianos (respectivamente, anti-Hermitianos) utilizaremos el superíndice ^{h} (resp. ^{ah}). $\mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ será el subconjunto de los operadores acotados positivos.

Observación 1.4. *Sean $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

- *Si $T \geq 0$ entonces T es Hermitiano.*
- *Diremos que $T \geq S$ si $T - S \geq 0$.*

Definimos para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ los siguientes operadores

$$Re(T) = \frac{T + T^*}{2} \text{ e } Im(T) = \frac{T - T^*}{2i}$$

denominados partes real e imaginaria, respectivamente, de T. Observemos que $Re(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, $Im(T) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}$ y

$$T = Re(T) + iIm(T),$$

con lo cual podemos deducir que $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})^h \oplus \mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}$.

Definición 1.5. *Para $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definimos al operador $|T|$ como el único operador positivo tal que $|T|^2 = T^*T$. Es decir,*

$$|T| = (T^*T)^{1/2}.$$

Siguiendo la definición anterior, las partes positiva y negativa de T son operadores definidos como:

$$T^{+} = \frac{|T| + T}{2} \text{ y } T^{-} = \frac{|T| - T}{2},$$

respectivamente.

Por otro lado, para cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ es biyectivo con inversa acotada se denomina resolvente de T y lo denotamos $\rho(T)$. Si $\lambda \notin \rho(T)$, diremos que λ está en el espectro de T. El espectro de T lo notaremos como $\sigma(T)$ y cumple, entre otras, las siguientes propiedades.

Teorema 1.6. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces,*

1. *$\sigma(T)$ es un conjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$.*

2. *Si $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} < \infty$ tenemos que*

$$r(T) \leq \|T\|.$$

Dicho supremo se denomina radio espectral de T.

3. *Si p es un polinomio en $\mathbb{C}$ de grado n cualquiera*

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T)).$$

4. *Si f es una función holomorfa en un entorno del espectro de T, entonces*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

5. *Si $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador tal que conmuta con T, entonces*

$$\sigma(S + T) \subseteq \sigma(S) + \sigma(T) = \{\lambda + \beta : \lambda \in \sigma(S) \text{ y } \beta \in \sigma(T)\},$$

$$\sigma(ST) \subseteq \sigma(S)\sigma(T) = \{\lambda.\beta : \lambda \in \sigma(S) \text{ y } \beta \in \sigma(T)\}.$$

A su vez, podemos considerar los siguientes subconjuntos de $\sigma(T)$

Definición 1.7. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definimos los siguientes subconjuntos del espectro de T*

1. *El espectro puntual: $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \neq 0 \ / \ (T - \lambda I)x = 0\}$. Los elementos de $\sigma_p(T)$ se denominan autovalores de T. Otra notación alternativa para este conjunto es $\lambda(T)$.*

2. *El espectro residual: $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T) : \overline{(T - \lambda I)(\mathcal{H})} \neq \mathcal{H}\}$.*

3. *El espectro continuo: $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \sigma(T) - \sigma_p(T) : \overline{(T - \lambda I)(\mathcal{H})} = \mathcal{H}\}$.*

Estos subconjuntos son disjuntos dos a dos y además permiten descomponer el espectro de T, ya que

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T).$$

1.1.1. Operadores compactos

Definición 1.8. *Diremos que un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es compacto si la clausura del conjunto imagen*

$$T\left(\{h \in \mathcal{H} : \|h\| \leq 1\}\right)$$

es compacta. Al conjunto de todos los operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ lo denotaremos $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Observación 1.9. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

2. *T transforma conjuntos acotados en conjuntos con clausura compacta.*

3. *T transforma sucesiones acotadas en sucesiones que tienen subsucesiones convergentes.*

4. *$T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

5. *Existe una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores de rango finito (esto es $ran(T_n) < \infty$ para todo n) tal que $\|T_n - T\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Por otra parte, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un espacio vectorial y cumple lo siguiente:

Proposición 1.10. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y supongamos que existe una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que $\|T_n - T\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Además, si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ para todo $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vale que ST y TS son compactos, lo cual implica que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero.

Teorema 1.11 (Riesz-Schauder)**.** *Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces,*

1. *$0 \in \sigma(T)$;*

2. *$\sigma(T) - \{0\}$ es el conjunto de autovalores de T con multiplicidad finita, es decir que $dim(Ker(T - \lambda I)) < \infty$ para todo $\lambda \in \sigma(T) - \{0\}$;*

3. *$\sigma(T) - \{0\}$ puede ser un conjunto vacío o finito o formar una sucesión de elementos que converjan a 0 (esto es, es un conjunto discreto con ningún límite salvo el 0).*

Dado $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, el Teorema 1.11 implica que $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n(T)\}}_{n\in\mathbb{N}}$ siendo $\{\lambda_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de todos los autovalores de T ordenados decrecientemente. Por otro lado, definimos $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ como el conjunto de valores singulares de T que son todos los autovalores (ordenados decrecientemente) de $|T|$. Como $|T| \geq 0$ sigue que cada $s_n(T) \geq 0$ y además $s_n(T) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Teorema 1.12 (Forma canónica para operadores compactos)**.** *Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Entonces existen conjuntos ortonormales $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$ y $\{\phi_n\}_{n=1}^{N}$ (no necesariamente completos) tales que*

$$T = \sum_{n=1}^{N} s_n(T) \langle \psi_n, . \rangle \phi_n. \tag{1.1.1}$$

La suma en la expresión (1.1.1) converge en norma de operadores y los $s_n(T)$ son los valores singulares de T.

Definición 1.13. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortornomal. Definimos para cada operador positivo $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la traza*

$$tr(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Le_n, e_n \rangle .$$

Teorema 1.14. *El valor $tr(\cdot)$ cumple para cada $L, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$:*

1. $tr(L) \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$;
2. *No depende de la base ortonormal elegida;*
3. $tr(L + S) = tr(T) + tr(S)$;
4. $tr(\lambda L) = \lambda tr(L)$ *para todo* $\lambda \geq 0$;
5. $tr(ULU^*) = tr(L)$ *para todo* $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$;
6. $tr(L^*) = \overline{tr(L)}$;
7. *si* $0 \leq L \leq S$ *entonces* $0 \leq tr(L) \leq tr(S)$;
8. $tr(\cdot)$ *es lineal.*

Definición 1.15. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:*

- *Si $tr(|T|) = tr\left((T^*T)^{1/2}\right) < \infty$, diremos que T es un operador tipo traza. La clase de todos los operadores tipo traza la denotaremos $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ y la norma de cada $T \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ la definiremos como*

$$\|T\|_1 = tr(|T|) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T).$$

- *Si* $tr(|T|^2) = tr(T^*T) < \infty$, *diremos que* T *es un operador tipo Hilbert-Schmidt. La clase de todos los operadores tipo Hilbert-Schmidt la denotaremos* $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ *y la norma de cada* $T \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ *la definiremos como*

$$\|T\|_2 = \left(tr(|T|^2)\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^2\right)^{1/2}.$$

- *Más en general, para cada* $1 \leq p < \infty$, *definimos las clases de operadores p-Schatten que son aquellos* $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *tales que* $tr(|T|^p) = tr(T^*T) < \infty$. *Cada clase la denotaremos* $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ *y la norma p de cada* $T \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ *la definiremos como*

$$\|T\|_p = \left(tr(|T|^p)\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p\right)^{1/p}.$$

Algunas propiedades de los espacios $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ las mencionaremos a continuación.

Teorema 1.16. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert separable,* $1 \leq p < \infty$ *y* $T \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$. *Entonces*

1. $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.
2. *Si* $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *entonces* $ST, TS \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.
3. $T^* \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.
4. $(\mathcal{B}_p(\mathcal{H}), \|.\|_p)$ *es un espacio de Banach. Sin embargo, no resultan ser completos con la norma espectral usual.*
5. *La sucesión* $\{\|T\psi_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está contenida en* ℓ^p *para toda* $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *base ortonormal de* $\mathcal{H}$.
6. *La sucesión de valores singulares* $\{s_n(T)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está contenida en* ℓ^p.

7. *Los operadores de rango finito son* $\|.\|_p$ *densos en* $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$.

8. $\|T\| \leq \|T\|_2 \leq \|T\|_1$.

En el caso particular de $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ se trata además de un espacio de Hilbert de operadores con el producto interno definido como

$$\langle T, S\rangle_2 = tr(S^*T)$$

para todo $T, S \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$. Observemos que $\|T\|_2 = \sqrt{\langle T, T\rangle}$.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 1.19 de [24].

Proposición 1.17. *Sean* $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, P *y* $1 - P = Q$ *proyecciones mutuamente ortogonales. Entonces, si* $s_n(A)$ *son los valores singulares del operador* A, *para cada* $1 \leq p < \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [s_n(PAP)^p + s_n(QAQ)^p] \leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A)^p$$

o equivalentemente

$$\|PAP\|_p + \|QAQ\|_p \leq \|A\|_p .$$

1.2. Álgebras de Banach

Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach dotado de una multiplicación tal que $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$. Por ejemplo, además de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, todos los conjuntos $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < \infty$ son álgebras de Banach con sus respectivas normas p.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Denotamos como $\mathcal{A}^*$ al espacio dual topológico de $\mathcal{A}$, es decir

$$\mathcal{A}^* = \{\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} / \ \phi \text{ es lineal y continuo}\}.$$

El siguiente teorema es una caracterización de los funcionales de los espacios $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ y se puede encontrar en [21].

Teorema 1.18. *Todas las funcionales lineales y continuas ϕ del espacio de Banach $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ con $p \in [1, +\infty]$, están dadas por la fórmula*

$$\phi(Y) = tr(AY), \tag{1.2.1}$$

con A un operador fijo en $\mathcal{B}_q(\mathcal{H})$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Además,

$$\|\phi\| = \sup_{Y \in \mathcal{B}_p(\mathcal{H})} \frac{|tr(AY)|}{\|Y\|_p} = \|A\|_q .$$

Con esta notación $\mathcal{B}_\infty(\mathcal{H}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Corolario 1.19. *Según el teorema anterior todas las funcionales de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ son de la forma*

$$\phi(C) = tr(AC),$$

con A un operador fijo en $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ y

$$\|\phi\| = \sup_{Y \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})} \frac{|tr(AY)|}{\|Y\|_1} = \|A\| .$$

Por lo tanto, $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* = \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.

El siguiente resultado es una de las versiones del Teorema de Hanh-Banach para espacios normados que se encuentra en [18].

Teorema 1.20. *(Extensión de Hahn-Banach) Si S es un subespacio de un espacio normado E y $\rho_0 \in S^*$, entonces existe $\rho \in E^*$ tal que*

$$\|\rho\| = \|\rho_0\| \ , \ \rho(s) = \rho_0(s) \ , \forall s \in S.$$

Corolario 1.21. *Si S es un subespacio cerrado de un espacio normado E y $x_0 \in E/S$, entonces existe $\rho \in E^*$ tal que $\|\rho\| = 1$, $\rho(s) = 0$, para todo $s \in S$, y además*

$$\rho(x_0) = \inf_{s\in S} \|x_0 + s\|.$$

1.2.1. C^*-álgebras

Definición 1.22. *Una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con una involución $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{A}$ satisface*

- $(x+y)^* = x^* + y^*$,
- $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $(xy)^* = y^* x^*$,
- $(x^*)^* = x$,
- $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Un ejemplo de C^*-álgebra es $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si el álgebra $\mathcal{A}$ tiene un elemento identidad, diremos que es unital. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es una C^*-álgebra que no posee 1, dado que la identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ no es compacta cuando $dim(\mathcal{H}) = \infty$.

En una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ se definen elementos Hermitianos, anti-Hermitianos y positivos análogamente a lo hecho en la sección 1.1 y usaremos los mismos superíndices ^{ah}, ^{h} y $^{+}$ para denotar a cada uno de los conjuntos de dichos elementos.

Una C^*-subálgebra de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada con la involución y la topología de la norma $\|.\|$ de $\mathcal{A}$. A las C^*-subálgebras de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se las denomina concretas, por ejemplo, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. El Teorema de Gelfand-Neumark establece que toda C^*-álgebra puede identificarse isométricamente con una C^*-álgebra concreta. La prueba de este hecho puede encontrarse en el Capítulo 4 de [18].

1.2.2. Topologías en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Existen otras topologías para el espacio de los operadores lineales y acotados, además que la dada por la norma usual Le operadores. Las más importantes son las mencionamos a continuación.

- La topología fuerte de operadores (SOT): Sea $\{X_i\}_i$ una red de elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Diremos que X_i tiende SOT a $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\|(X_i - X)h\| \to 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

- La topología débil de operadores (WOT): Sea $\{X_i\}_i$ una red de elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Diremos que X_i tiende WOT a $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si $\langle (X_i - X)h, v\rangle \to 0$ para todo $h, v \in \mathcal{H}$.

La convergencia en norma de operadores es la uniforme, en tanto podemos observar que la convergencia tipo SOT es la puntual. De modo que la de operadores resulta ser más fuerte en el sentido que implica a la SOT. Análogamente, no resulta difícil ver que la convergencia SOT implica la WOT, que es la más débil de las 3 topologías.

Observación 1.23. *$D(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$ es cerrado en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ en norma espectral. En efecto, si tomamos un sucesión $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$ tal que converge en norma espectral a un operador $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ entonces también lo hace WOT, es decir*

$$\langle D_n x, y\rangle \longrightarrow \langle Tx, y\rangle \ , \ \forall x, y \in \mathcal{H}$$

En particular, para cada $i, j \in \mathbb{N}$, si consideramos la familia canónica $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ entonces

$$\left\langle D_n e_i, e_j\right\rangle \longrightarrow \left\langle Te_i, e_j\right\rangle$$

Pero $D_{ij} = \left\langle D_n e_i, e_j\right\rangle = 0$, para todo $i \neq j$ ya que son las entradas no diagonales del *operador D_n en la base $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Con lo cual*

$$T_{ij} = \langle Te_i, e_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j$$

Análogamente, se prueba que $D(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ es cerrado en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en norma espectral.

1.2.3. Álgebras de von Neumann

Definición 1.24. *Una subálgebra unital $\mathcal{L}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunta (i.e. $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$) y cerrada en la topología WOT se denomina un álgebra de von Neumann.*

Toda álgebra de von Neumann resulta ser también una C^*-álgebra, pero no sucede al revés: el ejemplo más ilustrativo es $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, que es una C^*-álgebra que no resulta ser cerrada en la topología WOT cuando $dim(\mathcal{H}) = \infty$. En efecto, consideremos que $\mathcal{H}$ es separable y sean $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una base ortonormal de $\mathcal{H}$, y $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $P_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Resulta que cada $P_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ dado que son de rango finito. Pero si $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j$ son dos vectores cualesquiera de $\mathcal{H}$, entonces

$$\langle P_n x, y \rangle = \langle P_n x, P_n y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i x_i, \sum_{j=1}^{n} e_j y_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \to \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = \langle x, y \rangle,$$

cuando $n \to \infty$.Esto muestra que la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende WOT a la identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, que no es un operador compacto.

Dada $\psi : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado, diremos que ψ es normal si resulta ser continuo con la topología WOT en la bola unitaria de $\mathcal{L}$. El espacio de los funcionales normales de $\mathcal{L}$ se denomina predual de $\mathcal{L}$ y se denota $\mathcal{L}_*$. Claramente $\mathcal{L}_* \subseteq \mathcal{L}^*$ y esa inclusión puede llegar a ser estricta cuando $\mathcal{H}$ es infinito dimensional. Además $(\mathcal{L}_*)^* \cong \mathcal{L}$.

Observación 1.25. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. Entonces*

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})_* = \mathcal{B}_1(\mathcal{H}).$$

Dada $\mathcal{A}$ un álgebra de von Neumann, diremos que $\mathcal{L}$ es una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ y es un álgebra de von Neumann en sí misma con la topología heredada de $\mathcal{A}$.

Definición 1.26. *Dado $S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ conjunto no vacío, el conmutante de S es el conjunto*

$$S' = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \; Xs = sX, \; \forall \, s \in S\}.$$

S' es un álgebra cerrada con la topología WOT.

Por último, definimos el concepto de esperanza condicional sobre álgebras de von Neumann.

Definición 1.27. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de von Neumann y $\mathcal{L}$ una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{A}$. Decimos que una proyección $E : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ es una esperanza condicional si*

1. $E(x) \geq 0$ *para todo* $x \geq 0$;

2. $E(axb) = aE(x)b$, *para cada* $a, b \in \mathcal{L}$ *y* $x \in \mathcal{A}$;

3. $E(1) = 1$.

1.3. Mejor aproximación en espacios de Banach

Sean $(V, \|.\|)$ un espacio de Banach y $S \subseteq V$. Definimos la distancia de S a un elemento $x \in V$ de la siguiente manera

$$\operatorname{dist}(x, S) = \inf\{\|x - s\| : \; s \in S\}.$$

Algunas cuestiones para considerar:

1. Si S es un subespacio cerrado de V entonces $d(x, S)$ es la norma cociente de la clase de x en V/S. Ese cociente es además un espacio de Banach en sí mismo con la norma $\|[x]\|_{V/S} = \text{dist}(x, S)$ para cada $x \in S$.

2. Si $x \in S$ entonces $\text{dist}(x, S) = 0$, con lo cual $x \in [0]$.

3. Si existe $s_0 \in S$ tal que $\text{dist}(x, S) = \|x - s_0\|$, llamaremos a tal elemento mejor aproximante en S para x. La existencia de mejor aproximante depende de los espacios S y V. El elemento $x - s_0$ se dice que es minimal en su clase.

4. Todos los elementos $x_0 \in V$ tales que $\|x_0\| \leq \|x_0 + s\|$ para todo $s \in S$ son minimales.

En este trabajo de tesis abordaremos un problema relacionado con la búsqueda de mejores aproximantes en el contexto de C^*-álgebras. Más específicamente, trabajaremos en la búsqueda de operadores minimales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Proposición 1.28. *Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y $\mathcal{B}$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$. Si $a \in \mathcal{A}^h = \{x \in \mathcal{A} : \ x = x^*\}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\|a\| \leq \|a + b\|$ para todo $b \in \mathcal{B}^h$.*

2. *$\|a\| \leq \|a + b\|$ para todo $b \in \mathcal{B}$.*

Demostración.

- $2 \Rightarrow 1$ Es trivial.

- $1 \Rightarrow 2$ Sea $b_0 \in \mathcal{B}$, entonces

$$\|a\| \leq \|a + Re(b_0)\| = \|Re(a + b_0)\| \leq \|a + b\| .$$

□

Corolario 1.29. *Para todo $a \in \mathcal{A}^h$, se cumple que* $\text{dist}(a, \mathcal{B}) = \text{dist}(a, \mathcal{B}^h)$.

1.3.1. Operadores minimales Hermitianos en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ un operador dado y consideremos el espacio $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, que es la C^*-subálgebra de los operadores diagonales compactos para una BON $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fija. En este contexto, definimos el espacio cociente $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ dotado de la norma usual

$$\|[C]\| = \inf_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C+D\| = \operatorname{dist}(C, \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h))$$

para cada clase $[C] = \left\{C + D :\ D \in \mathcal{D}\left(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h\right)\right\}$.

Si existe un operador D_1 compacto y diagonal tal que

$$\|C + D_1\| = \operatorname{dist}\left(C, \mathcal{D}\left(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h\right)\right),$$

diremos que D_1 es un mejor aproximante de C en $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$. En otras palabras, el operador $C_1 = C + D_1$ verifica la siguiente desigualdad

$$\|C_1\| = \|C + D_1\| \leq \|C + D\|$$

para todo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ y a su vez

$$\|C_1\| = \operatorname{dist}\left(C_1, \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)\right). \tag{1.3.1}$$

En este sentido, diremos que C_1 es un operador **minimal** o similarmente, podremos decir que D_1 es minimal para C.

Observación 1.30. *Si el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ no fuera separable y consideramos una base ortonormal fija $\{e_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$, podemos observar que el operador C en (1.3.1) es compacto, entonces solamente un conjunto contable $\{e_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{e_i\}_{i\in I}$ satisface $C(e_{i_n}) \neq 0$. Por lo tanto, para hallar el valor $\inf_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C - D\|$, podemos restringir nuestra búsqueda a aquellos operadores $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ que son diagonales respecto de ese subconjunto* *numerable de la base (y 0 fuera de ese lugar). Entonces, para poder describir operadores minimales compactos, podremos suponer sin pérdida de generalidad que el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es separable.*

En el contexto de matrices, la existencia de mejor aproximante diagonal está asegurada por argumentos de compacidad elementales.

