UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas

Soluciones reducidas de ecuaciones tipo Douglas y proyecciones oblicuas

María Celeste Gonzalez

Director: Gustavo Corach

Codirector: Demetrio Stojanoff

2009

Agradecimientos

Muchas personas han hecho posible, de uno u otro modo, que haya podido finalizar la redacción de esta tesis. A todas ellas quiero expresar mi más profundo agradecimiento; en particular, deseo destacar mi gratitud:

A Gustavo Corach, por haberme dado la oportunidad de formar parte de su grupo de trabajo casi sin conocerme, por guiarme durante estos años, por su ayuda, por su inagotable paciencia y su generosidad conmigo desde que llegué a Buenos Aires. Finalmente, por la libertad con la que siempre me permitió trabajar y por haber priorizado constantemente el aspecto humano al académico, escuchándome y brindándome palabras de aliento en los momentos más difíciles.

A Demetrio Stojanoff, por el valioso tiempo dedicado en mi llegada al IAM para que pueda completar el estudio en Análisis Funcional. Su empujón inicial fue para mi muy importante.

A mis padres, Julio y Olga; a mi hermana, Noelia; a mi hermano Leonardo y su familia: Marcela, Martina y Nazarena, por apoyarme en mis decisiones, por su comprensión y su acompañamiento diario a lo largo de estos años. Porque a pesar de los kilómetros que nos separan, supieron estar siempre junto a mi. Porque sin ellos nada de ésto hubiese sido posible.

A mis tías del corazón, Silvia Mercader y Nora García, porque encontrarlas en mi escuela secundaria marcó mi vida. Por la hermosa amistad que creció con el tiempo, por acompañarme y estar siempre presentes. A Silvia le debo un agradecimiento muy especial; porque mi viaje por el camino de las matemáticas comenzó en sus maravillosas clases y en aquellas tantas horas que nos dedicó cuando, entre mates, risas y charlas, nos juntábamos a resolver problemas de matemática para participar en las olimpíadas. Simplemente *gracias* por ser quien me inspiró a estudiar matemática y por enseñarme a ser una mejor persona cada día. Este trabajo es en gran parte suyo también.

A Valeria Castaño, Cecilia Ferrari, Laura Poblete y David Allmang, porque a pesar de la distancia supimos conservar nuestra amistad. Gracias por acompañarme durante estos años.

A Raquel Crescimbeni, por su inmensa generosidad conmigo siempre. Por alentar este proyecto desde los años en que cursaba la Licenciatura en la Universidad Nacional del Comahue y por su incondicional apoyo.

A Irene Mosconi, por haberme abierto las puertas para que pueda comenzar con este proyecto.

A Cristian Conde, Guillermina Fongi y Laura Arias, hermosas personas que me han brindado contención afectiva y emocional durante estos años. *Gracias* por haber estado *siempre* presentes. Quiero mencionar un agradecimiento especial para Laura, pues con ella trabajamos en conjunto en la mayor parte de los temas de esta tesis, sin su presencia, muy poco de esto podría haberse hecho.

A Eduardo Chiumiento, Eugenia Di Iorio, Francisco Martínez Pería, Jorge Antezana, Mariano Ruiz y Pedro Massey, por su amistad, su compañerismo y por hacer de la tarea diaria un momento continuamente divertido. Quiero mencionar un agradecimiento especial para Jorge pues los temas del último capítulo de esta tesis fueron desarrollados con su colaboración.

A Cecilia Farías, Alicia Ferraté, Verónica Rodriguez y Adrián Topet, quienes integran el grupo de apoyo técnico del IAM, por colaborar en la tarea diaria.

Por último, quiero agradecer al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Universidad Nacional del Comahue, por ser el soporte económico que me permitió realizar el doctorado.

A mis padres, Olga y Julio,

a quienes les debo todo;

A mis hermanos, Leonardo y Noelia,

por los hermosos años compartidos;

A Silvia Mercader,

por enseñarme que un mundo mejor, es posible.

Lo que sabemos es una gota de agua,
lo que ignoramos es el océano.

Isaac Newton (1642-1727).

Introducción

Sean $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert complejos y $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ el espacio de Hilbert de las sucesiones complejas cuadrado-sumables. Los temas que se desarrollan en esta tesis están vinculados, de diferente modo, al estudio de ecuaciones de operadores del tipo:

$$BX = C, \tag{1}$$

donde $B : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ y $C : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ son operadores lineales y acotados; como así también de ecuaciones de operadores de la clase:

$$T^*X^*XT = I, \tag{2}$$

donde $T : \ell^2 \to \mathcal{H}$ es un operador lineal, acotado e inversilble; I es el operador identidad sobre ℓ^2 y el operador incógnita $X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ está sujeto a la restricción de ser lineal, acotado e inversible. En esta última ecuación consideramos que el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es separable.

Sea $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ el conjunto de operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$, $L(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $L(\mathcal{H})^+$ el cono de los operadores semidefinidos positivos de $L(\mathcal{H})$ y $Gl(\mathcal{H})$ el grupo de los operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$. Dado $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, el rango de T se denota $R(T)$ y su núcleo se denota $N(T)$.

En la primera parte de esta tesis centramos la atención en el estudio de proyecciones simetrizables para un operador $A \in L(\mathcal{H})^+$; es decir, proyecciones Q que verifican la condición

$$AQ = Q^*A. \tag{3}$$

La igualdad (3) indica que la proyección Q es autoadjunta con respecto al semi producto interno

$$\langle\ ,\ \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C},\ \ \langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle\,.$$

Luego, tales proyecciones se denominan *proyecciones A-autoadjuntas*. Los operadores simetrizables con respecto a un operador semidefinido positivo han sido objeto de estudio de diferentes matemáticos. El primero de los trabajos correspondientes a un estudio metódico sobre la teoría de operadores simetrizables pertenece a M. G. Krein [41]. Luego siguieron trabajos de A. C. Zaanen [60], W.T. Reid [55], P. D. Lax [43] y J. Dieudonné [24]. En trabajos más recientes, P. Cojuhari y A.