Teorema 1.31. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $M_0 \in M_n(\mathbb{C})^h$. Entonces existe $D_0 \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{C})^h)$ tal que*

$$\|M_0 + D_0\| \leq \|M_0 + D\|\,, \textit{para toda } D \in \mathcal{D}(M_n(\mathbb{C})^h).$$

Cabe destacar que el teorema anterior no menciona nada acerca de unicidad de la diagonal minimizante. Eso depende de M_0, por lo cual en algunos casos habrá unicidad, en tanto en otros no. En [20] hay varios ejemplos de este tipo de situaciones para el caso $n = 3$. Siguiendo con el citado artículo, los siguientes resultados son teoremas de minimalidad de matrices que utilizaremos en el contexto de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Teorema 1.32. *Si $N \in M_n(\mathbb{C})$ es una matriz Hermitiana tal que $\Phi(N) = \mathrm{Diag}(N) = 0$ y $Re(N_{ij}) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Entonces N es minimal.*

Teorema 1.33. *Sea $N \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que satisface las siguientes condiciones:*

- *Su k-ésima columna $c_k(N)$ verifica que $c_k(N)_i = N_{ik} \neq 0$ para todo $i \neq k$;*
- $N_{ii} = \begin{cases} 0 & si \quad j = k \\ -\frac{\langle c_j(N), c_k(N) \rangle}{N_{jk}} & si \quad j \neq k; \end{cases}$
- *Si $N^{[k]}$ es la matriz N con la k-ésima columna y fila nulas, $\left\| N^{[k]} \right\| \leq \|c_k(N)\|$.*

Entonces N es una matriz minimal con $\|N\| = \|c_k(N)\|$. Más aún, $\mathrm{Diag}(N)$ resulta ser la única diagonal tal que N es minimal.

1.4. Variedades de Banach

Sea E un espacio de Banach real. Una variedad de Banach suave modelada sobre E es un espacio topológico regular $\mathcal{X}$ dotado con una familia maximal de homeomorfismos $\{\phi_i : V_i \to \phi(V_i)\}_{i\in I}$ tales que:

- V_i es un subconjunto abierto de $\mathcal{X}$ y $\phi(V_i)$ es un subconjunto abierto de E para cada $i \in I$.
- $\mathcal{X} = \bigcup_{i\in I} V_i$.
- Si $i, j \in I$ y $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ entonces la función de cambios de coordenadas

  $$\phi \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(V_i \cap V_j) \to \phi_i(V_i \cap V_j)$$

  es suave.

Cada par (V_i, ϕ_i) se conoce como carta coordenada local.

Por otro lado, definiremos los conceptos de métrica y variedad de Finsler.

Definición 1.34. *Una métrica de Finsler en una variedad de Banach $\mathcal{X}$ consiste en una elección continua de normas en cada espacio tangente que podemos denotar como*

$$\|.\|_x : (T\mathcal{X})_x \to \mathbb{R},\ x \to \|.\|_x .$$

Una variedad de Finsler es una variedad de Banach con una métrica de Finsler.

Definición 1.35. *Un grupo de Lie-Banach (real) es un grupo topológico G que es además una variedad de Banach tal que las funciones*

$$(.,.) : G \times G \to G,\ (u,v) = uv \text{ e } inv : G \to G,\ inv(u) = u^{-1}$$

son suaves. El espacio tangente $(TG)_1$ en la identidad $1 \in G$ se denomina álgebra de Lie de G y la notamos $\aleph$.

Un subgrupo uniparamétrico de G es una curva $\gamma : \mathbb{R} \to G$ tal que

$$\gamma(0) = 1 \text{ y } \gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t), \text{para todo } s, t \in \mathbb{R}.$$

Para cada $X \in \aleph$ existe un único subgrupo uniparamétrico suave γ_X de G tal que $\dot{\gamma}_X(0) = X$. Con esto definimos la aplicación exponencial, dada por

$$\exp_G : \aleph \to G, \ \exp_G(X) = \gamma_X(1).$$

Esta función es suave.

En esta tesis trabajaremos con dos grupos de Lie-Banach que son grupos unitarios en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, para $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. Estos son:

1. El grupo unitario $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) = \{u \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \ uu^* = u^*u = I\}.$$

   Es un grupo de Lie-Banach con la topología relativa inducida por la norma. El álgebra de Lie de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ se identifica con $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}$ y la aplicación exponencial está dada por

$$\exp_{\mathcal{U}} : \mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah} \to \mathcal{U}(\mathcal{H}), \ exp_{\mathcal{U}}(X) = e^X,$$

   que es la exponencial usual de operadores.

2. El grupo de los operadores unitarios que son perturbaciones de la identidad por elementos de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{U}_c(\mathcal{H}) = \{u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : u - I \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\},$$

   es el denominado grupo de unitarios de Fredholm. El álgebra de Lie correspondiente es $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah} \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ y la exponencial está dada de forma similar al grupo anterior pero con dominio más restringido, esto es

$$\exp_{\mathcal{U}_c} : \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} \to \mathcal{U}_c(\mathcal{H}),\ exp_{\mathcal{U}_c}(X) = e^X.$$

Como nuestro trabajo se centra más en la segunda clase de unitarios, enunciamos la siguiente proposición que es una caracterización del grupo de los unitarios Fredholm en términos de los operadores de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$.

Proposición 1.36. *Si $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ entonces $e^X \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$. Por otra parte, dado $w \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ existe $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ tal que $w = e^X$.*

Demostración. Si consideramos la serie de e^X con $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, entonces

$$e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + ...$$

$$= 1 + \underbrace{X}_{\in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}} \left[1 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{3!}X^2 + ...\right] = 1 + K\,,\ K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

lo cual verifica que $e^X \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$.

Por otro lado, si $w \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \subset \mathcal{U}(\mathcal{H})$ en el Lema 2.1 de [1] se asegura que existe $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ tal que $w = e^X$. Veamos que ese X se puede elegir de modo que sea anti-Hermitiano. Sea $u(t)$ una curva suave en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ tal que $u(0) = 1$ y $u'(0) = v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Afirmamos que $v = -v^*$. En particular, $u(t) = e^{tX}$, $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es una curva suave de $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ que satisface las condiciones anteriores, con $u(0) = e^{0X} = 1$ y $u'(0) = Xe^{0X} = X$. Luego, $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$. $\square$

Observación 1.37. *Incluso si $Z \notin \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, e^Z puede estar en $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$. En efecto, sea $X_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, luego $X_0 + 2\pi i I \notin \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ pero*

$$e^{X_0 + 2\pi i I} = e^{X_0} \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H}).$$

1.4.1. Espacios homogéneos

Sea G un grupo de Lie-Banach y $\mathcal{X}$ una variedad suave. Una acción suave de G sobre $\mathcal{X}$ es una función suave $G \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ que satisface para todo $g_1, g_2 \in G$ y $x \in \mathcal{X}$

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

Definición 1.38. *Dados G, un grupo de Lie-Banach, $\mathcal{X}$ una variedad suave y una acción $\cdot : G \to \mathcal{X}$, la órbita de $x \in \mathcal{X}$ es*

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x : \ g \in G\}.$$

Sea $\pi_x : G \to \mathcal{X}$, $\pi_x(g) = g \cdot x$, que es una función suave. El subgrupo de G dado por

$$\mathcal{I}_x = \{g \in G : \ \pi_x(g) = x\}$$

es el grupo de isotropía en $x \in \mathcal{X}$.

Observación 1.39. *Bajo las mismas notaciones anteriores,*

$$\mathcal{O}(x) \cong G/\mathcal{I}_x,$$

para todo $x \in \mathcal{X}$.

Una acción se dice transitiva si para cada $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x_0 = x_1$. Una acción es transitiva cuando $\mathcal{X}$ coincide con una órbita.

Definición 1.40. *Sea $G \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ una acción suave transitiva. $\mathcal{X}$ es un espacio homogéneo suave si existe $x \in \mathcal{X}$ tal que π_x sea una sumersión suave en $1 \in G$.*

Si se tiene un grupo de Lie G actuando en $\mathcal{X}$ transitivamente, diremos que $\mathcal{X}$ es un espacio homogéneo a secas.

Por la observación 1.39 los espacios homogéneos pueden pensarse como espacios cociente provistos de la topología cociente. Por otro lado, ciertas (aunque no todas las) órbitas son espacios homogéneos y subvariedades simultáneamente, dado que algunas cumplen con el siguiente teorema, que es consecuencia del teorema de la función implícita.

Teorema 1.41. *Sea G un grupo de Lie-Banach actuando suavemente en un espacio de Banach E. Dado $x_0 \in E$ fijo, si se cumplen:*

1. *π_{x_0} es una función abierta, si se considera como función de G sobre la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ de x_0 (con la topología relativa de E).*

2. *La diferencial $d(\pi_{x_0})_1 : (TG)_1 \to E$ satisface que su núcleo y su rango son subespacios cerrados complementados.*

Entonces la órbita $\mathcal{O}(x_0)$ es una subvariedad suave de E y un espacio homogéneo suave tal que $(T\mathcal{O}(x_0))_x \cong Ran\ (d(\pi_{x_0})_1)$ para todo $x \in \mathcal{O}(x_0)$.

Consideraremos espacios homogéneos específicos $\mathcal{P}$ que son órbitas de operadores hermitianos en una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ dadas por la acción de los grupos unitarios $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ ó $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$. La longitud de una curva $\beta : [a,b] \to \mathcal{P}$ está dada por

$$\text{long}(\beta) = \int_a^b \left\|\dot{\beta}(t)\right\|_{\beta(t)}\ dt,$$

donde $\|X\|_\rho$ denota la norma de Finsler del vector tangente X en el punto ρ y es inducida por la norma cociente de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$, siendo $\mathcal{B}$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$. Esto último vale pues para cada $\rho \in \mathcal{P}$

$$(T\mathcal{P})_\rho \cong (T\mathcal{U})_1/(T\mathcal{I}_\rho)_1 \cong \mathcal{A}^{ah}/\mathcal{B}^{ah}.$$

Los espacios homogéneos $\mathcal{P}$ del grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ módulo el grupo unitario $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ se denominan banderas generalizadas. Por ejemplo, si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$ la órbita dada por

$$\mathcal{P} = \{uAu^* :\ u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$$

es una bandera generalizada, ya que $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es el grupo de unitarios de $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sin embargo, la órbita de unitarios de Fredholm para A, dada por

$$\mathcal{O}_A = \{uAu^* : \ u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})\},$$

no es una bandera generalizada puesto que $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ no está contenido en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, que sería en este caso la C^*-álgebra.

Definición 1.42. *Sean $\mathcal{P}$, un espacio homogéneo, $\rho \in \mathcal{P}$ y $X \in (T\mathcal{P})_\rho$. Diremos que $Z \in (T\mathcal{U})_1 = \mathcal{A}^{ah}$ es una levantada de X si*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(e^{tZ}\rho e^{-tZ}\right) = X,$$

es decir, si Z es la proyección de X al cociente.

Para este caso, la acción es $\pi_\rho : \mathcal{U} \to \mathcal{P}$, $\pi_\rho(u) = u\rho u^*$.

En este sentido, tenemos los siguientes resultados, cuyas demostraciones se pueden encontrar en [15].

Teorema 1.43. *Sea $\mathcal{P}$ una bandera generalizada de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Consideremos $\rho \in \mathcal{P}$, $X \in (T\mathcal{P})_\rho$ y supongamos que existe $Z \in \mathcal{A}^{ah}$ tal que es una levantada minimal de X, es decir $\|Z\| = \|X\|_\rho$. Entonces la curva parametrizada por $\gamma(t) = e^{tZ}\rho e^{-tZ}$ tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves en $\mathcal{P}$ que unen $\gamma(0)$ con $\gamma(t)$ para cada $t \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z\|}, \frac{\pi}{2\|Z\|}\right]$.*

Cuando $\mathcal{A}$ es también un álgebra de von Neumann, la existencia de levantada minimal para el vector tangente está asegurada por el siguiente resultado.

Teorema 1.44. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de von Neumann y $\mathcal{B}$ una subálgebra WOT cerrada de $\mathcal{A}$. Entonces en el espacio $\mathcal{A}^{ah}/\mathcal{B}^{ah}$ la norma cociente de cada $[z]$ es alcanzada por un elemento de esa misma clase.*

Teorema 1.45. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de von Neumann y $\mathcal{P}$, el espacio homogéneo dado por la acción del grupo unitario de $\mathcal{A}$. Consideremos $\rho \in \mathcal{P}$ y $X \in (T\mathcal{P})_\rho$. Entonces siempre* *existe Z levantada minimal de X y por lo tanto la curva parametrizada por $\gamma(t) = e^{tZ}\rho e^{-tZ}$ tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves en $\mathcal{P}$ que unen $\gamma(0)$ con $\gamma(t)$ para cada $t \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z\|}, \frac{\pi}{2\|Z\|}\right]$.*

1.4.2. La órbita de un operador compacto Hermitiano

Consideremos los grupos de unitarios en $\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ mencionados en la sección 1.4. Dado un operador fijo $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $A = A^*$, definimos la órbita unitaria como

$$\mathcal{O}_A = \{uAu^* : u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})\} \subset A + \mathcal{K}(\mathcal{H})^h.$$

Resulta que $\mathcal{O}_A$ será una subvariedad diferenciable complementada de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ sólo si el espectro de A es finito (esto ha sido probado en [1]). Para cada $b \in \mathcal{O}_A$, la isotropía $\mathcal{I}_b$ es

$$\mathcal{I}_b = \{u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) : \ ubu^* = b\}.$$

Dado que para cada $u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ existe siempre $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ tal que $u = e^X$ (ver Proposición 1.36), la isotropía puede redefinirse de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}_b = \{e^X \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) : \ X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}, \ [X, b] = 0\}.$$

Para cada $b \in \mathcal{O}_A$, el espacio tangente es

$$(T\mathcal{O}_A)_b = \{Yb - bY : Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}\} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}.$$

Si consideramos la aplicación suryectiva

$$\pi_b : \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \to \mathcal{O}_A, \pi_b(u) = ubu^* \tag{1.4.1}$$

y una curva suave $u : [0,1] \to \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ tal que $u(0) = 1$ y $u'(0) = Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, entonces

$$(d\pi_b)_1 = \frac{d}{dt}\, \pi_b(u(t))|_{t=0} = u'(0)b\, u^*(0) + u(0)b\, u'(0)^*$$

$$= Yb1^* + 1bY^* = Yb - bY = \delta_b(Y),$$

donde

$$\delta_b : \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} \to R(\delta_b) = (T\mathcal{O}_A)_b \;/\; \delta_b(Y) = Yb - bY. \tag{1.4.2}$$

Para cada $b \in \mathcal{O}_A$ podemos identificar al espacio tangente de la siguiente manera

$$(T\mathcal{O}_A)_b \cong (T\mathcal{U}_c(\mathcal{H}))_1/(T\mathcal{I}_b)1 \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/(\{b\}')^{ah},$$

siendo $\{b\}'$ el conjunto de los elementos que conmutan con b en una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ (en esta caso particular, $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$). Consideremos la métrica Finsler, definida para cada $x \in (T\mathcal{O}_A)_b$ como

$$\|x\|_b = \text{ínf}\{\|Y\| : Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} \text{ tal que } \delta_b(Y) = x\}.$$

Esta norma también puede expresarse en términos de la proyección al espacio cociente $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/(\{b\}')^{ah}$

$$\|Yb - bY\|_b = \|[Y]\| = \inf_{C \in (\{b\}')^{ah}} \|Y + C\|$$

para cada clase $[Y] = \left\{Y + C : \ C \in (\{b\}')^{ah}\right\}$. La métrica de Finsler es invariante bajo la acción del grupo de unitarios Fredholm (ver sección 5 en [1]).

Por otro lado, siempre existe $Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}$ tal que $\delta_b(Z) = x$ y $\|Z\| = \|x\|_b$. Dicho elemento Z se denomina levantada minimal de x, y Z puede no ser compacto y/o único (ver [9]). Para el caso particular de que A (y por ende b también) tenga rango finito tenemos el siguiente resultado, extraido de [1]:

Proposición 1.46. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$ de rango finito. Entonces para cada $b \in \mathcal{O}_A$ y cada $x \in (T\mathcal{O}_A)_b$ existe una levantada minimal $Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, es decir que cumple:*

$$\delta_b(Z) = x \ \wedge \ \|Z\| = \|x\|_b \, .$$

Las levantadas minimales en $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, así como también en $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}$, sirven para construir curvas minimales en la órbita de A.

En $\mathcal{O}_A$ consideramos curvas suaves a trozos $\beta : [a, b] \to \mathcal{O}_A$, para las cuales definimos la longitud (o arco) rectificable de β como

$$\mathrm{long}(\beta) = \int_a^b \left\|\dot{\beta}(t)\right\|_{\beta(t)} \, dt.$$

La distancia rectificable entre dos puntos, c_1 y c_2, de $\mathcal{O}_A$ es

$$d(c_1, c_2) = \mathrm{ínf}\{\mathrm{long}(\beta) : \ \beta \text{ es suave}, \ \beta(a) = c_1 \text{ y } \beta(b) = c_2\}. \tag{1.4.3}$$

El siguiente resultado (también extraido de [1]) es acerca de curvas minimales en órbitas dadas por la acción del grupo de unitarios de Fredholm y es análogo al Teorema 1.43.

Teorema 1.47. *Sean $A = A^*$ de rango finito, $b \in \mathcal{O}_A$ y $x \in R(\delta_b)$ un vector tangente tal que $\|x\|_b < \frac{\pi}{2}$. Si Z_c es una levantada minimal (compacta) de x, entonces la curva $\xi(t) = e^{tZ_c} b e^{-tZ_c}$ tiene longitud mínima para todo $|t| \leq 1$.*

Capítulo 2

Problema de minimalidad: ejemplos y casos particulares

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos el problema de minimalidad de operadores Hermitianos compactos mediante el análisis de algunos ejemplos y casos particulares. Esta cuestión, además de tener un interés desde el punto de vista de teoría de aproximación de operadores, se encuentra estrechamente relacionada con otro problema de índole geométrica: la obtención de curvas de longitud mínima en órbitas unitarias de operadores Hermitianos. Dichas curvas minimales pueden construirse con los operadores minimales Hermitianos mencionados.

2.2. Problema de minimalidad

Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$. A lo largo de los siguientes capítulos de esta tesis abordamos la siguiente cuestión.

Problema 1. *Dado $a \in \mathcal{A}$ tal que $a = a^*$, decidir si existe $b \in \mathcal{B}^h$ tal que*

$$\|[a]\|_{\mathcal{A}^h/\mathcal{B}^h} = \|a+b\| = dist(a, \mathcal{B}).$$

Nos enfocamos principalmente en el caso $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B} = \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, aunque también abordamos el problema en contextos más generales (ver la sección 5.3 del capítulo 5).

Problema 2. *Dado $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, decidir si existe un elemento diagonal compacto D_1 Hermitiano tal que*

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C+D\| = \|C+D_1\|.$$

En este capítulo analizamos algunos casos particulares relacionados con este problema. Presentamos ejemplos de operadores compactos que hemos estudiado para comprender cómo se relacionan un operador compacto fijo con su mejor aproximante diagonal. Usamos recurrentemente el hecho de que un operador acotado T puede describirse en términos de una base ortonormal fija $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ como una matriz infinita con la notación T_{ij} introducida en los preliminares.

2.3. Ejemplos y casos particulares

El primer caso que abordamos es el de un operador compacto que es diagonal por bloques y cada bloque es un operador matricial.

Teorema 2.1. *Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ tal que C es un operador diagonal por bloques, es decir*

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & C_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & C_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

con $C_i \in M^h_{n_i}(\mathbb{C})$*, para cada* $i \in \mathbb{N}$*. Entonces existe* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ *minimal para* C*.*

Demostración. Por el Teorema 1.31 en los preliminares sabemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $D_i \in \mathcal{D}(M^h_{n_i}(\mathbb{C}))$ minimal. Esto es

$$\|C_i + D_i\| \leq \|C_i + D'_i\| \text{ , para toda } D'_i \in \mathcal{D}(M^h_{n_i}(\mathbb{C})).$$

Afirmamos que

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & D_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & D_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

es un operador diagonal compacto minimal para C. En efecto, es trivial advertir el hecho de que es diagonal porque cada uno de sus bloques D_i lo es. Resta probar la compacidad y la minimalidad de D.

- D es minimal: Sea $D' \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$. En términos de la notación por bloques de C podemos describir a D' como

$$D' = \begin{pmatrix} D'_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & D'_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & D'_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ con } D'_i \in \mathcal{D}(M^h_{n_i}(\mathbb{C})), n_i \in \mathbb{N}.$$

  Entonces

$$\|C + D'\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|C_i + D'_i\| \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} \|C_i + D_i\| = \|C + D\|.$$

- D es compacto: como D_i es diagonal minimizante para cada $i \in \mathbb{N}$ se sigue que $\|C_i + D_i\| \leq \|C_i\|$, entonces

$$\|D_i\| \leq \|C_i + D_i\| + \|C_i\| \leq 2\,\|C_i\| \to 0,$$

cuando $i \to \infty$ (por ser C compacto). Luego, $D_i \to 0$ cuando $i \to \infty$, y la prueba de compacidad ha sido completada.

$\square$

Observación 2.2. *En el caso anterior la norma de $C + D$ es el supremo del conjunto*

$$\{\|C_i + D_i\| : i \in \mathbb{N}\},$$

que claramente se alcanza para algún $i_0 \in \mathbb{N}$ ya que $\|C_i + D_i\| \to 0$ cuando $i \to \infty$.

A continuación mostramos, en primer lugar, la minimalidad de la diagonal nula para matrices tridiagonales imaginarias en $M_n(\mathbb{C})$. Luego extendemos ese resultado a operadores compactos tridiagonales.

Teorema 2.3. *Sea $M \in M_n^h(\mathbb{C})$ una matriz tridiagonal, esto es*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 e^{it_1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 e^{-it_1} & 0 & a_2 e^{it_2} & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 e^{it_2} & 0 & a_3 e^{it_3} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} e^{-it_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

con $a_i, t_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$. Entonces M es minimal.

Demostración. Si consideramos una matriz unitaria diagonal U, dada por

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{it_1+i\frac{\pi}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(t_1+t_2)+i\pi} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\left[i(t_1+...+t_{n-1})+\frac{n-1}{2}i\pi\right]} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$M' := UMU^* = \begin{pmatrix} 0 & ia_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -ia_1 & 0 & ia_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -ia_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -ia_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

con $Re(M'_{ij}) = 0\ ,\ \forall\, i,j \leq n$ y $Diag(M') = 0$. Entonces, por el Teorema 1.32, M' es minimal. Luego

$$\|M\| = \left\|U^*M'U\right\| = \left\|M'\right\| \leq \left\|M' + D\right\| = \|M + U^*DU\|\,.$$

Pero como U es diagonal, conmuta con cada D diagonal. Entonces,

$$\|M\| \leq \|M + D\|\ ,\ \forall\, D \text{ diagonal.}$$

□

Corolario 2.4. *Si $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un operador tridiagonal Hermitiano minimal entonces $Diag(C) = 0$.*

Demostración. Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de matrices Hermitianas tridiagonales tal que

$$\lim_{n\to\infty} C_n = C \text{ y } \mathrm{Diag}(C_n) = 0.$$

Cada $C_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, dado que $ran(C_n) < \infty$, y además por el Teorema 2.3 son minimales. Entonces

$$\|C\| = \left\|\lim_{n\to\infty} C_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|C_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|C_n + D\| = \left\|\lim_{n\to\infty} C_n + D\right\| = \|C + D\|$$

para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$. □

El siguiente teorema aborda un caso especial de operadores compactos reales Hermitianos que tienen la siguiente propiedad: hay una columna (o fila) que es ortogonal a todas las demás. Es una generalización del Teorema 1.33 para matrices.

Teorema 2.5. *Sea $T = (T_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$. Supongamos que T satisface las siguientes propiedades:*

1. *$T_{ij} \in \mathbb{R}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$;*

2. *existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{i_0 i_0} = 0$, con $T_{i_0 n} \neq 0$, para todo $n \neq i_0$;*

3. *si $T^{[i_0]}$ es el operador T con ceros en su i_0-ésima columna e i_0-ésima fila, entonces*

$$\|c_{i_0}(T)\| \geq \left\|T^{[i_0]}\right\|,$$

4. *si los T_{nn} cumplen que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \neq i_0$:*

$$T_{nn} = -\frac{\langle c_{i_0}(T), c_n(T)\rangle}{T_{i_0 n}},$$

(lo que implica que todas las columnas de T son ortogonales a la i_0-ésima.)

Entonces T es minimal, es decir

$$\|T\| = \left\|c_{i_0}(T)\right\| = \inf_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|T+D\|\,.$$

Y más aún, $D = \operatorname{Diag}\big(\{T_{nn}\}_{n\in\mathbb{N}}\big)$ es el único operador diagonal acotado minimal para T.

Demostración. Sin pérdida de generalidad T es un operador acotado con coeficientes reales T_{ij} y además $i_0 = 1$, de modo que matricialmente se ve representado de la siguiente manera

$$T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} & T_{14} & \cdots \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & \cdots \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & T_{34} & \cdots \\ T_{14} & T_{24} & T_{34} & T_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Las hipótesis que verifica dicho T son las siguientes:

- $i_0 = 1$ con $T_{1n} \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$.
- $\|c_1(T)\| \geq \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & T_{22} & T_{23} & T_{24} & \cdots \\ 0 & T_{23} & T_{33} & T_{34} & \cdots \\ 0 & T_{24} & T_{34} & T_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{=T^{[1]}} \right\| = \left\|T^{[1]}\right\|.$
- Cada T_{nn} cumple que

$$T_{nn} = -\frac{\langle c_1(T), c_n(T)\rangle}{T_{1n}} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} - \{1\}\,.$$

Algunas observaciones que podemos hacer son las siguientes:

1. Primero notemos que para $i \in \mathbb{N}$

$$|T_{ii}| = \left|\left\langle T^{[1]}e_i, e_i\right\rangle\right| \leq \left\|T^{[1]}e_i\right\| \|e_i\| \leq \left\|T^{[1]}\right\| \leq \|c_1(T)\| < \infty,$$

   con lo cual, $(T_{ii})_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión numérica acotada. Además cada T_{ii} es el elemento en la diagonal de $T^{[1]}$ en la base prefijada.

2. Un simple cálculo nos permite mostrar que $\|c_1(T)\|$ y $-\|c_1(T)\|$ son autovalores de T con autovectores

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}\,\|c_1(T)\|}\left(\|c_1(T)\|\, e_1 + c_1(T)\right)$$

   y

$$v_- = \frac{1}{\sqrt{2}\,\|c_1(T)\|}\left(\|c_1(T)\|\, e_1 - c_1(T)\right),$$

   respectivamente. Consideremos el espacio $V = Gen\,\{v_+, v_-\}$:

   - $Tw = v \in V$ (de hecho, V es subespacio invariante por T) y si $w = \alpha v_+ + \beta v_-$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|Tw\|^2 = \|T(\alpha v_+ + \beta v_-)\|^2 = \|\alpha\,\|c_1(T)\|\, v_+ - \beta\,\|c_1(T)\|\, v_-\|^2$$

$$= |\alpha|^2\,\|c_1(T)\|^2 + |\beta|^2\,\|c_1(T)\|^2 = \|c_1(T)\|^2\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)$$

$$= \|c_1(T)\|^2\,\|w\|^2.$$

- $Ty = \begin{pmatrix} 0 & c_1^t(T_r) \\ c_1(T_r) & T_1 + D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T^{[1]} y_1 \end{pmatrix}$, con

$$\|Ty\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ T^{[1]} y_1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| T^{[1]} y_1 \right\| \leq \left\| T^{[1]} \right\| \|y_1\| .$$

Entonces, para cada $x = w + y \in \mathcal{H}$, con $w \in V$ e $y \in V^{\perp}$:

$$\|Tx\|^2 = \|T(w+y)\|^2 = \|Tw\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\, Re\, \langle Tw, Ty \rangle$$

$$= \|Tw\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\, Re\, \langle Tv, y \rangle$$

$$= \|Tw\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\, Re\, \langle av_+ + bv_-, y \rangle$$

$$= \|Tw\|^2 + \|Ty\|^2 .$$

$$\Rightarrow \|T(w+y)\|^2 = \|Tw\|^2 + \|Ty\|^2$$

$$\leq \|c_1(T)\|^2 \|w\|^2 + \left\| T^{[1]} \right\|^2 \|y_1\|^2 \leq \|c_1(T)\|^2 \|x\|^2 .$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = \|c_1(T)\| .$$

3. Sea $D' \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ un operador diagonal cualquiera y definimos T', operador dado por $T'(e_i) = (T + D')e_i = c_i(T')$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Analicemos las siguientes posibilidades para D':

   - Si $D'_{11} \neq 0$ entonces

$$\left\| T'(e_1) \right\|^2 = \left\| c_1(T') \right\|^2 = \left| D'_{11} \right|^2 + \|c_1(T)\|^2 > \|c_1(T)\|^2 = \|T\|^2$$

$$\Rightarrow \|T'\| > \|T\| .$$

De modo que podemos asumir que si $T + D'$ es minimal entonces $D'_{11} = 0$.

- Supongamos que existiera $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$, tal que D' no tiene su i-ésima columna ortogonal a la primera, esto es:

$$\langle T'e_1, T'e_i \rangle = \langle c_1(T'), c_i(T') \rangle = a_i \neq 0.$$

Entonces,

$$T'\left(\frac{c_1(T)}{\|c_1(T)\|}\right) = \left(\|c_1(T)\|, \frac{a_2}{\|c_1(T)\|}, \dots, \frac{a_i}{\|c_1(T)\|}, \dots\right)$$

$$\Rightarrow \left\|T'(c_1(T))\right\|^2 > \|c_1(T)\|^2 = \|T\| .$$

Por lo tanto, $\|T'\| > \|T\|$.

Finalmente, $D = \text{Diag}(\{T_{nn}\}_{n\in\mathbb{N}})$ es el único operador diagonal minimal para T y es acotado.

□

Notemos que el operador diagonal obtenido en el Teorema 2.5 es claramente acotado pero no sabemos si es compacto. Una pregunta natural e interesante es si existe algún operador compacto simétrico T que cumpla las hipótesis del Teorema 2.5 y que tenga una diagonal minimal no compacta. Esto lo hemos trabajado y analizado con profundidad y los resultados se encuentran en el Capítulo 3.

Dado un operador compacto Hermitiano $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, la existencia de un único operador diagonal acotado real D_0 minimal para C no implica necesariamente que D_0 sea no compacto. Por otro lado, si existen infinitas diagonales acotadas reales para C, esto no significa que haya existencia de alguna de esas minimales que sea compacta.

En los siguientes ejemplos de operadores mostramos que la existencia (respectivamente, la no existencia) de una única diagonal minimal no necesariamente implica la no existencia (respectivamente, la existencia) de una diagonal minimal compacta.

1. Sea $L \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, $L \neq 0$, entonces $-L$ es el único operador diagonal minimal compacto para L. En este caso, podemos observar que hay unicidad para el minimal, pero el mejor aproximante es también compacto.

2. Consideremos el operador T_0, que definimos y estudiamos con profundidad en el Capítulo 3. T_0 tiene mejor aproximante diagonal acotado pero no compacto (ver la prueba de este hecho en el capítulo mencionado). Sea S el operador descripto en bloques $S = \begin{pmatrix} S_n & 0 \\ 0 & T_0 \end{pmatrix}$, con $S_n \in M_n^h(\mathbb{C})$ una matriz cuya norma cociente es $\|[T_0]\|$ y que tiene infinitas diagonales minimales de $n \times n$ (basta considerar matrices como las mencionadas en los artículos [6], [7] o [20]). Entonces, todos los operadores diagonales acotados para S son la forma $D' = \begin{pmatrix} D_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, con alguna de las infinitas diagonales minimales D_n para S_n y D el único operador diagonal minimal acotado (no compacto) para T. De este modo, ninguno de estos D' es compacto. Este caso muestra que la no unicidad de los diagonales minimales no necesariamente implica la existencia de operadores minimales diagonales compactos.

Capítulo 3

Operadores minimales con diagonales no compactas

3.1. Introducción

En este capítulo mostraremos dos familias de operadores compactos simétricos que no poseen mejor aproximante diagonal compacto Hermitiano. Las claves para probar la no existencia son el Teorema 2.5 y la unicidad del mejor aproximante diagonal acotado que estos operadores poseen. En el primer caso, se trata de un operador cuyas entradas $\{d_{ii}\}$ de la diagonal principal (respecto de una BON fija) cumplen que $d_{ii} \to l \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. En tanto que el segundo caso, el mejor aproximante diagonal resulta ser oscilante, es decir que los elementos en su diagonal principal poseen subsucesiones convergentes a diferentes límites.

3.2. Contraejemplo compacto

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal fija de éste. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $|\gamma| < 1$ y r un parámetro real positivo a determinar. Consideremos la siguiente matriz infinita descripta en la base ortonormal mencionada

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & r\gamma & r\gamma^2 & r\gamma^3 & r\gamma^4 & r\gamma^5 & \cdots \\ r\gamma & 0 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^2 & \gamma & 0 & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^3 & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^4 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & 0 & \gamma^4 & \cdots \\ r\gamma^5 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= r \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \gamma^5 & \cdots \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ 0 & \gamma & 0 & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ 0 & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 & \gamma^3 & \gamma^4 & \cdots \\ 0 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & 0 & \gamma^4 & \cdots \\ 0 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{T_0^{[1]}}.$$

$$T_0 = rL + T_0^{[1]}, r \in \mathbb{R}_{>0} \tag{3.2.1}$$

A continuación mencionaremos algunas propiedades que cumple el operador T_0.

Proposición 3.1. *Los operadores T_0 y $T_0^{[1]}$ son de tipo Hilbert-Schmidt.*

Demostración. Si $f_i(T_0)$ y $c_j(T_0)$ es la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima de T_0, respectivamente, entonces

- $(T_0^* T_0)_{11} = \langle f_1(T_0), c_1(T_0)\rangle = \langle rc_1(L), rc_1(L)\rangle = r^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{2k}\right)$

$$= r^2 \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} < \infty.$$

- $(T_0^*T_0)_{22} = \langle f_2(T_0), c_2(T_0)\rangle = \langle c_2(T_0), c_2(T_0)\rangle = r^2\gamma^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{2k}$

$$= r^2\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} < \infty.$$

- $(T_0^*T_0)_{33} = \langle f_3(T_0), c_3(T_0)\rangle = \langle c_3(T_0), c_3(T_0)\rangle = r^2\gamma^4 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{2k}$

$$= r^2\gamma^4 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} < \infty.$$

- Inductivamente para cada $n \geq 3$:

$$(T_0^*T_0)_{nn} = \langle f_n(T_0), c_n(T_0)\rangle = \langle c_n(T_0), c_n(T_0)\rangle$$

$$= r^2\gamma^{2(n-1)} + (n-2)\gamma^{2(n-2)} + \sum_{k=n-1}^{\infty} \gamma^{2k}$$

$$= r^2\gamma^{2(n-1)} + (n-2)\gamma^{2(n-2)} + \frac{\gamma^{-2+2n}}{1-\gamma^2} < \infty.$$

Luego,

$$tr(T_0^*T_0) = tr(T_0^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(T_0^*T_0)_{nn}$$

$$= r^2\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} + r^2\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\left[r^2\gamma^{2(n-1)} + (n-2)\gamma^{2(n-2)} + \frac{\gamma^{2n-2}}{1-\gamma^2}\right]$$

$$= r^2\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} + r^2\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} + \sum_{n=3}^{\infty} r^2\gamma^{2(n-1)} + \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)\gamma^{2(n-2)} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\gamma^{2n-2}}{1-\gamma^2}$$

$$= r^2\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} + r^2\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} + \frac{r^2}{1-\gamma^2} + \frac{-\gamma^2+2\gamma^4}{\gamma^4(1-\gamma^2)^2} + \frac{1}{(1-\gamma^2)^2} < \infty.$$

Además, $T_0^{[1]} \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ pues

$$tr\left((T_0^{[1]})^* T_0^{[1]}\right) = tr\left((T_0^{[1]})^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((T_0^{[1]})^2\right)_{nn} = \sum_{n=2}^{\infty}(T_0^2)_{nn} \leq tr(T_0^2) < \infty.$$

$\square$

Luego, T_0 y $T_0^{[1]}$ son operadores de Hilbert-Schmidt y además resultan ser compactos y simétricos. Por lo tanto, cada columna (y fila) de T_0 (y de $T_0^{[1]}$) forman una sucesión de $\ell^2(\mathbb{R})$.

Proposición 3.2. *$T_0 \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ y es un operador positivo.*

Demostración. Recordemos que $T_0 = rL + T_0^{[1]}$.

El operador rL tiene rango finito pues

$$Ran(L) = Gen\,\{rL(e_i)\}_{i\in\mathbb{N}} = Gen\,\{c_1(L), c_2(L)\}$$

y esto vale pues $c_j(L) = \gamma^{j-2}c_2(L)$ para todo $j > 2$. Por lo tanto, $rL \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.

Si consideramos el operador $C_a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definido matricialmente como

$$C_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a^2 & a^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a^3 & a^3 & a^3 & 0 & 0 & \cdots \\ a^4 & a^4 & a^4 & a^4 & 0 & \cdots \\ a^5 & a^5 & a^5 & a^5 & a^5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$C_a^* C_a = \frac{1}{1-a^2} \begin{pmatrix} a^2 & a^4 & a^6 & a^8 & a^{10} & \cdots \\ a^4 & a^4 & a^6 & a^8 & a^{10} & \cdots \\ a^6 & a^6 & a^6 & a^8 & a^{10} & \cdots \\ a^8 & a^8 & a^8 & a^8 & a^{10} & \cdots \\ a^{10} & a^{10} & a^{10} & a^{10} & a^{10} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si $a = \sqrt{\gamma}$ (por simplicidad consideraremos $\gamma \geq 0$), entonces

$$C_{\sqrt{\gamma}}^* C_{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{1-\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \gamma^5 & \cdots \\ \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 & \gamma^5 & \cdots \\ \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^4 & \gamma^5 & \cdots \\ \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^4 & \gamma^5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\gamma} R_1$$

Entonces

$$tr(|R_1|) = (1-\gamma) tr\left(\left| C_{\sqrt{\gamma}}^* C_{\sqrt{\gamma}} \right| \right) = (1-\gamma) tr\left(C_{\sqrt{\gamma}}^* C_{\sqrt{\gamma}} \right) = tr(R_1)$$

Lo cual muestra que $R_1 \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, ya que $tr\left(C_{\sqrt{\gamma}}^* C_{\sqrt{\gamma}} \right) < \infty$. Con esto, $rL + \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & R_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Pero además $rL + \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & R_1 \end{pmatrix} - \text{Diag}(R_1) = T_0$, que es equivalente a decir que $rL + \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & R_1 \end{pmatrix}$ está en la misma clase de T_0 tomando el espacio cociente $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} / \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$, ya que difieren tan sólo en la diagonal. Como $\text{Diag}(R_1) \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, entonces $T_0 \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Más aún, como $T_0^{[1]}$ y L son positivos, se deduce que T_0 es también positivo. □

Proposición 3.3. *Sea $T_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, el operador definido en 3.2.1. Entonces existe un único operador diagonal $D_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que*

1. $(T_0 + D_0)_{11} = 0$.

2. $\langle C_1(T_0 + D_0), C_i(T_0 + D_0) \rangle = 0$, *para cada $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$.*

Demostración. En primer lugar, observemos que cualquier operador diagonal acotado D_0 se puede escribir como

$$D_0 = \operatorname{Diag}\left(\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

con la condición de que la sucesión numérica $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sea acotada en $\mathbb{R}$. Ahora bien, fijemos que los d_k cumplan:

- $d_1 = 0$.

- $\langle c_1(T_0 + D_0), c_2(T_0 + D_0) \rangle = 0 \iff r\gamma d_2 + \sum_{j=2}^{\infty} r\gamma^{2j-1} = 0$

$$\iff d_2 = -\frac{\sum_{j=2}^{\infty} \gamma^{2j-1}}{\gamma} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1}.$$

- $\langle c_1(T_0 + D_0), c_3(T_0 + D_0) \rangle = 0 \iff r\gamma\gamma + r\gamma^2 d_3 + \sum_{j=3}^{\infty} r\gamma^{2j-1} = 0$

$$\iff d_3 = -\frac{\gamma^2 + \sum_{j=3}^{\infty} \gamma^{2j-1}}{\gamma^2} = -1 - \frac{\gamma^3}{1 - \gamma^2}.$$

- $\langle c_1(T_0 + D_0), c_4(T_0 + D_0)\rangle = 0 \iff r\gamma\gamma^2 + r\gamma^2\gamma^2 + r\gamma^3 d_4 + \sum_{j=4}^{\infty} r\gamma^{2j-1} = 0$

$$\iff d_4 = -\frac{\gamma^3 + \gamma^4 + \sum_{j=4}^{\infty} \gamma^{2j-1}}{\gamma^3} = -1 - \gamma - \frac{\gamma^5}{1-\gamma^2}.$$

- En general, dado $k \in \mathbb{N}$, $k > 3$ queda determinado d_k unívocamente:

$$d_k = -\frac{\gamma^{k-1} + \gamma^k + \ldots + \gamma^{k+(k-2)} + \sum_{j=k}^{\infty} \gamma^{2j-1}}{\gamma^{k-1}}$$

$$= -\left[1 + \gamma + \gamma^2 + \ldots + \gamma^{k-3} + \sum_{j=k}^{\infty} \gamma^{2j-k}\right].$$

$$d_k = -\sum_{j=0}^{k-3} \gamma^j - \frac{\gamma^k}{1-\gamma^2} = -\frac{1-\gamma^{k-2}}{1-\gamma} - \frac{\gamma^k}{1-\gamma^2}. \tag{3.2.2}$$

Entonces, $D_0 = \mathrm{Diag}\left(\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}\right)$ cumple las condiciones de la proposición. Además, queda $\{d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ determinada de forma unívoca por la construcción misma de la sucesión. De modo que D_0 es el único operador diagonal acotado que cumple con las hipótesis del enunciado.

□

De la última línea se desprende que $d_k \to \dfrac{1}{\gamma - 1}$ cuando $k \to \infty$, de modo que el operador D_0 diagonal es acotado pero no compacto.

Por otro lado, si fijamos la siguiente condición sobre el parámetro r

$$r \geq \frac{\left\| T_0^{[1]} + D_0 \right\|}{\|c_1(L)\|},$$

entonces el operador $T_0 + D_0$ cumple

$$\|C_1(T_0 + D_0)\| = \|rC_1(L)\| = r\,\|C_1(L)\| > \left\| T_0^{[1]} + D_0 \right\|.$$

Esto, sumado a lo que verifica por la Proposición 3.3, hace que $T_0 + D_0$ se encuentre en las condiciones del Teorema 2.5 y, por lo tanto, sea un operador minimal, es decir

$$\|[T_0]\| = \operatorname*{ínf}_{D \in \mathcal{D}\left(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h\right)} \|T_0 + D\| = \|T_0 + D_0\| .$$

Con lo cual concluimos lo siguiente.

Corolario 3.4. *El operador T_0 no tiene mejor aproximante diagonal compacto.*

3.3. Operadores con diagonal minimizante oscilante

Siguiendo una idea similar a la abordada en la sección anterior, consideremos ahora el siguiente operador $S_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ descripto matricialmente en términos de la base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ prefijada

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\delta & \gamma & -\delta^2 & \gamma^2 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ -\delta & 0 & \gamma & -\delta^2 & \gamma^2 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ \gamma & \gamma & 0 & -\delta^2 & \gamma^2 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ -\delta^2 & -\delta^2 & -\delta^2 & 0 & \gamma^2 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ -\delta^3 & -\delta^3 & -\delta^3 & -\delta^3 & -\delta^3 & 0 & \gamma^3 & \cdots \\ \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ con } \gamma, \delta \in (0,1). \quad (3.3.1)$$

No resulta difícil ver que

$$(S_0^* S_0)_{11} = (S_0^* S_0)_{22} = \frac{\gamma^4}{1-\gamma^2} + \frac{\delta^2}{1-\delta^2},$$

y para cada $n \geq 3$

$$(S_0^* S_0)_{nn} = \begin{cases} (n-1)\delta^n + \frac{\gamma^n}{1-\gamma^2} + \frac{\delta^{n+2}}{1-\delta^2} & \text{si} \quad n = 2k \\ (n-1)\gamma^n + \frac{\gamma^{n+1}}{1-\gamma^2} + \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta^2} & \text{si} \quad n = 2k-1. \end{cases}$$

Con lo cual, se sigue que

$$tr(S_0^* S_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (S_0^* S_0)_{nn}$$

$$= (S_0^* S_0)_{11} + (S_0^* S_0)_{22} + \sum_{k=2}^{\infty} (S_0^* S_0)_{(2k)(2k)} + \sum_{k=2}^{\infty} (S_0^* S_0)_{(2k-1)(2k-1)}$$

$$= 2\frac{\gamma^4}{1-\gamma^2} + 2\frac{\delta^2}{1-\delta^2} + \frac{2\left(\gamma^3 - 2\gamma^3\delta^2 + (2+\gamma(-2+\gamma(-2+3\gamma)))\delta^4\right)}{(-1+\gamma)^2(1+\gamma)\left(-1+\delta^2\right)^2} < \infty.$$

Luego, $S_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ dado que hemos probado que S_0 es un operador de Hilbert-Schmidt.

Sea $D' = \operatorname{Diag}\left(\{d'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ el único operador diagonal tal que

$$d'_1 = 0 \text{ y } \left\langle c_1(S_0), c_n(S_0 + D')\right\rangle = 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}. \tag{3.3.2}$$

De esta forma, queda unívocamente determinado cada d'_n. La condición (3.3.2) implica que $\{d'_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{d'_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{d'_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con

$$d'_{2k} = -\gamma\left(\sum_{j=0}^{k-2} \gamma^j\right) + \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^k \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} + \sum_{j=1}^{k-1} \delta^j + \frac{\delta^{k+2}}{1-\delta^2}$$

y

$$d'_{2k-1} = \delta\left(\sum_{j=0}^{k-2} \delta^j\right) - \left(\frac{\delta^2}{\gamma}\right)^k \frac{\gamma}{1-\delta^2} - \sum_{j=1}^{k-2} \gamma^j + \frac{\gamma^{k+1}}{1-\gamma^2}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Para que D' sea acotado, es necesario que ambas sucesiones, $\{d'_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{d'_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sean al menos acotadas. Por ello, las analizaremos por separado:

- Subsucesión de términos pares $\{d'_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$: cuando $k \to \infty$, se sigue que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k-2} \gamma^j \to \frac{1}{1-\gamma} \\ \sum_{j=1}^{k-1} \delta^j \to \frac{\delta}{1-\delta} \\ \delta^{k+2} \to 0. \end{cases}$$

  Entonces para que $\{d'_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sea acotada es necesario que $\left\{\frac{\gamma^{2k}}{\delta^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ sea convergente:

$$\frac{\gamma^{2k}}{\delta^k} = \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^k \to l < \infty \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\delta} \leq 1 \Leftrightarrow \gamma^2 \leq \delta. \tag{3.3.3}$$

- Subsucesión de términos impares $\{d'_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$: cuando $k \to \infty$ se sigue que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k-2} \delta^j \to \frac{1}{1-\delta} \\ \sum_{j=1}^{k-1} \gamma^j \to \frac{\gamma}{1-\gamma} \\ \gamma^{k+1} \to 0. \end{cases}$$

  Entonces para que $\{d'_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sea acotada es necesario que $\left\{\frac{\delta^{2k}}{\gamma^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ sea convergente:

$$\frac{\delta^{2k}}{\gamma^k} = \left(\frac{\delta^2}{\gamma}\right)^k \to l < \infty \Leftrightarrow \frac{\delta^2}{\gamma} \leq 1 \Leftrightarrow \delta^2 \leq \gamma. \tag{3.3.4}$$

Observación 3.5. *Sea S_0 el operador compacto definido en (3.3.1) con $\gamma, \delta \in (0,1)$. Si se cumplen las condiciones (3.3.3) y (3.3.4) simultáneamente, entonces el par (γ, δ) cumple*

$$\gamma^2 \leq \delta \leq \gamma^{1/2}. \tag{3.3.5}$$

y la región de validez es la de la figura 3.1. En consecuencia, el operador D' es acotado dado que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|(D')_{nn}\right| = \text{máx}\{\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|d'_{2k}\right| ; \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|d'_{2k-1}\right|\} < \infty.$$

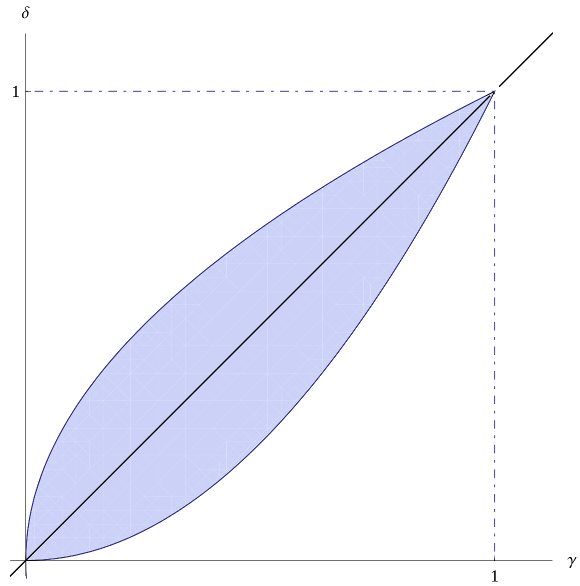

Figura 3.1: Región δ, γ

Observación 3.6. *Existen operadores cuya diagonal minimizante acotada es oscilante y, por ende, no compacta. Más aún se pueden hallar ejemplos de operadores minimales cuyos elementos en la diagonal tengan tantas subsucesiones convergentes a distintos límites como se quiera.*

3.3.1. Comentarios sobre la condición (3.3.5) y la Observación 3.5

1. Si las desigualdades de (3.3.5) resultan ser estrictas, se sigue que

$$d_{2k} \to \frac{-\gamma}{1-\gamma} + \frac{\delta}{1-\delta} \text{ y } d_{2k-1} \to \frac{-\gamma}{1-\gamma} + \frac{\delta}{1-\delta},$$

cuando $k \to \infty$.

2. Lo anterior se puede generalizar de la siguiente manera: para $\delta, \gamma \in (0,1)$ tal que se cumple la condición (3.3.5) vale que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} d_{2k} - d_{2k-1} &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\gamma^2}{\delta}\right)^k \frac{1}{1-\gamma^2} + \left(\frac{\delta^2}{\gamma}\right)^k \frac{\gamma}{1-\delta^2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma^2 < \delta < \gamma^{1/2} \\ \frac{1}{1-\gamma^2} & \text{si } \gamma^2 = \delta < \gamma^{1/2} \\ \frac{\gamma}{1-\delta^2} & \text{si } \gamma^2 < \delta = \gamma^{1/2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Es decir, que cuando $\gamma^2 < \delta < \gamma^{1/2}$ los límites de $\{d'_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{d'_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ coinciden, en tanto para los otros dos casos no. Con esto, deducimos que si $\gamma^2 = \delta < \gamma^{1/2}$ ó $\gamma^2 < \delta = \gamma^{1/2}$ el operador D' es acotado pero oscilante, ya que no existe $\lim\limits_{n\to\infty} D'_{nn}$.

3. Para el caso particular $\gamma = 1/2$, $\delta = 1/4$, notemos que $(1/2)^2 = 1/4 < 1/2$. Además

$$\frac{-\gamma}{1-\gamma} + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{-1/2}{1-1/2} + \frac{1/4}{1-1/4} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

y $\frac{1}{1-\gamma^2} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$. Luego, cuando $k \to \infty$

$$d_{2k} \to -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

y

$$d_{2k-1} \to -\frac{2}{3}.$$

Capítulo 4

Aproximaciones con matrices

4.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo es mostrar resultados de convergencia de sucesiones a los operadores T_0, $T_0 + D_0$, siendo T_0 y D_0 los definidos en el Capítulo 3, y $T_0 + D_0 + \lambda I$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. Asimismo, construimos una sucesión de matrices diagonales minimizantes que convergen SOT a D_0.

Este tipo de resultados nos servirán luego para la construcción de una sucesión de curvas minimales de matrices que convergen uniformemente a otra de longitud mínima, la cual no proviene de un elemento minimal en $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$. Esto lo estudiamos en el Capítulo 6.

4.2. Aproximaciones con matrices

Sea T_0 el operador Hermitiano definido en (3.2.1), dado por

$$T_0 = r \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 & \cdots \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma^3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma^2 & \cdots \\ 0 & \gamma & 0 & \gamma^2 & \cdots \\ 0 & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{T_0^{[1]}} = rL + T_0^{[1]}.$$

Sea D_0 el único operador diagonal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que se cumplan las siguientes afirmaciones:

1. $(T_0 + D_0)_{11} = 0$.
2. $\langle C_1(T_0 + D_0), C_i(T_0 + D_0)\rangle = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$, $i > 1$.

En la Proposición 3.3 hemos probado la existencia y unicidad de D_0 para T_0 determinando explícitamente a los elementos d_i de la diagonal principal de D_0. Si además se cumple que

$$r \geq \frac{\left\| T_0^{[1]} + D_0 \right\|}{\|c_1(L)\|},$$

se sigue que $T_0 + D_0$ es minimal.

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la proyección ortogonal P_n sobre el subespacio de $\mathcal{H}$ generado por el conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$. Definimos los siguientes operadores de rango finito

$$T_n = r_n P_n L P_n + P_n T_0^{[1]} P_n, \tag{4.2.1}$$

con $r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ un parámetro a fijar para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ un operador diagonal $D_n = \mathrm{Diag}(\{d_k^{(n)}\})$ tal que

1. $d_1^{(n)} = 0$;

2. $\langle c_1(T_n + D_n), c_k(T_n + D_n)\rangle = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$;

3. $d_k^{(n)} = 0$, para todo $k > n$.

Luego, si tomamos por convención que $\sum_{j=0}^{2-3} \gamma^j = 0 = \sum_{j=n}^{n-1} \gamma^{2j-n+1}$, cada $d_k^{(n)}$ queda unívocamente determinado como

$$D_n = \text{Diag}\left(\{d_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}\right) \;/\; \left\{ \begin{array}{l} d_k^{(n)} = -\sum_{j=0}^{k-3} \gamma^j - \sum_{j=k}^{n-1} \gamma^{2j-k} < 0 \\ d_k^{(n)} = 0 \text{ para cada } k \in \mathbb{N} - \{2; 3; ...; n\}. \end{array} \right. \tag{4.2.2}$$

La prueba de este hecho es por inducción sobre los índices k para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que la elección de cada $d_k^{(n)}$ resulta independiente del parámetro r_n.

A continuación mostramos un lema que utilizamos luego para probar la minimalidad de cada $T_n + D_n$ como matrices.

Lema 4.1. *Sean $T_n = r_n P_n L P_n + P_n T_0^{[1]} P_n$ y D_n los operadores definidos para cada $n \in \mathbb{N}$ en (4.2.1) y (4.2.2), respectivamente. Entonces*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| P_n T_0^{[1]} P_n + D_n \right\| < \infty.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, entonces

$$\left\| P_n T_0^{[1]} P_n + D_n \right\| \leq \left\| P_n T_0^{[1]} P_n \right\| + \|D_n\| \leq \|P_n\|^2 \left\| T_0^{[1]} \right\| + \sup_{1\leq k\leq n} \left| d_k^{(n)} \right|$$

$$\leq \left\| T_0^{[1]} \right\| + \left| d_n^{(n)} \right| \leq \left\| T_0^{[1]} \right\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| d_n^{(n)} \right| \leq \left\| T_0^{[1]} \right\| + \|D_0\| < \infty.$$

□

Como consecuencia de este lema, existe una constante $M_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que:

$$M_0 = \text{máx}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|P_n T_0^{[1]} P_n + D_n\right\|; \left\|T_0^{[1]} + D_0\right\|\right\}. \tag{4.2.3}$$

Con esto, estamos en condiciones de probar la minimalidad de cada $T_n + D_n$.

Proposición 4.2. *Sean $T_n = r_n P_n L P_n + P_n T_0^{[1]} P_n$ y D_n los operadores definidos para cada $n \in \mathbb{N}$ en (4.2.1) y (4.2.2), respectivamente. Consideremos la constante real M_0 dada en (4.2.3) y fijemos $r_n = \frac{M_0}{\|c_1(P_n L P_n)\|}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador $T_n + D_n$ resulta ser minimal en $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, esto es*

$$\|[T_n]\| = \inf_{\widetilde{D_n}\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \left\|T_n + \widetilde{D_n}\right\| = \|T_n + D_n\| = M_0.$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar a $T_n + D_n$ como una matriz de $n \times n$. Entonces

- $d_1^{(n)} = 0$;
- $\langle c_1(T_n + D_n), c_j(T_n + D_n)\rangle = 0$, para cada $j \in \mathbb{N}$, $2 \le j \le n$;
- $\|c_1(T_n + D_n)\| = \|c_1(T_n)\| = r_n \|c_1(P_n L P_n)\| = M_0 \ge \left\|P_n T_0^{[1]} P_n + D_n\right\|$.

Por lo tanto, si aplicamos el Teorema 1.33, D_n resulta ser la única matriz diagonal minimizante de $n \times n$ para T_n. Dado que se cumple

$$\text{ínf}_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|T_n + D\| = \text{mín}_{\widetilde{D_n}\in\mathcal{D}(M_n^h(\mathbb{C}))} \left\|T_n + \widetilde{D_n}\right\|,$$

se sigue que

$$\|[T_n]\| = \|T_n + D_n\|.$$

$\square$

También podemos observar que la norma del operador minimal $T_n + D_n$ es M_0 para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observación 4.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|T_n + D\| = \min_{D' \in \mathcal{D}(M_n^h(\mathbb{C}))} \|T_n + D'\| = \|T_n + D_n\|,$$

pero no hay unicidad en $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ aún cuando sí la hubiere en $\mathcal{D}(M_n^h(\mathbb{C}))$. En efecto, cada operador por bloques de la forma $C_n = \begin{pmatrix} D_n & 0 \\ 0 & D_c \end{pmatrix}$, con D_c diagonal y tal que $\|D_c\| \leq \|c_1(T_n)\|$ satisface

$$\|T_n + C_n\| = \max\{\|T_n + D_n\|; \|D_c\|\} = \|T_n + D_n\| = \|[T_n]\|.$$

Reconsideremos el operador $T_0 = rL + T_0^{[1]}$ pero ahora fijando $r = \frac{M_0}{\|c_1(L)\|}$. Notemos que

$$\frac{\left\|T_0^{[1]} + D_0\right\|}{\|c_1(L)\|} \leq r < \infty,$$

donde la desigualdad de la derecha vale por el Lema 4.1. Entonces, $T_0 + D_0$ satisface las hipótesis del Teorema 2.5 y es un operador minimal con D_0, el único operador diagonal acotado (no compacto) tal que

$$\|[T_0]\| = \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|T_0 + D\| = \|T_0 + D_0\|.$$

Más aún,

$$\|[T_0]\| = \|c_1(T_0 + D_0)\| = \|c_1(T_0)\| = M_0.$$

Por lo tanto,

$$\|[T_0]\| = \|[T_n]\| \tag{4.2.4}$$

Los próximos dos resultados vinculan al operador T_0 con la sucesión de operadores $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Lema 4.4. *Sea $r_n = \frac{M_0}{\|c_1(P_nLP_n)\|}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo P_n, L los operadores definidos en (4.2.1) y M_0 la constante real fijada en (4.2.3). Entonces, $r_n \to r$, cuando n tiende a ∞.*

Demostración. Como vale lo siguiente:

$$\|c_1(T_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \gamma^{2i}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ y } \|c_1(T_0)\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma^{2i}\right)^{\frac{1}{2}},$$

la demostración se concluye con facilidad. □

Proposición 4.5. *Sean $T_0 = rL + T^{[1]}$, el operador definido en (3.2.1) con $r = \frac{M_0}{\|c_1(T_0)\|}$, y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ la familia de operadores de rango finito definida en (4.2.1). Si $r_n \to r$ cuando $n \to \infty$ entonces $T_n \to T_0$ en norma de operadores.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1 \Rightarrow |r_n - r| < \epsilon$. Además la sucesión es acotada, de modo que existe $M_1 > 0$ tal que $|r_n| \leq M_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, L y $T_0^{[1]}$ son operadores de tipo Hilbert-Schmidt (ver Proposiciones 3.2 y 3.1, respectivamente), lo cual implica que pueden aproximarse por sus compresiones de rango finito. Entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_2 \Rightarrow \|L - P_nLP_n\| < \epsilon$$

y

$$n \geq n_2 \Rightarrow \left\|T_0^{[1]} - P_nT_0^{[1]}P_n\right\| < \epsilon.$$

Por lo tanto, para cada $n \geq n_0 = \text{máx}\{n_1; n_2\}$

$$\begin{aligned} \|T_0 - T_n\| &= \left\| rL + T_0^{[1]} - r_n P_n L P_n - P_n T_0^{[1]} P_n \right\| \\ &\leq \|rL - r_n P_n L P_n\| + \left\| T_0^{[1]} - P_n T_0^{[1]} P_n \right\| \\ &\leq |r - r_n| \, \|L\| + \|r_n\| \, \|L - P_n L P_n\| + \left\| T_0^{[1]} - P_n T_0^{[1]} P_n \right\| \\ &< \epsilon \, \|L\| + M_1 \epsilon + \epsilon = \epsilon \left(\|L\| + M_1 + 1 \right). \end{aligned}$$

Concluimos que $\|T_n - T_0\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Observemos que la sucesión numérica de $\{d_k^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ converge a d_k cuando $n \to \infty$. En efecto, si $n \to \infty$

$$d_k^{(n)} \searrow -\sum_{j=0}^{k-3} \gamma^j - \sum_{j=k}^{\infty} \gamma^{2j-k} = -\sum_{j=0}^{k-3} \gamma^j - \frac{\gamma^k}{1 - \gamma^2} = d_k.$$

Por consiguiente, la sucesión de operadores diagonales $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente al único $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$ minimizante (no compacto) de T_0.

Proposición 4.6. *Sean T_0 el operador definido en (3.2.1) y D_0 el único operador diagonal acotado tal que*

$$\|T_0 + D_0\| < \|T_0 + D\| \quad \text{para todo } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h).$$

Consideremos la sucesión de operadores diagonales de rango finito $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cuyo término general está definido en (4.2.2). Entonces

$$D_n \to D_0$$

en la topología fuerte de operadores.

Demostración. Sean $x \in \mathcal{H}$ y $\epsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|d_k^{(n)} - d_k\right| = \begin{cases} \left|\sum_{j=n}^{\infty} \gamma^{2j-k}\right| & si\ k \leq n \\ |d_k| \ si\ k > n. \end{cases}$$

Si $k \leq n$ y $|\gamma| \leq 1$, la serie $\sum_{j=n}^{\infty} \gamma^{2j-k}$ resulta convergente y entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{j=n}^{\infty} \gamma^{2j-k}\right| < \epsilon.$$

Si $k > n$, entonces $|d_k| \leq \|D_0\|$. Luego,

$$\|(D_n - D_0)\, x\|^2 = \langle (D_n - D_0)\, x, (D_n - D_0)\, x\rangle$$

$$\leq \epsilon^2 \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 + \|D_0\|^2 \sum_{i=n}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 .$$

Los valores $\langle x, e_i\rangle$ son las coordenadas de x en la base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, de modo que $\{\langle x, e_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ conforma una sucesión en ℓ^2. Luego, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \sum_{i=n}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2 < \epsilon^2.$$

Finalmente, para cada $n \geq \text{máx}\{n_0; n_1\}$

$$\|(D_n - D_0)\, x\|^2 < \epsilon^2 \|x\|^2 + \|D_0\|^2 \epsilon^2 = \epsilon^2 \left(\|x\|^2 + \|D_0\|\right),$$

y esto vale para cada $x \in \mathcal{H}$ fijo. □

Notemos que las Proposiciones 4.5 y 4.6 implican que $T_n + D_n$ tiende a $T_0 + D_0$ en la topología fuerte de operadores. Dado que $D_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ para todo n y $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}) - \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, dicha convergencia no puede ser en norma de operadores. Lo que probamos es que $T_n + D_n + \alpha I$ tiende a $T_0 + D_0 + \alpha I$ en norma de operadores, para un valor real α particular. Esto lo demostramos a continuación.

Proposición 4.7. *Sean $T_0, D_0, \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los operadores y sucesiones de operadores definidos previamente. Consideremos también los operadores $I_n = P_n I P_n = P_n$. Entonces*

$$T_n + D_n + \frac{1}{1-\gamma} I_n \to T_0 + D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I,$$

cuando $n \to \infty$ en norma de operadores.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, entonces

$$\left\| T_0 + D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I - T_n - D_n - \frac{1}{1-\gamma} I_n \right\|$$

$$\leq \|T_0 - T_n\| + \left\| D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I - D_n - \frac{1}{1-\gamma} I_n \right\|.$$

Por la Proposición 4.5, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|T_0 - T_n\| < \epsilon.$$

Nos focalizamos ahora en el segundo término. Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I - D_n - \frac{1}{1-\gamma} I_n \right\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| d_k + \frac{1}{1-\gamma} - d_k^{(n)} - \left(\frac{1}{1-\gamma} I_n \right)_{kk} \right|,$$

pero

$$\left| d_k + \frac{1}{1-\gamma} - d_k^{(n)} - \left(\frac{1}{1-\gamma} I_n \right)_{kk} \right| = \begin{cases} \left| \sum_{j=n}^{\infty} \gamma^{2j-k} \right| & si\ k \leq n \\ \left| d_k + \frac{1}{1-\gamma} \right| & si\ k > n \end{cases}.$$

Lo cual implica que existen dos posibilidades:

1. Si $k \leq n$, entonces $\left|d_k + \frac{1}{1-\gamma} - d_k^{(n)} - \left(\frac{1}{1-\gamma} I_n\right)_{kk}\right| = \left|\sum_{j=n}^{\infty} \gamma^{2j-k}\right|$. Se trata de una serie convergente, de modo que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_2 \Rightarrow \left|d_k + \frac{1}{1-\gamma} - d_k^{(n)} - \left(\frac{1}{1-\gamma} I_n\right)_{kk}\right| = \left|\sum_{j=n}^{\infty} \gamma^{2j-k}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

2. Si $k > n$, entonces $\left|d_k + \frac{1}{1-\gamma} - d_k^{(n)} - \left(\frac{1}{1-\gamma} I_n\right)_{kk}\right| = \left|d_k + \frac{1}{1-\gamma}\right|$. Como $d_k \to -\frac{1}{1-\gamma}$ cuando $k \to \infty$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_1 \Rightarrow \left|d_k + \frac{1}{1-\gamma}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

   Si $n \geq k_1$, se sigue que $k > n \geq k_1$ y

$$\left|d_k + \frac{1}{1-\gamma} - d_k^{(n)} - \left(\frac{1}{1-\gamma} I_n\right)_{kk}\right| = \left|d_k + \frac{1}{1-\gamma}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, existe $n_3 \in \mathbb{N}$ (por ejemplo, $n_3 = \text{máx}\{k_1; n_2\}$) tal que

$$n \geq n_3 \Rightarrow \left\|D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I - D_n - \frac{1}{1-\gamma} I_n\right\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

dado que para cada n

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left|d_k + \frac{1}{1-\gamma} - d_k^{(n)} - \left(\frac{1}{1-\gamma} I_n\right)_{kk}\right| = \text{máx}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{j=n}^{\infty} \gamma^{2j-k}\right|; \sup_{k>n} \left|d_k + \frac{1}{1-\gamma}\right|\right\}.$$

Finalmente, si $n_0 = \text{máx}\{n_1; n_3\}$ se deduce que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left\|T_0 + D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I - T_n - D_n - \frac{1}{1-\gamma} I_n\right\| < 2\epsilon,$$

lo cual implica que $T_n + D_n + \frac{1}{1-\gamma} I_n$ tiende a $T_0 + D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I$ cuando $n \to \infty$ en norma de operadores.

$\square$

En la demostración anterior obtuvimos también que la sucesión de operadores de rango finito $\{D_n + \frac{1}{1-\gamma} I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ en norma de operadores. Si bien es cierto que $T_n + D_n + \frac{1}{1-\gamma} I_n$ y $T_0 + D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I$ no son operadores minimales, nos serán de gran utilidad en la construcción de curvas de longitud mínima en la órbita unitaria de un operador compacto fijo A. Esto lo abordamos con profundidad en el Capítulo 6.

Capítulo 5

Caracterización y propiedades de operadores minimales

5.1. Introducción

En la primera sección de este capítulo, atendiendo al Problema 2 expuesto en el Capítulo 2, mostraremos una caracterización de la minimalidad basada en los resultados para matrices Hermitianas minimales análoga a la presentada en [2]. En la sección 5.3 abordaremos al Problema 1 (que también se encuentra en el Capitulo 2) en contextos un poco más generales, como por ejemplo cuando $\mathcal{A}$ es un álgebra de von Neumann y $\mathcal{B}$ es una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{A}$ que es imagen de una esperanza condicional.

5.2. Una caracterización de operadores minimales compactos

En el Capítulo 3 hemos exhibido ejemplos de operadores compactos que no poseen mejor aproximante diagonal compacto. En cada uno de los casos fue la unicidad del mejor aproximante diagonal la principal propiedad que utilizamos para demostrar la no existencia de diagonales minimizantes compactos.

Sin embargo, existen muchos otros operadores compactos que tienen al menos una mejor aproximación diagonal compacta, como los que hemos exhibido en el Capítulo 2, además de los de rango finito. Estos últimos tipos de operadores fueron estudiados en [1], [2], [7] y [20], entre otros. El propósito central que nos proponemos en esta sección es el de estudiar propiedades y equivalencias que caractericen a los operadores compactos minimales. Para ello, generalizaremos las principales ideas abordadas en [2].

Las primeras dos proposiciones se encuentran estrechamente relacionadas con el Teorema de Hahn-Banach para espacios de Banach y la relación entre el ideal $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ con su espacio dual, $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.

Proposición 5.1. *Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y consideremos el conjunto*

$$\mathcal{N} = \left\{ Y \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h : \; \|Y\|_1 = 1,\; tr(YD) = 0 \,, \forall\, D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h) \right\}. \tag{5.2.1}$$

Entonces, existe $Y_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\|[C]\| = \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = tr(Y_0 C). \tag{5.2.2}$$

Demostración. Si utilizamos el Teorema 1.20, el Corolario 1.21 y consideramos el hecho de que $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, entonces existe un funcional $\rho : \mathcal{K}(\mathcal{H})^h \to \mathbb{R}$ tal que $\|\rho\| = 1$, $\rho(D) = 0$, $\forall\, D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, y

$$\rho(C) = \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = \operatorname{dist}(C, \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)).$$

Cada funcional ρ del espacio dual de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ puede escribirse como $\rho(.) = \operatorname{tr}(Y_0 .)$, con $Y_0 \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, dado que $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* = \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ (ver el Corolario 1.19). Entonces

$$\rho(C) = \operatorname{tr}(Y_0 C) = \|[C]\|\,.$$

$\square$

Proposición 5.2 (Fórmula de dualidad de Banach). *Sean $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y $\mathcal{N}$ el conjunto definido en (5.2.1), entonces*

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h))} \|C + D\| = \max_{Y \in \mathcal{N}} |tr(CY)|\,. \tag{5.2.3}$$

Demostración. Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$. Por la Proposición 5.1, existe $Y_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = \operatorname{tr}(Y_0 C).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| &= \operatorname{tr}(Y_0 C) \le \max_{Y \in \mathcal{N}} |\operatorname{tr}(CY)| \\ &= \max_{Y \in \mathcal{N}} |\operatorname{tr}\left((C + D)Y\right)| \le \underbrace{\|Y\|_1}_{=1} \|C + D\|\,, \end{aligned}$$

para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$. La igualdad (5.2.3) es consecuencia de este último hecho.

$\square$

Observemos que si $Y \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ es un operador tal que $\operatorname{tr}(YD) = 0$ para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, entonces $\operatorname{tr}(YD) = 0$ para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$. Más aún, es fácil probar que si $\operatorname{tr}(YD) = 0$ para toda $D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$, entonces $\operatorname{Diag}(Y) = 0$.

A partir de que $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h) \subset \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$, resulta evidente el hecho de que

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| \le \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\|\,. \tag{5.2.4}$$

Observemos que siempre existe $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$ tal que

$$\|C + D_0\| = \operatorname*{ínf}_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(H))^h} \|C + D\| \, ,$$

puesto que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de von Neumann y $\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ es una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ver Teorema 1.44).

Con las propiedades recién mencionadas, estamos en condiciones de probar que en (5.2.4) vale la igualdad, como mostraremos en la siguiente proposición.

Proposición 5.3. *Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, entonces*

$$\operatorname*{ínf}_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = \operatorname*{ínf}_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| \, .$$

Demostración. Sea D_0 un operador diagonal minimizante acotado para C tal que

$$\operatorname*{ínf}_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^h} \|C + D\| = \|C + D_0\| \, .$$

Luego, la Proposición 5.1, establece la existencia de $Y_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\operatorname*{ínf}_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = |\mathrm{tr}(Y_0 C)| = |\mathrm{tr}(Y_0(C + D_0))| \leq \|C + D_0\| \, ,$$

lo cual completa la demostración.

$\square$

Un hecho bastante natural que vale para matrices minimales Hermitianas es la propiedad del espectro centrado: si $M \in M_n^h(\mathbb{C})$ y M es minimal entonces $\|M\|$ y $-\|M\|$ se encuentran en el espectro de M. Esta propiedad sigue valiendo para operadores compactos minimales Hermitianos, como lo probaremos a continuación.

Proposición 5.4 (Espectro centrado)**.** *Sea $C \in \mathcal{K}(H)^h$, $C \neq 0$. Supongamos que existe $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ tal que $C + D_1$ es minimal, entonces*

$$\pm\|C + D_1\| \in \sigma(C + D_1).$$

Demostración. Sea $C \in \mathcal{K}(H)^h$, $C \neq 0$, y supongamos que existe $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(H))^h$ tal que

$$0 < \lambda = \|C + D_1\| = \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\|.$$

Dado que $C + D_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, entonces $\lambda \in \sigma(C + D_1)$ ó $-\lambda \in \sigma(C + D_1)$. Supongamos que $\lambda \in \sigma(C + D_1)$. Si $-\lambda \notin \sigma(C + D_1)$ podemos tomar $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $-\lambda < \mu < \lambda$ y $\sigma(C + D_1) \subseteq [\mu, \lambda]$.

Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $-\lambda < \mu - \epsilon < \lambda - \epsilon < \lambda$.

Si consideramos el polinomio $p(x) = x - \epsilon \in \mathbb{R}[x]$ y usamos el ítem 3 del Teorema 1.6, obtenemos que

$$\sigma(p(C + D_1)) = \sigma((C + D_1) - \epsilon I) = p(\sigma(C + D_1)) = \sigma(C + D_1) - \epsilon.$$

Entonces

$$\|C + D_1 - \epsilon I\| < \|C + D_1\|.$$

Por lo tanto, existe $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$ minimal tal que

$$\|C + D_1 - \epsilon I\| < \|C + D_1\| = \|C + D_0\|,$$

con $D_1 - \epsilon I \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$, lo cual contradice el hecho de que $C + D_0$ es minimal. Luego, $-\lambda \in \sigma(C + D_1)$.

□

La propiedad del espectro centrado vale aún en contextos más generales, como veremos en la sección 5.3 de este mismo capítulo.

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección. Se trata de una caracterización de los operadores compactos minimales basada en su estrecha relación con los operadores tipo traza.

Teorema 5.5. *Sean $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$. Consideremos E_+ y E_-, las proyecciones espectrales de los autovalores $\lambda_{max}(C+D_1)$ y $\lambda_{min}(C+D_1)$, respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$C + D_1$ es minimal.*
2. *Existe $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h$, $X \neq 0$, tal que*
   - $\langle Xe_i, e_i \rangle = 0\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}$;
   - $|tr(X(C+D_1))| = \|C+D_1\|\ \|X\|_1\,$;
   - $E_+X^+ = X^+\ ,\ E_-X^- = X^-$.
3. *$\lambda_{min}(C+D_1) + \lambda_{max}(C+D_1) = 0$ y para cada $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ existen $y \in R(E_+)\ ,\ z \in R(E_-)$ tales que:*
   - $\|y\| = \|z\| = 1$;
   - $\langle Dy, y \rangle \leq \langle Dz, z \rangle$.

Demostración. $2 \Rightarrow 1$. Sean $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$. Si existe $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h$ tal que satisface las propiedades enunciadas en el ítem (2), entonces:

$$\|C+D_1\| = \frac{|\mathrm{tr}(X(C+D_1))|}{\|X\|_1} = \left|\mathrm{tr}\left(\frac{X}{\|X\|_1}C\right)\right|$$

$$\leq \max_{Y\in\mathcal{N}} |\mathrm{tr}(YC)| = \inf_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C+D\|\,,$$

donde la última igualdad vale por la fórmula de dualidad de Banach (ver Proposición 5.2). Luego, $C+D_1$ es minimal.

$1 \Rightarrow 2$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|C+D_1\| = 1$. Para la demostración de esta parte usaremos las mismas técnicas que las utilizadas en la demostración del Teorema 2 en [2] para matrices. La fórmula de dualidad de Banach nos indica que existe $X \in \mathcal{B}_1(H)^h$ tal que

$$\langle Xe_i, e_i \rangle = 0 \, , \, \forall i \in \mathbb{N} \, , \, \|X\|_1 = 1 \, , \, \operatorname{tr}(X(C + D_1)) = \operatorname{tr}(XC) = 1.$$

Probemos que $X(C + D_1) = (C + D_1)X$. Como $C + D_1$ es minimal, la Proposición 5.4 implica que $\{-1; 1\} \subseteq \sigma(C + D_1)$. Consideremos las proyecciones espectrales E_+, E_- y $E_3 = I - E_+ - E_-$. Los operadores $C + D_1$ y X pueden escribirse matricialmente en términos de la descomposición ortogonal $\mathcal{H} = R(E_+) \oplus R(E_-) \oplus R(E_3)$, como

$$C + D_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & (C + D_1)_{3,3} \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Nos basta con probar que $X_{1,2} = X_{1,3} = X_{2,3} = X_{3,3} = 0$. Para hacerlo, consideraremos la Proposición 1.17, por el cual se cumplen las siguientes desigualdades

$$\left\| \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix} \right\|_1 + \|X_{3,3}\|_1 \leq \|X\|_1$$

y

$$\|X_{1,1}\|_1 + \|X_{2,2}\|_1 \leq \left\| \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix} \right\|_1.$$

Supongamos que $\|X_{3,3}\|_1 \neq 0$, entonces

$$1 = \operatorname{tr}(X(C + D_1)) = \operatorname{tr}(X_{1,1}) - \operatorname{tr}(X_{2,2}) + \operatorname{tr}(X_{3,3}(C + D_1)_{3,3})$$

$$< \|X_{1,1}\|_1 + \|X_{2,2}\|_1 + \|X_{3,3}\|_1$$

$$\leq \left\| \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix} \right\|_1 + \|X_{3,3}\|_1 \leq \|X\|_1 \leq 1,$$

lo cual es una contradicción. Luego, $X_{3,3} = 0$.

Asimismo,

$$\left. \begin{array}{r} \operatorname{tr}(X_{1,1}) = \|X_{1,1}\|_1 \\ \operatorname{tr}(-X_{2,2}) = \|-X_{2,2}\|_1 \end{array} \right\} \Rightarrow X_{1,1} \geq 0 \ \wedge -X_{2,2} \geq 0.$$

Por otro lado,

$$1 = \operatorname{tr}(X(C + D_1)) = \|X_{1,1}\|_1 + \|-X_{2,2}\|_1 \leq \|X(C + D_1)\|_1$$

$$\leq \|X\|_1 \|C + D_1\| \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{tr}(X(C + D_1)) = \|X(C + D_1)\|_1 .$$

Luego $X(C + D_1) \geq 0$, lo cual implica que

$$\begin{cases} X_{3,1}(C + D_1)_{3,3} = X_{1,3}^*(C + D_1)_{3,3} = X_{3,1} \Leftrightarrow X_{3,1} = X_{1,3}^* = 0, \\ X_{3,2}(C + D_1)_{3,3} = X_{2,3}^*(C + D_1)_{3,3} = X_{3,2} \Leftrightarrow X_{3,2} = X_{2,3}^* = 0. \end{cases}$$

Análogamente, deducimos que

$$\operatorname{tr} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ -X_{2,1} & -X_{2,2} \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ -X_{2,1} & -X_{2,2} \end{pmatrix} \right\|_1 .$$

Luego

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ -X_{2,1} & -X_{2,2} \end{pmatrix} \geq 0$$

y $-X_{2,1} = X_{1,2}^* = X_{2,1} = 0$. Finalmente,

$$X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & X_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y este operador conmuta con $C + D_1$. Además,

$$X^+ = E_+ X_{1,1} E_+ \Rightarrow E_+ X^+ = X^+ \text{ y } X^- = E_- X_{2,2} E_- \Rightarrow E_- X^- = X^-.$$

$2 \Rightarrow 3$. Sea $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h$, $X \neq 0$ tal que $\operatorname{Diag}(X) = 0$, $\operatorname{tr}(CX) = \|X\|_1$ y $E_+ X^+ = X^+$, $E_- X^- = X^-$. Sea $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$ y definimos las siguientes constantes m y M

$$m = \min_{y \in R(E_+)} \frac{\langle Dy, y \rangle}{\|y\|^2} \quad , \quad M = \max_{z \in R(E_-)} \frac{\langle Dz, z \rangle}{\|z\|^2}. \tag{5.2.5}$$

Observemos que $\dim(R(E_+)), \dim(R(E_-)) < \infty$, entonces el mínimo y el máximo, respectivamente siempre son alcanzados. Afirmamos que

$$\operatorname{tr}\left(\frac{X^+}{\|X^+\|_1} D\right) \geq m. \tag{5.2.6}$$

Para probarlo, observemos que $X^+ = E_+ X^+$ y notemos que

$$\operatorname{tr}\left(\frac{X^+}{\|X^+\|_1} D\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{E_+ X^+ E_+}{\|X^+\|_1} D\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{X^+}{\|X^+\|_1} E_+ D E_+\right).$$

De modo que la desigualdad (5.2.6) resulta equivalente a

$$\operatorname{tr}\left[\frac{X^+}{\|X^+\|_1} (E_+ D E_+ - m E_+)\right] \geq 0,$$

puesto que $\dfrac{X^+}{\|X^+\|_1} \geq 0$. Entonces, si probamos que $E_+DE_+ - mE_+ \geq 0$ obtendremos (5.2.6). Sea $h \in \mathcal{H}$:

$$\langle E_+DE_+h, h\rangle = \langle DE_+h, E_+h\rangle = \langle Dy, y\rangle \geq m\,\|y\|^2\,,$$

con $E_+h = y \in R(E_+)$. Entonces, $\underbrace{\langle Dy, y\rangle}_{<\infty} - \underbrace{m\,\langle y, y\rangle}_{<\infty} \geq 0$, para todo $y \in R(E_+)$. Finalmente, como $y = E_+h$

$$\langle (DE_+ - mE_+)\,h, E_+h\rangle \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \langle (E_+DE_+ - mE_+)\,h, h\rangle \geq 0.$$

Análogamente, se puede probar que $\operatorname{tr}\left(\dfrac{X^-}{\|X^-\|_1}D\right) \leq M$.

Por otro lado, la condición $\operatorname{Diag}(X) = 0$ con $X \neq 0$ fuerza a que se cumpla la condición $\operatorname{Diag}(X^+) = \operatorname{Diag}(X^-) \neq 0$, y como $X^+, X^- \geq 0$

$$\|X^+\|_1 = \|\operatorname{Diag}(X^+)\|_1 = \|\operatorname{Diag}(X^-)\|_1 = \|X^-\|_1$$

y

$$\operatorname{tr}(X^+D) = \operatorname{tr}(X^-D).$$

Por lo tanto, existen $y_0 \in R(E_+)$ y $z_0 \in R(E_-)$ tales que $\|y_0\| = \|z_0\| = 1$ y

$$\langle Dy_0, y_0\rangle = m \leq \operatorname{tr}\left(\frac{X^+}{\|X^+\|_1}D\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{X^-}{\|X^-\|_1}D\right) \leq M = \langle Dz_0, z_0\rangle\,.$$

$3 \Rightarrow 2$. Para probar esta parte seguiremos la ideas centrales empleadas en la demostración del Teorema 2 de [2]: consideremos la función $\Phi(X) = \operatorname{Diag}(X)$ definida en el capítulo 1 y los siguientes conjuntos

$$\mathcal{A} = \left\{Y \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h : E_+Y = Y \geq 0\,, \operatorname{tr}(Y) = 1\right\}$$

y

$$\mathcal{B} = \left\{ Z \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h : E_- Z = Z \geq 0 \, , \, \operatorname{tr}(Z) = 1 \right\}.$$

Como $\dim(R(E_+)) < \infty$ (y $\dim(R(E_-)) < \infty$), cada $Y \in \mathcal{A}$ (y cada $Z \in \mathcal{B}$) es un operador Hermitiano entre espacios finito dimensionales fijos. Entonces, todas las normas restringidas a estos espacios resultan ser equivalentes. Por esto, podemos considerar que $\Phi(\mathcal{A})$ y $\Phi(\mathcal{B})$ son conjuntos compactos de $\ell^2(\mathbb{R})$ para cada norma (y por supuesto, también resultan ser convexos).

Asumamos la no existencia de un operador X que cumpla las condiciones establecidas en (2). Esto implica que $\Phi(\mathcal{A}) \cap \Phi(\mathcal{B}) = \emptyset$. Como $\Phi(\mathcal{A})$ y $\Phi(\mathcal{B})$ son conjuntos compactos y convexos de $\ell^2(\mathbb{R})$, por ejemplo tomando la norma euclídea, existen $a, b \in \mathbb{R}$ y un funcional ρ definida para cada $x \in \mathcal{H}$ tales que $\rho(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i d_i$, con $d = \{d_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in c_0 = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \; a_n \to 0\}$, que cumple

$$\rho(y) \geq a > b \geq \rho(z),$$

para cada $y \in \Phi(\mathcal{A})$ y cada $z \in \Phi(\mathcal{B})$. Entonces

$$\langle \Phi(Y), d \rangle \geq a > b \geq \langle \Phi(Z), d \rangle \; \Rightarrow \min_{Y \in \mathcal{A}} \langle \Phi(Y), d \rangle > \max_{Z \in \mathcal{B}} \langle \Phi(Z), d \rangle \, ,$$

y esto no puede ocurrir porque si $D = \operatorname{Diag}(d) \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$, entonces

$$\min_{Y \in \mathcal{A}} \langle \Phi(Y), d \rangle = m \text{ y } \max_{Z \in \mathcal{B}} \langle \Phi(Z), d \rangle = M,$$

con m y M definidas como en (5.2.5). Con esto, $M < m$ lo que contradice la condición (3).

□

La equivalencia entre las dos primeras afirmaciones se puede extender al caso en el que el operador diagonal minimal no sea compacto y esto lo trataremos en la sección 5.3. Sin embargo, la siguiente observación podría ser falsa en cualquier otro contexto más general.

Observación 5.6. *El operador X determinado por la condición 2 del Teorema 5.5 tiene rango finito. Más aún, podemos describir a dicho X como un operador diagonal por bloques en la base de autovectores del operador compacto minimal $C + D_1$.*

Sean $\mathcal{A}$ un espacio de Banach, $\mathcal{B}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{A}$, y $Z \in \mathcal{A}$ un elemento minimal, esto es $\|Z\| = \text{ínf}_{B \in \mathcal{B}} \|Z + B\|$. Entonces, un funcional $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ se dice que es funcional testigo de la $\mathcal{B}$-minimalidad de Z si $\|\psi\| = 1$, $\psi\big|_{\mathcal{B}} \equiv 0$ y $\psi(Z) = \|Z\|$ (en [23] Rieffel estudia dichos funcionales y su relación con mejores aproximantes en C^*-álgebras).

Observación 5.7. *Sea $Z = C + D_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y supongamos que existe un operador X tal que satisface las condiciones de la afirmación (2) del Teorema 5.5. Entonces, podemos definir $\Psi : \mathcal{K}(\mathcal{H})^h \to \mathbb{R}$, dada por $\Psi(\cdot) = tr(X\cdot)$, que verifica*

1. $\|\Psi\| = 1$,
2. $\Psi(C + D_1) = tr\left((X(C + D_1)\right) = \|[C]\|$,
3. $\Psi(D) = 0 \;\forall\, D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$.

Observemos que Ψ actúa como un funcional testigo de la $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$-minimalidad de $C + D_1$.

Si consideramos $v, w \in \mathcal{H}$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la BON de $\mathcal{H}$ prefijada, podemos escribir $v = \sum_{i=1}^{\infty} v^{(i)} e_i$ y $w = \sum_{i=1}^{\infty} w^{(i)} e_i$ con $v^{(i)}, w^{(i)} \in \mathbb{C}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces, denotamos con $v \circ w$ al vector definido como

$$v \circ w = \left(v^{(1)} w^{(1)}, v^{(2)} w^{(2)}, v^{(3)} w^{(3)}, \ldots\right) \in \ell^1.$$

Sea C un operador compacto Hermitiano que cumple la propiedad del espectro centrado. Si consideramos a E_+ y a E_- como las proyecciones espectrales a los autoespacios de los autovalores $\|C\|$ y $-\|C\|$, respectivamente, el siguiente corolario muestra una propiedad interesante que cumplen los subespacios $R(E_+)$ y $R(E_-)$.

Corolario 5.8. *Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$, $C \neq 0$, tal que $\lambda_{max}(C) + \lambda_{min}(C) = 0$. Consideremos E_+ y E_-, las proyecciones espectrales de los autovalores $\lambda_{max}(C)$ y $\lambda_{min}(C)$, respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *C es minimal (es decir $\Phi(C)$ es minimal en $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$).*

2. *Existen $\{v_i\}_{i=1}^r \subset R(E_+)$ y $\{v_j\}_{j=r+1}^{r+s} \subset R(E_-)$, conjuntos ortonormales tales que*

$$co\left(\{v_i \circ \overline{v_i}\}_{i=1}^r\right) \cap co\left(\{v_j \circ \overline{v_j}\}_{i=r+1}^{r+s}\right) \neq 0.$$

En este caso $co\left(\{w_k\}_{k=n_0}^{n_1}\right)$ denota la cápsula convexa del espacio generado por la familia finita de vectores $\{w_k\}_{k=n_0}^{n_1} \subset \mathcal{H}$, y si w_k se escribe en la base elegida en $\mathcal{H}$ como $w_k = (w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, w_k^{(3)}, \ldots)$, entonces $\overline{w_k} = \left(\overline{w_k^{(1)}}, \overline{w_k^{(2)}}, \overline{w_k^{(3)}}, \ldots\right) \in \mathcal{H}$.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que C es minimal (y compacto). Entonces por el Teorema 5.5 existe $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h$ no nulo tal que

- $\Phi(X) = 0$
- $|\mathrm{tr}(XC)| = \|C\| \, \|X\|_1$;
- $E_+X^+ = X^+$, $E_-X^- = X^-$;
- $X = X^+ - X^-$ con

$$X^+ = \sum_{i=1}^{r} a_i(v_i \otimes v_i) \text{ tal que } \{a_i\}_{i=1}^r \subset \mathbb{R}_{>0}, \text{ contados con multiplicidad, y}$$

$$\{v_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{H} \text{ autovectores correspondientes a cada autovalor } a_i.$$

$$X^- = \sum_{j=r+1}^{r+s} a_j (v_j \otimes v_j) \text{ tal que } \{a_j\}_{i=r+1}^{r+s} \subset \mathbb{R}_{>0}, \text{ contados con multiplicidad, y}$$

$$\{v_j\}_{i=r+1}^{r+s} \subset \mathcal{H} \text{ autovectores correspondientes a cada autovalor } a_j.$$

Además, $\Phi(v_k \otimes v_k) = \mathrm{Diag}(v_k \circ \overline{v_k})$, dado que $v_k \otimes v_k = v_k^t \overline{v_k} \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, para todo $1 \leq k \leq r+s$, $k \in \mathbb{N}$. Con esto, se sigue que

$$\Phi(X) = \Phi(X^+) - \Phi(X^-)$$

$$= Diag\left(\sum_{i=1}^{r} a_i (v_i \circ \overline{v_i})\right) - Diag\left(\sum_{j=r+1}^{r+s} a_j (v_j \circ \overline{v_j})\right) = 0.$$

Luego, $Diag\left(\sum_{i=1}^{r} a_i (v_i \circ \overline{v_i})\right) = Diag\left(\sum_{j=r+1}^{r+s} a_j (v_j \circ \overline{v_j})\right)$. Por otro lado,

$$tr(X^+) = \sum_{i=1}^{r} a_i \,,\; tr(X^-) = \sum_{j=r+1}^{r+s} a_j$$

y $tr(X) = tr(X^+ - X^-) = 0$, de modo que $tr(X^+) = tr(X^-)$. Con lo cual si definimos x como

$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{r} a_i} (v_i \circ \overline{v_i}) = \sum_{j=r+1}^{r+s} \frac{a_j}{\sum_{j=r+1}^{r+s} a_j} (v_j \circ \overline{v_j})$$

y observamos que $R(X^+) \subset R(E_+)$, mientras que $R(X^-) \subset R(E_-)$, concluimos que

$$x \in \mathrm{co}\left(\{v_i \circ \overline{v_i}\}_{i=1}^{r}\right) \cap \mathrm{co}\left(\{v_j \circ \overline{v_j}\}_{i=r+1}^{r+s}\right).$$

$2 \Rightarrow 1$. Sea $x \in \mathrm{co}\left(\{v_i \circ \overline{v_i}\}_{i=1}^{r}\right) \cap \mathrm{co}\left(\{v_j \circ \overline{v_j}\}_{i=r+1}^{r+s}\right)$, entonces existen

- $\{\alpha_i\}_{i=1}^{r}, \{\beta_j\}_{j=r+1}^{r+s} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1 = \sum_{j=r+1}^{r+s} \beta_j$;

- $\{v_i\}_{i=1}^r \subset R(E_+), \{v_j\}_{j=r+1}^{r+s} \subset R(E_-)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (v_i \circ \overline{v_i}) = x = \sum_{j=r+1}^{r+s} \beta_j (v_j \circ \overline{v_j})$$

y, más aún, podemos considerar que cada uno de estos conjuntos de vectores, $\{v_i\}_{i=1}^r$ y $\{v_j\}_{j=r+1}^{r+s}$, formen un sistema ortonormal.

Si definimos el operador $Y = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^r \alpha_i(v_i \otimes v_i) - \sum_{j=r+1}^{r+s} \beta_j(v_j \otimes v_j)\right] = Y^+ - Y^-$, entonces Y satisface la condición (2) del Teorema 5.5 pues:

- $tr(CY) = \|C\| \, \|Y\|_1$. Esto se prueba usando que el operador C se escribe en términos de la descomposición ortogonal $\mathcal{H} = R(E_+) \oplus R(E_-) \oplus R(I - E_+ - E_-)$ como

$$C = \sum_{i=1}^{r} \|C\| \, (v_i \otimes v_i) - \sum_{j=r+1}^{r+s} \|C\| \, (v_j \otimes v_j) + R,$$

y entonces

$$\begin{aligned} tr(CY) &= tr\left(\left[\sum_{i=1}^{r} \|C\| \, (v_i \otimes v_i) - \sum_{j=r+1}^{r+s} \|C\| \, (v_j \otimes v_j) + R\right] Y\right) \\ &= tr\left(\sum_{i=1}^{r} \|C\| \, \alpha_i (v_i \otimes v_i) + \sum_{j=r+1}^{r+s} \|C\| \, \beta_j (v_j \otimes v_j)\right) \\ &= \|C\| \left[tr\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (v_i \otimes v_i) + \sum_{j=r+1}^{r+s} \beta_j (v_j \otimes v_j)\right)\right] \\ &= \|C\| \, tr(|Y|) = \|C\| \, \|Y\|_1 . \end{aligned}$$

- $\Phi(Y) = 0$, puesto que

$$\Phi(Y) = Diag\left(\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(v_i\otimes v_i) - \sum_{j=r+1}^{r+s}\beta_j(v_j\otimes v_j)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(v_i\circ\overline{v_i}) - \sum_{j=r+1}^{r+s}\beta_j(v_j\circ\overline{v_j})\right] = 0.$$

- $E_+Y_+ = Y_+$ y $E_-Y_- = Y_-$ dado que Y se escribe matricialmente en términos de la descomposición ortogonal $\mathcal{H} = R(E_+) \oplus R(E_-) \oplus R(I - E_+ - E_-)$ como

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

5.3. Minimalidad en contextos más generales

5.3.1. Minimalidad sobre el conjunto $\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$

Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ un operador compacto Hermitiano. Notemos que si consideramos el conjunto de los operadores acotados diagonales, $\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$, éste no está contenido en $\mathcal{K}(\mathcal{H})^h$. Además, es trivial que $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$ y hemos probado en la Proposición 5.3 que

$$\|[C]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})^h/\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)} = \inf_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\|$$

$$= \inf_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = \|[C]\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})^h/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)}.$$

Si definimos para cada $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ fijo el conjunto $\mathcal{D}_c$, dado por

$$\mathcal{D}_c = \{D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h) : \|C + D\| = \|[C]\|\}, \tag{5.3.1}$$

este conjunto cumple ciertas propiedades, a saber:

1. $\mathcal{D}_c \neq \emptyset$. De hecho, el Teorema 1.44 asegura que la norma cociente del espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})^h/\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$ se realiza en algún elemento de dicha clase, es decir en algún $C + D_0$ con $D_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$. De modo que, para todo $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$ existe un operador diagonal acotado Hermitiano minimal, aunque ese mejor aproximante podría no ser compacto, como hemos observado en el Capítulo 3.

2. $\mathcal{D}_c$ es un conjunto convexo. En efecto, dados $D, D' \in \mathcal{D}_c$, se cumple que

$$\begin{aligned}\|[C]\| &\leq \left\|C + tD + (1-t)D'\right\| \\ &\leq \|tC + tD\| + \left\|(1-t)C + (1-t)D'\right\| \\ &= t\,\|C + D\| + (1-t)\left\|C + D'\right\| = \|[C]\|\,,\end{aligned}$$

   para todo $t \in [0, 1]$. Luego $tD + (1-t)D' \in \mathcal{D}_c$.

3. $\mathcal{D}_c$ es un conjunto cerrado en norma espectral: si $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores diagonales acotados minimales para C tal que $\lim_{n\to\infty} D_n = D$ en norma entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|[C]\| \leq \|C + D\| \leq \|C + D_n\| + \|D - D_n\| < \|[C]\| + \epsilon.$$

El siguiente resultado da una cota muy simple y general para las entradas de cualquier elemento minimal en $\mathcal{D}_c$ (considerándolo como matriz diagonal infinita).

Proposición 5.9. *Sean* $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ *tal que* $\mathrm{Diag}(C) = 0$ *y* $D_0 \in \mathcal{D}_c$*, siendo* $\mathcal{D}_c$ *el conjunto definido en (5.3.1). Entonces*

$$|(D_0)_{ii}| \leq \sqrt{\|[C]\|^2 - \|c_i(C)\|^2}, \textit{ para todo } i \in \mathbb{N}$$

Demostración. Sea $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ tal que $\mathrm{Diag}(C) = 0$ y $D_0 \in \mathcal{D}_c$, entonces

$$\|C + D_0\| = \|[C]\|.$$

Por otro lado,

$$\|C + D_0\| = \sup_{x \in \mathcal{H}/\|x\|=1} \|(C + D_0)x\| \geq \|(C + D_0)e_i\|$$

para cada $e_i \in \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, siendo éste conjunto la base ortonormal de $\mathcal{H}$ definida en los preliminares. Entonces

$$\|(C + D_0)e_i\|^2 \leq |(D_0)_{ii}|^2 + \|c_i(C)\|^2 \leq \|[C]\|^2$$

$$\Rightarrow |(D_0)_{ii}|^2 \leq \|[C]\|^2 - \|c_i(C)\|^2.$$

□

Las siguientes observaciones son generalizaciones casi "naturales" de algunos resultados que obtuvimos en la sección anterior y la idea es realizar una caracterización de los operadores minimales sin pedirle a la diagonal que mejor aproxima que sea compacta.

Observación 5.10. *De la igualdad de ínfimos planteada en la Proposición 5.3 y la fórmula de dualidad de Banach surge que para todo* $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$

$$\inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)} \|C + D\| = \max_{Y \in \mathcal{M}} |tr(CY)|,$$

con

$$\mathcal{M} = \left\{ Y \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h : \ \|Y\|_1 = 1, \ tr(YD) = 0 \, , \forall \ D \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h) \right\}.$$

También notemos que $\mathcal{M} = \mathcal{N}$*, dado que si* $Y \in \mathcal{N}$ *entonces* $tr(YD) = 0$ *para todo* $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$*. En particular, si consideramos para cada* $i \in \mathbb{N}$ *el operador diagonal compacto* $E_{ii} = e_i \otimes e_i$*, entonces cada* $\widetilde{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$ *se puede escribir como*

$$\widetilde{D} = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{d}_i E_{ii} \, , \ \widetilde{d}_i \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$tr(Y\widetilde{D}) = tr\left(Y \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{d}_i E_{ii} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{d}_i \underbrace{tr\,(YE_{ii})}_{=0} = 0,$$

lo cual implica que $Y \in \mathcal{M}$ *y con esto concluimos que* $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$*. La inclusión inversa es trivial.*

Observación 5.11. *Dado* $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$*, la propiedad del espectro centrado sigue valiendo si C es un operador minimal acotado Hermitiano. La demostración de esta generalización está hecha en la sección siguiente (Proposición 5.15) en el contexto de álgebras de von Neumann, pero tiene el mismo espíritu.*

Con todo lo anterior, podemos hacer una caracterización de operadores acotados Hermitianos minimales basada en la ya presentada para el caso compacto.

Teorema 5.12. *Sean* $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ *y* $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^h)$*. Consideremos* E_+ *y* E_-*, las proyecciones espectrales de* $\|C + D_1\|$ *y* $-\|C + D_1\|$*, respectivamente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $C + D_1$ *es minimal.*

2. *Existe* $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})^h$*,* $X \neq 0$*, tal que*

- $\langle Xe_i, e_i\rangle = 0\ ,\ \forall i \in \mathbb{N};$
- $|tr(X(C + D_1))| = \|C + D_1\|\ \|X\|_1\,;$
- $E_+X^+ = X^+\ ,\ E_-X^- = X^-.$

La prueba es esencialmente la misma hecha para el caso compacto (ver demostración (1)⇔(2)del Teorema 5.5), dado que las proyecciones espectrales E_+ y E_- son ortogonales y siempre pueden definirse para cada elemento del espectro de un operador acotado Hermitiano. Por esta razón omitimos la demostración.

Lo que no se puede asegurar en este caso, es que $ran(X) < \infty$, dado que las proyecciones antes mencionadas podrían no ser de rango finito.

5.3.2. Esperanzas condicionales en álgebras de von Neumann

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de von Neumann y $\mathcal{B}$ una subálgebra de von Neumann de $\mathcal{A}$. Consideremos una esperanza condicional $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, como en la Definición 1.27. Definimos el espacio cociente $\mathcal{A}^h/\mathcal{B}^h$ como

$$\mathcal{A}^h/\mathcal{B}^h = \mathcal{A}^h/E(\mathcal{A})^h = \left\{[a] :\ a' \in [a] \Leftrightarrow a' = a + b = a + E(a'')\right\}.$$

Notemos que lo que usamos fuertemente es el hecho de que $E(\mathcal{A})^h = \mathcal{B}^h$, y esto vale pues para cada $b \in \mathcal{B}$

$$E(b) = E(b1) = b\,\underbrace{E(1)}_{=1} = b.$$

La norma cociente asociada a $\mathcal{A}^h/\mathcal{B}^h$ es

$$\|[a]\| = \inf_{x\in\mathcal{A}^h} \|a + E(x)\| = \inf_{b\in\mathcal{B}^h} \|a + b\| = dist(a, \mathcal{B}^h)$$

Al tratarse $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de álgebra y subálgebra de von Neumann, respectivamente, por el Teorema 1.44 siempre existe $b_0 \in \mathcal{B}^h$ tal que

$$\| [a] \| = \|a + b_0\| = \min_{b \in \mathcal{B}^h} \|a + b\| \leq \|a + b\| \quad \forall b \in \mathcal{B}^h.$$

Diremos que $a + b_0$ es minimal.

La siguiente es una extensión de la fórmula de dualidad de Banach, que hemos probado en la sección anterior (Proposición 5.2.3).

Proposición 5.13. *Sea $a \in \mathcal{A}^h$ y consideremos el conjunto*

$$\mathcal{L} = \{ \phi \in \mathcal{A}^* : \ \phi(b) = 0 \, \forall \, b \in \mathcal{B}, \ \|\phi\| = 1 \} \, .$$

Entonces existe $\phi_0 \in \mathcal{L}$ tal que $\phi_0(a) = \| [a] \|$.

Demostración. Se obtiene aplicando el Teorema de Hahn-Banach ya que $\mathcal{B}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{A}$. $\square$

Si consideramos este otro conjunto

$$\mathcal{U} = \{ \phi \in \mathcal{A}_* : \ \phi(b) = 0 \, \forall \, b \in \mathcal{B}, \ \|\phi\| = 1 \} \, ,$$

donde $\mathcal{A}_*$ simboliza el predual de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$. La pregunta que nos hacemos es la siguiente:

¿Existirá siempre $\phi \in \mathcal{U}$?

Consideremos el espacio de sucesiones acotadas, ℓ^∞. Sabemos que $\ell^\infty = (\ell^1)^*$, de modo que $\ell^1 = (\ell^\infty)_*$. Tomemos la sucesión $a \in \ell^\infty$, dada por

$$a = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, ..., 1 - \frac{1}{n}, ... \right) ,$$

es decir que el término general para cada $n \in \mathbb{N}$ es $a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$. Claramente

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

Supongamos que existe $b \in \ell^1$ tal que

$$\phi(a) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n = 1 = \|a\|_\infty ,$$

con $\|b\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = 1$ (notemos que $\phi \in (\ell^\infty)_*$). Entonces, podemos suponer que $b_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ya que $|\phi(a)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\, a_n$). Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{b_n}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1.$$

Sea $i \in \mathbb{N}$, el primer índice tal que $b_i \neq 0$. Entonces

$$b_i a_i + \sum_{n=i+1}^{\infty} b_n a_n = b_i \left(1 - \frac{1}{i}\right) + \sum_{n=i+1}^{\infty} b_n a_n < b_i + \underbrace{\sum_{n=i+1}^{\infty} b_n}_{=1-b_i} = b_i + (1 - b_i) = 1.$$

Luego, comprobamos que no puede existir dicho b ya que obtuvimos una contradicción, es decir que no siempre existe $\phi \in \mathcal{U}$. Esto nos permite concluir lo siguiente.

Observación 5.14. *Sea $a \in \mathcal{A}^h$ y consideremos el conjunto*

$$\mathcal{U} = \{\phi \in \mathcal{A}_* : \ \phi(b) = 0 \,\forall\, b \in \mathcal{B},\ \|\phi\| = 1\}.$$

Entonces no siempre existe $\phi \in \mathcal{U}$ tal que $\phi_0(a) = \|[a]\|$.

Una propiedad que cumplen los elementos minimales de $\mathcal{A}^h/E(\mathcal{A})^h$ es la de tener el espectro centrado, como se puede apreciar en la siguiente proposición.

Proposición 5.15 (Extensión de la propiedad del espectro centrado)**.** *Sea* $a \in \mathcal{A}^h$*. Si* $\lambda = \|[a]\| = \|a + b_0\|$*, con* $b_0 \in \mathcal{B}^h$*, entonces*

$$\{-\lambda; \lambda\} \subseteq \sigma(a + b_0).$$

Demostración. Sean $a \in \mathcal{A}^h$, $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, una esperanza condicional y $b_0 \in \mathcal{B}^h$ tal que $\|[a]\| = \|a + b_0\|$ (y existe $x_0 \in \mathcal{A}^h$ tal que $E(x_0) = b_0$). Además

$$(a + E(x_0))^* = a + E(x_0) = a + b_0 \Rightarrow r(a + b_0) = \lambda,$$

siendo $r(a + b_0)$ el radio espectral del operador $a + b_0$. Como $\sigma(a + E(x_0))$ es compacto no vacío de $\mathbb{R}$ entonces λ ó $-\lambda$ están en $\sigma(a + E(x_0))$. Utilizando el teorema espectral llegaremos a una contradicción con la minimalidad de $a + E(x_0)$, análogamente a lo hecho en la demostración de Proposición 5.4.

□

Observemos que esta extensión abarca a cualquier $a \in \mathcal{A}^h$ con su correspondiente minimal $b \in \mathcal{B}^h$, para cualquier álgebra de van Neumann. Lo único que requerimos para la prueba es que a y b sean Hermitianos.

Capítulo 6

Curvas minimales en la órbita de un operador compacto Hermitiano

6.1. Introducción

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, un operador compacto Hermitiano fijo. El objetivo principal de este capítulo es estudiar la órbita

$$\mathcal{O}_A = \{uAu^* : u \text{ unitario en } \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ y } \ u - I \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}.$$

Más precisamente, nuestro interés se centra en la obtención de una curva uniparamétrica $\chi : [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \to \mathcal{O}_A$ de longitud mínima que satisfaga el problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} \chi(0) = b \\ \chi'(0) = x \in (T\mathcal{O}_A)_b, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

para $b \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$ y $x = \delta_b(iT_0) = iT_0 b - biT_0$, siendo T_0 el operador contraejemplo analizado en el capítulo 3. Utilizaremos resultados del estudio hecho en [1] y en [15] para este tipo de variedades.

También haremos mención sobre la generalización de algunos de los resultados obtenidos en el contexto de espacios homogéneos asociados a C^*-álgebras en general.

Finalmente, construiremos una sucesión de curvas de matrices también minimales en $\mathcal{O}_A$ tales que converjan a la curva que satisfaga el PVI (6.1.1). La curiosidad de este resultado de convergencia es que las curvas minimales de matrices tienen levantada minimal compacta, en tanto la curva a la cual covergen uniformemente no.

6.2. La órbita unitaria de un operador compacto Hermitiano

Sea $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ un operador fijo tal que

$$A = u\mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right) u^*, \text{ con } u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$$

y $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para cada $i \neq j$. Consideremos la órbita $\mathcal{O}_A$ dada por la acción del grupo de los unitarios Fredholm, es decir

$$\mathcal{O}_A = \{uAu^* : u \text{ es unitario en } \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ y } u - I \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}.$$

Sea $b = \mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right) \in \mathcal{O}_A$ (también $b \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)$). La isotropía $\mathcal{I}_b$ es el conjunto $\{e^d : d \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})\}$. Sean $\pi : \mathcal{U}_c(\mathcal{H}) \to \mathcal{O}_A$ y $\delta_b = (d\pi)_1$, los mapas definidos en (1.4.1) y (1.4.2), respectivamente.

Entonces, enunciamos el primer resultado, que implica que $(T\mathcal{O}_A)_b$ puede identificarse con el espacio cociente $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$.

Proposición 6.1. *Sea* $b = \mathrm{Diag}\,(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}) \in \mathcal{O}_A$. *Para cada* $x \in (T\mathcal{O}_A)_b$, *si* $Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ *tal que* $\delta_b(Z) = x$, *entonces*

$$\|x\|_b = \inf_{D\in\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})} \|Z + D\| \tag{6.2.1}$$

in

Demostración. Si Y_1, Y_2 $\delta_b^{-1}(x) = \{Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} : \delta_b(Y) = x\}$ entonces

$$Y_1 - Y_2 \in Ker(\delta_b).$$

Pero $Ker(\delta_b) = \{D : \delta_b(D) = Db - bD = 0\} = \{b\}'$ y b es un operador diagonal, por lo que cada $D \in \{b\}'$ es diagonal. Luego,

$$Y_1 - Y_2 = D, \text{ con } D \text{ diagonal}$$

o equivalentemente

$$Y_1 = Y_2 + D, \text{ con } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}).$$

Si $Y_2 \in \delta_b^{-1}(x) = \{Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} : \delta_b(Y) = x\}$, se sigue que

$$\|x\|_b = \inf\{\|Y\| : Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} \text{ tal que } \delta_b(Y) = x\}$$

$$= \inf\{\|Y\| : Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} \text{ tal que } Y = Y_2 + D, \text{ con } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})\}.$$

□

Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $|\gamma| < 1$ y consideremos el operador $Z_r \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definido como la matriz infinita

$$Z_r = i \begin{pmatrix} 0 & r\gamma & r\gamma^2 & r\gamma^3 & \cdots \\ r\gamma & d_2 & \gamma & \gamma^2 & \cdots \\ r\gamma^2 & \gamma & d_3 & \gamma^2 & \cdots \\ r\gamma^3 & \gamma^2 & \gamma^2 & d_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{6.2.2}$$

$$= i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & r\gamma & r\gamma^2 & r\gamma^3 & \cdots \\ r\gamma & 0 & \gamma & \gamma^2 & \cdots \\ r\gamma^2 & \gamma & 0 & \gamma^2 & \cdots \\ r\gamma^3 & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{Y_r} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}}_{\widetilde{D_0}} = Y_r + \widetilde{D_0}, \tag{6.2.3}$$

tal que satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$:

$$d_j = -\frac{1-\gamma^{j-2}}{1-\gamma} - \frac{\gamma^j}{1-\gamma^2}.$$

2. $r \geq \frac{\left\|Y^{[1]}+\widetilde{D_0}\right\|}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{2k}\right)^{1/2}}$, siendo $Y^{[1]}$ el operador Y_r con su primer fila y columna nulas.

Observemos que la definición de cada d_j resulta independiente del parámetro r.

Por otro lado, el operador $-iZ_r$ cumple las condiciones de minimalidad del Teorema 2.5. Aún más, $Z_r = i(T_0 + D_0)$ siendo $T_0 + D_0$ el operador minimal contraejemplo del Capítulo 3 ($Y_r = iT_0$ y $\widetilde{D_0} = iD_0$). Con todo lo anterior, se sigue que

$$\|[Y_r]\| = \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})} \|Y_r + D\| = \left\|Y_r + \widetilde{D_0}\right\| = \|Z_r\|.$$

El operador diagonal $\widetilde{D_0}$ es el único minimizante (acotado, pero no compacto) para Y_r.

Fijemos $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, dado por $x = \delta_b(Z_r) = Z_r b - bZ_r$. Como $\widetilde{D_0} \in Ker(\delta_b)$, se sigue que $x = Y_r b - bY_r \in (T\mathcal{O}_A)_b$ y entonces

$$\|x\|_b = \|Z_r b - bZ_r\|_b = \inf_{D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})} \|Y_r + D\| = \|[Y_r]\| = \|Z_r\| < \|Y_r + D\|,$$

para todo $D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$. En otras palabras, x no tiene levantada minimal compacta.

La Proposición 1.36 en la sección Preliminares asegura que para todo $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ resulta que e^X es un unitario de Fredholm. Por otro lado, para todo $u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ existe siempre $X \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ tal que $u = e^X$. Lo que no necesariamente se cumple es que si $e^Y \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ entonces $Y \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, como se puede ver en la Observación 1.37, que también se encuentra en los Preliminares.

Definimos la curva uniparamétrica β dada por

$$\beta(t) = e^{tZ_r} b e^{-tZ_r},\ t \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z_r\|}, \frac{\pi}{2\|Z_r\|}\right]. \tag{6.2.4}$$

Para probar que $\beta \subset \mathcal{O}_A$, introducimos el siguiente resultado previo.

Lema 6.2. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $z_t \in \mathbb{C}$, $|z_t| = 1$ y $U(t) \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ tales que*

$$e^{tZ_r} = z_t U(t).$$

Demostración. Sea $\alpha = -i \lim\limits_{n\to\infty} d_n = \frac{i}{1-\gamma}$. Entonces

$$e^{tZ_r+\alpha It} = e^{tZ_r}e^{t\alpha I}.$$

Observemos que $e^{t\alpha I} = e^{t\alpha}I$. Se sigue que

$$e^{tZ_r} = e^{-t\alpha}e^{tZ_r+t\alpha I} = e^{-t\alpha}e^{tY_r+t\widetilde{D_0}+t\alpha I},$$

con $e^{-t\alpha} \in \mathbb{C}$, $\left|e^{-t\alpha}\right| = 1$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Además, $\widetilde{D_0} + \alpha I \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$, dado que es acotado, diagonal y

$$\left|\left(\widetilde{D_0} + \alpha I\right)_{jj}\right| = \left|d_j + \frac{1}{1-\gamma}\right| = \left|-\frac{1-\gamma^{j-2}}{1-\gamma} - \frac{\gamma^j}{1-\gamma^2} + \frac{1}{1-\gamma}\right|$$

$$= \left|\frac{\gamma^{j-2}}{1-\gamma} - \frac{\gamma^j}{1-\gamma^2}\right| \to 0$$

cuando $j \to \infty$. Por lo tanto, como $tZ_r + t\alpha I \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $U(t) = e^{tZ_r+t\alpha I} \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y

$$e^{tZ_r} = z_t U(t), \text{ con } z_t = e^{t\alpha} \in \mathbb{C}.$$

□

Teorema 6.3. *Sea $A = u\mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right)u^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, con $u \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ y $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para cada $i \neq j$. Sea $b = \mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right) \in \mathcal{O}_A$. Entonces, la curva uniparamétrica β definida en (6.2.4) se encuentra completamente contenida en la órbita de A y se puede expresar como*

$$\beta(t) = e^{t(Z_r+\alpha I)}be^{-t(Z_r+\alpha I)}, \tag{6.2.5}$$

con $\alpha = -i \lim_{n\to\infty} d_n = \frac{i}{1-\gamma}$.

Demostración. Por el Lema 6.2, si $U(t) = e^{tZ_r + t\alpha I}$, entonces β puede reescribirse como

$$\beta(t) = z_t U(t) b (z_t U(t))^* = z_t \overline{z_t} U(t) b U^{-1}(t)$$
$$= U(t) b U^{-1}(t) = e^{t(Z_r+\alpha I)} b e^{-t(Z_r+\alpha I)}$$

con $U(t) \in \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Concluimos que $\beta(t) \in \mathcal{O}_A$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Observación 6.4. *Observemos que* $\|Z_r\| = \|[Y_r]\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah})}$ *y* Z_r *es el único operador minimal en* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$*. Tomemos* $\mathcal{P} = \{uAu^* :\ u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$*, luego por el Teorema 1.43 la curva* β *tiene longitud mínima sobre todas las curvas suaves en* $\mathcal{P}$ *que unen* $\beta(0) = b$ *y* $\beta(t)$*, con* $|t| \leq \frac{\pi}{2\|Z_r\|}$*. Luego, como* $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{P}$*, para cada* $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z_r\|}, \frac{\pi}{2\|Z_r\|}\right]$ *se sigue que*

$$\mathrm{long}(\beta) = \inf\{\mathrm{long}(\chi) :\ \chi \in \mathcal{P},\ \chi(0) = b \text{ y } \chi(t_0) = \beta(t_0)\} \leq$$

$$\leq \inf\{\mathrm{long}(\chi) :\ \chi \in \mathcal{O}_A,\ \chi \text{ es suave},\ \chi(0) = b \text{ y } \chi(t_0) = \beta(t_0)\} = d(b, \beta(t_0)),$$

siendo $d(b, \beta(t_0))$ *la distancia rectificable entre* b *y* $\beta(t_0)$ *definida en (1.4.3).*

Utilizaremos la observación anterior para probar el siguiente resultado.

Proposición 6.5. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 6.3, la curva uniparamétrica* $\beta : \left[-\frac{\pi}{2\|Z_r\|}, \frac{\pi}{2\|Z_r\|}\right] \to \mathcal{O}_A$ *definida como*

$$\beta(t) = e^{t(Z_r+\alpha I)} b e^{-t(Z_r+\alpha I)} = e^{tZ_r} b e^{-tZ_r},$$

con Z_r *de (6.2.2) y* $\alpha = \frac{i}{1-\gamma}$*, satisface*

1. $\beta'(0) = x = Y_r b - b Y_r = Z_r b - b Z_r \in (T\mathcal{O}_A)_b$.

2. *β tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves de $\mathcal{O}_A$ que unen a b con $\beta(t_0)$, para todo $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z_r\|}, \frac{\pi}{2\|Z_r\|}\right]$. Esto es*

$$\operatorname{long}\left(\beta|_{[0,t_0]}\right) = \inf\{\operatorname{long}(\chi) : \chi \text{ es suave}, \chi(0) = b \text{ y } \chi(t_0) = \beta(t_0)\} = d(b, \beta(t_0)).$$

3. $\operatorname{long}\left(\beta|_{[0,t_0]}\right) = |t_0| \, \|x\|_b$, *para cada* $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z_r\|}, \frac{\pi}{2\|Z_r\|}\right]$.

Demostración. 1. $\beta'(0) = e^{tZ_r} [Z_r, b] \, e^{-tZ_r}\big|_{t=0}$.

2. Es consecuencia directa de que $\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{P}$ y de la minimalidad del operador Z_r en $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah})$, como hemos mostrado en la Observación 6.4.

3. Observemos que $\operatorname{long}(\beta) = \int_0^{t_0} \|\beta'(t)\|_{\beta(t)} \, dt = |t_0| \, \|Y_r b - bY_r\|_b$. En efecto,

$$\|\beta'(t)\|_{\beta(t)} = \left\|Z_r e^{tZ_r} b e^{-tZ_r} - e^{tZ_r} b Z_r e^{-tZ_r}\right\|_{\beta(t)} = \left\|e^{tZ_r} [Z_r, b] \, e^{-tZ_r}\right\|_{\beta(t)}$$

$$= \left\|z\bar{z} U(t) \, [Z_r, b] \, U^{-1}(t)\right\|_{\beta(t)} = |z|^2 \left\|U(t) \, [Z_r, b] \, U^{-1}(t)\right\|_{\beta(t)}$$

$$= \left\|U(t) \, [Z_r, b] \, U^{-1}(t)\right\|_{U(t)bU^{-1}(t)} = \|Z_r b - bZ_r\|_b$$

$$= \|Y_r b - bY_r\|_b = \|x\|_b \, .$$

donde la igualdad $\left\|U(t) \, [Z_r, b] \, U^{-1}(t)\right\|_{U(t)bU^{-1}(t)} = \|Z_r b - bZ_r\|_b$ se debe a que la norma Finsler es invariante por la acción de los unitarios Fredholm.

□

Resumiendo, hemos hallado una curva paramétrica de la forma

$$\pi_b \circ (e^{tZ_\alpha}) = e^{tZ_\alpha} b e^{-tZ_\alpha},$$

la cual tiene longitud mínima entre elementos de la órbita $\mathcal{O}_A$. No obstante, el operador $Z_\alpha = Z_r + \alpha I \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ no es un elemento minimal en su clase (recordemos que la clase de $[Z_r] = \{Z_r + D : \; D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})\} = [Y_r]$). Por otro lado,

$$e^{tZ_\alpha} b e^{-tZ_\alpha} = e^{tZ_r} b e^{-tZ_r}$$

y Z_r es minimal, pero no pertenece a $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$. Luego, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.6. *Sea $b \in \mathcal{O}_A$, $b = \mathrm{Diag}\left(\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}\right)$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para cada $i \neq j$. Entonces, existen curvas de longitud mínima de la forma $\rho(t) = e^{tZ} b e^{-tZ}$ en $\mathcal{O}_A$ tales que unen a b con otros puntos de la órbita, pero sin embargo $Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ y $\|Z\| > \|[Z]\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})}$.*

6.2.1. Generalización a espacios homogéneos en C^*-álgebras

El Teorema 6.3 y la Proposición 6.5 pueden generalizarse (con una demostración análoga) a contextos de C^*-álgebras. Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$.

Consideremos $\mathcal{P}$ el espacio homogéneo tal que el grupo unitario de $\mathcal{A}$ actúa transitivamente a la izquierda y tal que la isotropía correspondiente es el grupo unitario de $\mathcal{B}$.

En este contexto, si Z_0 es un elemento minimal en la clase de $X \in (T\mathcal{P})_b$ e $y_0 \in \{Z_0\}' \cap \{b\}'$ entonces la curva uniparamétrica $\varphi(t) = e^{t(Z_0+y_0)} b e^{-t(Z_0+y_0)}$ tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves en $\mathcal{P}$ que unen a b con $\varphi(t_0)$, para $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|Z_0\|}, \frac{\pi}{2\|Z_0\|}\right]$.

En consecuencia, resulta de interés estudiar el conjunto $\{Z_0\}' \cap \{b\}'$ para cada caso particular de Z_0, X y b. En este sentido, enumeraremos a continuación algunas propiedades elementales.

Propiedad 6.7. *Sean $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y $\mathcal{B}$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$. Entonces, para $a, b \in \mathcal{A}$*

1. *$\{a\}' \cap \{b\}' \neq \emptyset$ ya que $0 \in \{a\}' \cap \{b\}'$.*

2. *Si $\mathcal{A}$ es además un álgebra de von Neumann entonces*
   - *para todo $a \in \mathcal{A}$ siempre existe $c_0 \in \mathcal{B}$ tal que $\|a + c_0\| = \inf\{a + c : c \in \mathcal{B}\}$;*
   - *$\{a\}' \cap \{b\}' \neq \{0\}$, ya que $\{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{A}$ (incluso vale si $\mathcal{A}$ es C^*-álgebra unital).*

   Pero en el caso que $\mathcal{A}$ sea sólo C^*-álgebra, Z_0 puede no pertenecer a $\mathcal{A}$ e incluso la intersección $\{Z_0\}' \cap \{b\}'$ podría ser nula.

3. *Hay casos en los que existen elementos en $\{a\}' \cap \{b\}'$ que no son de la forma $\lambda 1$: por ejemplo, sean $M, M' \in \mathcal{A} = M_n^h(\mathbb{C})$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tales que $a_1 \neq a_2$. Consideremos la matriz por bloques $\mathbb{M}$, dada por*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix} \in M_{2n}^h(\mathbb{C}).$$

   Si I_n es la matriz identidad de $n \times n$, entonces la matriz diagonal de $2n \times 2n$ $\begin{pmatrix} a_1 I_n & 0 \\ 0 & a_2 I_n \end{pmatrix} \in \{D\}' \cap \{\mathbb{M}\}'$ para cada $D \in \mathcal{D}(M_{2n}^h(\mathbb{C}))$ y no es un múltiplo de I_{2n}.

6.2.2. Operadores minimales con diagonal no compacta

Sean Y_r, $\widetilde{D_0}$ los operadores definidos en (6.2.3) y $\alpha = \frac{i}{1-\gamma}$. En la construcción de la curva minimal $\beta(t) = e^{Y_r + \widetilde{D_0} + \alpha I} b e^{-(Y_r + \widetilde{D_0} + \alpha I)}$ en (6.2.5) resultaron indispensables las siguientes propiedades:

1. $\widetilde{D_0} + \alpha I \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$ y
2. αI conmuta con Z_r y b.

Sin embargo, $\alpha I \notin \{Z_r\}' \cap \{b\}'$, dado que $\alpha I \notin \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Esto motiva a estudiar más casos en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Sea $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{\infty}$ el conjunto de autovalores (supongamos todos con multiplicidad 1 y no nulos) de $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y sea $b = \mathrm{Diag}\left(\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{\infty}\right) \in \mathcal{O}_A$. Para x fijo en el espacio tangente $(T\mathcal{O}_A)_b \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ vale que

$$\|x\|_b = \inf\{\|Z + D\| : Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah},\ \delta_b(Z) = x \text{ y } [D, b] = 0\}$$

$$= \|[Z]\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})}\,.$$

En este contexto, siempre existe $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah})$ tal que

$$\|[Z]\| = \|Z + D_1\|\,,$$

no obstante, en el Capítulo 3 hemos probado que no siempre tal mejor aproximante diagonal es compacto. Supongamos que dicho D_1 minimal no pertenece a $\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$. Denotamos $\{(D_1)_{jj}\}_{j\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de elementos de la diagonal principal de D_1 (respecto de la base ortonormal fija $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). En la siguiente proposición mostraremos que si dicha sucesión tiene límite entonces $e^{t(Z+D_1)}be^{-t(Z+D_1)}$ está en $\mathcal{O}_A$ para todo t.

Proposición 6.8. *Sea $Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ y supongamos que existe un único operador diagonal $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah})$ tal que*

$$\|[Z]\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})} = \|Z + D_1\|$$

y D_1 no es compacto. Si existe $\lambda \in i\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} (D_1)_{jj} = \lambda$, entonces la curva

$$\chi(t) = e^{t(Z+D_1-\lambda I)}be^{-t(Z+D_1-\lambda I)}$$

tiene longitud mínima entre todas las curvas suaves en $\mathcal{O}_A$ que unen a b con $\chi(t_0)$ para $t_0 \in [-\frac{\pi}{2\|[Z]\|}, \frac{\pi}{2\|[Z]\|}]$.

Demostración. En primer lugar, observemos que $Re\left((D_1)_{jj}\right) = 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, ya que $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah})$. Entonces,

$$\lim_{j\to\infty} (D_1)_{jj} = \lambda$$

con $\lambda \neq 0$ ya que D_1 no es compacto. Por lo tanto, usando cálculo funcional

$$\|Z + D_1 - \lambda I\| = \text{máx}\{|-\|[Z]\| - |\lambda||\,;\|[Z]\| - |\lambda|\} > \|[Z]\|\,.$$

Además $D_1 - \lambda I \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$, dado que

$$\left|(D_1 - \lambda I)_{jj}\right| = \left|(D_1)_{jj} - \lambda\right| \to 0$$

cuando $j \to \infty$. Luego, $Z + D_1 - \lambda I$ no es minimal en $\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})$ pero la curva parametrizada por

$$\chi(t) = e^{t(Z+D_1-\lambda I)} b e^{-t(Z+D_1-\lambda I)} \in \mathcal{O}_A$$

tiene longitud mínima, puesto que χ resulta ser igual a la curva

$$e^{t(Z+D_1)} b e^{-t(Z+D_1)}$$

la cual por el Teorema 1.43 tiene longitud mínima en el espacio homogéneo dado por

$$\{uAu^* :\ u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$$

y claramente, este espacio homogéneo contiene a $\mathcal{O}_A$. $\square$

Observación 6.9 (Operadores minimales con diagonales oscilantes)**.** *Dado $Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$, no es cierto que para cada operador diagonal D_1 tal que $Z + D_1$ es minimal se* *satisface la condición*

$$\exists \lambda \in i\mathbb{R} \ / \ \lim_{j\to\infty} (D_1)_{jj} = \lambda.$$

En efecto, consideremos el operador Z_0*, dado por*

$$Z_0 = i \begin{pmatrix} 0 & -r\delta & r\gamma & -r\delta^2 & r\gamma^2 & -r\delta^3 & r\gamma^3 & \cdots \\ -r\delta & 0 & \gamma & -\delta^2 & \gamma^2 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ r\gamma & \gamma & 0 & -\delta^2 & \gamma^2 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ -r\delta^2 & -\delta^2 & -\delta^2 & 0 & \gamma^2 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ r\gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & \gamma^2 & 0 & -\delta^3 & \gamma^3 & \cdots \\ -r\delta^3 & -\delta^3 & -\delta^3 & -\delta^3 & -\delta^3 & 0 & \gamma^3 & \cdots \\ r\gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & \gamma^3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \text{ con } \gamma, \delta \in (0,1).$$

Si $r \geq 0$*, se trata de un operador compacto* ($Z_0 \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$)*. Si se cumple la condición* $\gamma^2 \leq \delta \leq \gamma^{1/2}$*, por analogía a lo hecho para* S_0 *en el capítulo 3, existe un único operador diagonal* $D_1 = i\text{Diag}\left(\{d'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = iD'$ *tal que* $D_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}(\mathcal{H})^{ah})$*. Además, se puede elegir* r *de modo que* $Z_0 + D_1$ *sea minimal, es decir*

$$\|Z_0 + D_1\| < \|Z_0 + D\| \text{ para todo } D \in \mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}).$$

Para los casos tales que el par (δ, γ) *cumple*

$$\gamma^2 = \delta < \gamma^{1/2} \ \text{ó}\ \gamma^2 < \delta = \gamma^{1/2}$$

(o sea, cuando las dos desigualdades no son estrictas en simultáneo) hemos visto que no existe $\lim_{n\to\infty} (D_1)_{nn}$*. Para estos casos todavía se mantiene abierta la pregunta acerca de la existencia de curvas minimales* χ *en* $\mathcal{O}_A$ *bajo las condiciones iniciales*

$$\chi(0) = b \text{ y } \chi'(0) = x = Z_0 b - b Z_0.$$

6.3. Aproximación con curvas de matrices de longitud mínima

Dados $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^h$ y $b \in \mathcal{O}_A$ como los prefijados en la sección anterior, el objetivo principal de este apartado es contruir una sucesión de curvas de matrices en $\mathcal{O}_A$ tales que

1. tengan como punto de partida a b,
2. sean de longitud mínima y
3. aproximen a la curva β definida en 6.2.4.

El primer resultado en este sentido es la convergencia de sucesiones de curvas exponenciales de $\mathcal{O}_A$.

Proposición 6.10. *Sean $b \in \mathcal{O}_A$ y $\beta_n(t) = e^{tZ_n} b e^{-tZ_n}$ una sucesión de curvas en $\mathcal{O}_A$ con $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}$ una sucesión de operadores tal que $\|Z_n - Z\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si definimos $\beta(t) = e^{tZ} b e^{-tZ}$, entonces*

$$\beta_n(t) \to \beta(t)$$

en norma de operadores cuando $n \to \infty$. Más aún, dicha convergencia es uniforme en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$.

$$\|\beta_n(t) - \beta(t)\| = \left\| e^{tZ_n} b e^{-tZ_n} - e^{tZ} b e^{-tZ} \right\|$$

$$\leq \left\| e^{tZ_n} b e^{-tZ_n} - e^{tZ} b e^{-tZ_n} \right\| + \left\| e^{tZ} b e^{-tZ_n} - e^{tZ} b e^{-tZ} \right\|$$

$$\leq \left\| \left(e^{tZ_n} - e^{tZ} \right) b e^{-tZ_n} \right\| + \left\| e^{tZ} b \left(e^{-tZ_n} - e^{-tZ} \right) \right\|$$

$$\leq \left(\left\| e^{tZ_n} - e^{tZ} \right\| + \left\| e^{-tZ_n} - e^{-tZ} \right\| \right) \|b\| .$$

Es sabido que el mapa exponencial $exp : \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah} \to \mathcal{U}_c(\mathcal{H})$ es Lipschitz continuo en compactos de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} \left\| e^{tZ_n} - e^{tZ} \right\| < \frac{\epsilon}{\|b\|} \\ \left\| e^{-tZ_n} - e^{-tZ} \right\| < \frac{\epsilon}{\|b\|}, \end{cases}$$

Para todo t en un intervalo cerrado $[a, b]$. Por lo tanto

$$\|\beta_n(t) - \beta(t)\| < \epsilon$$

para cada $n \geq n_0$, lo cual implica que $\beta_n(t) \to \beta(t)$ en norma de operadores para todo $t \in [a, b]$, lo cual implica que en dicho intervalo la convergencia es uniforme. □

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos los operadores $Y_n = iT_n$ y $\widetilde{D_n} = iD_n$, siendo T_n y D_n los operadores de rango finito definidos en (4.2.1) y (4.2.2), respectivamente. Recordemos que cada D_n es un operador diagonal minimizante para T_n, es decir que

$$\|[T_n]\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})^h/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^h)} = \|T_n + D_n\|.$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\|[Y_n]\|_{\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}/\mathcal{D}(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah})} = \left\| Y_n + \widetilde{D_n} \right\| = \|T_n + D_n\|.$$

Definimos la constante

$$\alpha = -\lim_{k\to\infty} d_k = \frac{i}{1-\gamma}, \tag{6.3.1}$$

siendo d_k los definidos en (3.2.2), y consideramos la sucesión $\{Y_n + \widetilde{D_n} + \alpha I_n\}_{n\in N}$ e $I_n = P_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (recordemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es la proyección ortogonal al subespacio generado por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$). Una consecuencia directa de la Proposición 4.7 es que

$$Y_n + \widetilde{D_n} + \alpha I_n \to Y_r + \widetilde{D_0} + \alpha I$$

en norma de operadores cuando $n \to \infty$, ya que allí hemos probado que $T_n + D_n + \alpha I_n \to T_0 + D_0 + \frac{1}{1-\gamma} I$.

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ las curvas parametrizadas como

$$\beta_n(t) = e^{t(Y_n + \widetilde{D_n} + \alpha I_n)} b e^{-t(Y_n + \widetilde{D_n} + \alpha I_n)}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{6.3.2}$$

Notemos que estas curvas pueden considerarse de tipo matriciales, ya que cada operador $Y_n, \widetilde{D_n}, I_n$ no sólo es de rango finito sino que además es una compresión.

Establecemos entonces el siguiente enunciado.

Teorema 6.11. *Sean A y $b \in \mathcal{O}_A$ como en el Teorema 6.3. Sea $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de curvas definidas en 6.3.2 y β la curva definida en* (6.2.4). *Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$*

1. $\begin{cases} \beta_n(0) = b \\ \beta_n'(0) = Y_n b - b Y_n \in (T\mathcal{O}_A)_b. \end{cases}$

2. $\beta_n(t) = e^{t(Y_n + \widetilde{D_n})} b e^{-t(Y_n + \widetilde{D_n})}$ *para todo t, dado que αI_n conmuta con $Y_n + \widetilde{D_n}$.*

3. *Para todo $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2\|[Y_n]\|}, \frac{\pi}{2\|[Y_n]\|} \right]$ se cumple que*

$$\operatorname{long}\left(\beta_n|_{[0,t_0]} \right) = |t_0| \, \|[Y_n]\| = |t_0| \, M_0 = \operatorname{long}\left(\beta|_{[0,t_0]} \right).$$

4. *$\beta_n : [0, t_0] \to \mathcal{O}_A$ con $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2M_0}, \frac{\pi}{2M_0} \right]$ es una curva de longitud mínima en $\mathcal{O}_A$.*

5. *$\beta_n'(0) \to \beta'(0)$ con la norma $\|\cdot\|_b$ de $(T\mathcal{O}_A)_b$.*

Además, por la Proposición 6.10 $\beta_n \to \beta$ uniformemente en norma de operadores para todo $t \in \left[-\frac{\pi}{2M_0}, \frac{\pi}{2M_0} \right]$.

Demostración. La prueba de los items 1, 2 y 3 es análoga a las realizadas en el Teorema 6.3 y en la Proposición 6.5. La igualdad $\|[Y_n]\| = M_0 = \|[Y_r]\|$ se debe a la Proposición 4.2 del Capítulo 4.

Dado que para $n \in \mathbb{N}$ fijo $Y_n + \widetilde{D_n}$ resulta ser un operador compacto minimal, el Teorema 1.43 asegura que β_n es una curva de longitud mínima entre todas las curvas del espacio homogéneo $\mathcal{P} = \{uAu^* : \ u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}$ que unen $\beta_n(0) = b$ con $\beta_n(t)$ para todo $|t| \leq \frac{\pi}{2\left\|Y_n + \widetilde{D_n}\right\|}$. Con lo cual, β_n resulta ser también curva minimal en $\mathcal{O}_A$. Luego, el ítem 4 ha sido probado.

Procederemos a demostrar 5: sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \|Y_n - Y_r\| < \epsilon$. Por lo tanto,

$$\left\|\beta_n'(0) - \beta(0)\right\|_b = \text{ínf}\left\{\|Z\| : Z \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah},\ \delta_b(Z) = (Y_n - Y_r)\, b - b\, (Y_n - Y_r)\right\}$$

$$= \inf_{D \in \mathcal{D}\left(\mathcal{K}(\mathcal{H})^{ah}\right)} \|Y_n - Y_r + D\| \leq \|Y_n - Y_r\| < \epsilon$$

para cada $n \geq n_0$. Se sigue que $\|\beta_n'(0) - \beta(0)\|_b \to 0$ cuando $n \to \infty$, que era lo que queríamos probar. $\square$

Hemos observado que la convergencia $\beta_n \to \beta$ resulta ser uniforme en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2M_0}, \frac{\pi}{2M_0}\right]$. No obstante, las curvas β_n poseen levantada minimal compacta, en tanto su límite β no.

Bibliografía

[1] Andruchow, E.; Larotonda, G.: *The rectifiable distance in the unitary Fredholm group*. Studia Math. 196 (2010), no. 2, 151-178.

[2] Andruchow, E.; Larotonda, G.; Recht, L.; Varela, A.: *A characterization of minimal Hermitian matrices*. Linear Algebra Appl. 436 (2012), no. 7, 2366–2374.

[3] Andruchow, E.; Varela, A.: *Geometry and the Jones projection of a state*. Integral Equations Operator Theory 25 (1996), no. 2, 129–146.

[4] Andruchow, E.; Varela, A.: *States with equivalent supports*. J. Operator Theory 53 (2005), no. 1, 35–48.

[5] Andruchow, E.; Stojanoff, D.: *Geometry of conditional expectations and finite index*. Internat. J. Math. 5 (1994), no. 2, 169–178.

[6] Andruchow, E.; Mata-Lorenzo, L. E.; Mendoza, A.; Recht, L.; Varela, A.: *Minimal Hermitian matrices with fixed entries outside the diagonal*. Rev. Un. Mat. Argentina 49 (2009), no. 2, 17–28.

[7] Andruchow, E.; Mata-Lorenzo, L.; Mendoza, A.; Recht, L.; Varela, A.: *Minimal matrices and the corresponding minimal curves on flag manifolds in low dimension*. Linear Algebra Appl. 430 (2009), no. 8-9, 1906–1928.

[8] Argerami, M.; Stojanoff, D.: *The Weyl group and the normalizer of a conditional expectation*. Integral Equations Operator Theory 34 (1999), no. 2, 165–186.

[9] Bottazzi, T.; Varela, A.: *Best approximation by diagonal compact operators*. Linear Algebra Appl. 439 (2013), no. 10, 3044–3056.

[10] Bottazzi, T. y Varela, A.: *Minimal length curves in unitary orbits of a Hermitian compact operator*. Publicaciones previas del Instituto Argentino de Matemática, 482, (2014).

[11] Corach, G.; Maestripieri, A.; Stojanoff, D.: *Orbits of positive operators from a differentiable viewpoint*. Positivity 8 (2004), no. 1, 31–48.

[12] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L.: *Differential geometry of systems of projections in Banach algebras*. Pacific J. Math. 143 (1990), no. 2, 209–228.

[13] Corach, G.; Porta, H.; Recht, L.: *The geometry of the space of selfadjoint invertible elements in a* C^**-algebra*. Integral Equations Operator Theory 16 (1993), no. 3, 333–359.

[14] Davidson, K.; Power, S.: *Best approximation in* C^**-algebras*. J. Reine Angew. Math. 368 (1986), 43–62.

[15] Durán, C.; Mata-Lorenzo, L.; Recht, L.: *Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a* C^**-algebra. I. Minimal curves*. Adv. Math. 184 (2004), no. 2, 342–366.

[16] Durán, C.; Mata-Lorenzo, L.; Recht, L.: *Metric geometry in homogeneous spaces of the unitary group of a* C^**-algebra. II. Geodesics joining fixed endpoints*. Integral Equations Operator Theory 53 (2005), no. 1, 33–50.

[17] Holmes, R.; Kripke, B.: *Best approximation by compact operators*. Indiana Univ. Math. J. 21 (1971/72), 255–263.

[18] Kadison, R.; Ringrose, J.: *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. Elementary theory*. Graduate Studies in Mathematics, 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., (1983).

[19] Kadison, R.; Ringrose, J.: *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II. Advanced theory*. Corrected reprint of the 1986 original. Graduate Studies in Mathematics, 16. American Mathematical Society, Providence, R.I., (1997).

[20] Kloubouk, A. y Varela, A.: *Minimal* 3×3 *Hermitian matrices*. Publicaciones previas del Instituto Argentino de Matemática, 455, (2012).

[21] Gohberg, I.; Krein, M.: *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18 American Mathematical Society, Providence, R.I., (1969).

[22] Porta, H.; Recht, L.: *Spaces of projections in a Banach algebra*. Acta Cient. Venezolana 38 (1987), no. 4, 408–426 (1988).

[23] Rieffel, M.: *Leibniz seminorms and best approximation from* C^*- *subalgebras*. Sci. China Math. 54 (2011), no. 11, 2259–2274.

[24] Simon, B.: *Trace ideals and their applications*. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 120. American Mathematical Society, Providence, R.I., (2005).

[25] Reed, M.; Simon, B.: *Methods of modern mathematical physics*. I. Functional analysis. Second edition. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, (1980).