Gheondea [16], S. Hassi, Z. Sebestyén y H. S. V. De Snoo [38] extendieron la teoría de simetrizabilidad a operadores no acotados $T : \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, con semi productos internos $\langle\ ,\ \rangle_A$ sobre $\mathcal{H}$ y $\langle\ ,\ \rangle_B$ sobre $\mathcal{K}$, donde $B \in L(\mathcal{K})^+$. Estos trabajos muestran la existencia de una íntima relación entre operadores simetrizables para A y operadores autoadjuntos en $L(\mathcal{R}(A^{1/2}))$; aquí $\mathcal{R}(A^{1/2})$ denota el espacio de Hilbert definido por el subespacio $R(A^{1/2})$ con el producto interno $(A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta) := \langle P\xi, P\eta\rangle$, donde P es la proyección ortogonal sobre la clausura del rango de A. El enfoque planteado en esta tesis no se basa en el vínculo que existe entre operadores simetrizables para A y operadores en $L(\mathcal{R}(A^{1/2}))$.

Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ y un subespacio cerrado $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ se dice que el par $(A, \mathcal{S})$ es *compatible* si existe alguna proyección A-autoadjunta con rango $\mathcal{S}$. La noción de compatibilidad fue introducida por G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff [18] y ha sido estudiada para diferentes clases de operadores autoadjuntos A (A inyectivo, A de rango cerrado, A positivo, etc.). Las nociones de proyección y ángulos entre subespacios guardan una estrecha relación. En particular, la compatibilidad de un par $(A, \mathcal{S})$ es equivalente a que el ángulo de Dixmier (ver definición en el Capítulo 1) entre los subespacios $\mathcal{S}$ y $(A\mathcal{S})^\perp$ es no nulo. Por otro lado, en [18] se prueba que la compatibilidad de un par $(A, \mathcal{S})$ es equivalente a la existencia de soluciones para la ecuación $P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}X = P_{\mathcal{S}}A$, donde $P_{\mathcal{S}}$ denota la proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}$; o bien, si se consideran las representaciones matriciales de $A \in L(\mathcal{H})^+$ y de una proyección Q con rango $\mathcal{S}$ bajo la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$, a saber,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que Q es A-autoadjunta si y sólo si $ay = b$. Estas últimas afirmaciones muestran una relación directa entre la teoría de compatibilidad y la existencia de soluciones para ecuaciones como las definidas en (1). Tales ecuaciones se denominan *ecuaciones tipo Douglas* pues fueron estudiadas por R. G. Douglas [26] en su teorema sobre inclusión de rangos y factorización de operadores. El teorema de Douglas provee condiciones suficientes y necesarias para poder encontrar soluciones de una ecuación $BX = C$ donde B y C son operadores acotados entre adecuados espacios de Hilbert; en tal caso, garantiza la existencia de una única solución D tal que $R(D) \subseteq N(B)^\perp$. Llamamos a esta solución, *la solución reducida de Douglas*. Si el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible, la única proyección A-autoadjunta con rango $\mathcal{S}$ determinada por la solución reducida de Douglas de la ecuación $ax = b$ se denomina $P_{A,\mathcal{S}}$; esto es,

$$P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde d es la solución reducida de Douglas de la ecuación $ax = b$. El elemento $P_{A,\mathcal{S}}$ tiene propiedades que lo distinguen entre todas las proyecciones A-autoadjuntas con rango $\mathcal{S}$; tales propiedades han sido muy bien descritas en los trabajos de G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff [18], [19], [20] y [21].

El vínculo entre compatibilidad y ecuaciones tipo Douglas nos motivó a profundizar el estudio de estas últimas. En particular, extendimos la noción de solución reducida de Douglas de una ecuación $BX = C$ reemplazando $N(B)^{\perp}$ por cualquier complemento cerrado de $N(B)$. Denominamos a estas nuevas soluciones, *soluciones reducidas*. Nuestro objetivo es estudiar las propiedades que distinguen a las soluciones reducidas. En la descripción de las soluciones reducidas, las inversas generalizadas no acotadas y la noción de ángulo entre subespacios son elementos fundamentales.

La compatibilidad de un par $(A, \mathcal{S})$ significa que el conjunto

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) := \{Q \in L(\mathcal{H}) : Q^2 = Q,\ R(Q) = \mathcal{S} \text{ y } AQ = Q^*A\}$$

es no vacío. En tal caso, el concepto de solución reducida conduce naturalmente a distinguir los elementos del conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ que surgen mediante soluciones reducidas de la ecuación $ax = b$. A tales proyecciones las llamamos *proyecciones reducidas* y son objeto de estudio en esta tesis. Por otro lado, estudiamos propiedades métricas de proyecciones en $L(\mathcal{H})$ cuando se reemplaza la norma uniforme de operadores por las seminormas

$$\|T\|_A = \sup\{\|T\xi\|_A : \|\xi\|_A = 1\}$$

y

$$\|T\|'_A = \sup\{\|T\xi\|_A : \ \xi \in \overline{R(A)},\ \|\xi\|_A = 1\},$$

donde $\|\xi\|_A^2 = \langle \xi, \xi \rangle_A$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$. Este estudio también se relaciona con el estudio de soluciones reducidas de ecuaciones tipo Douglas pues un elemento clave para obtener los resultados consiste en la elección de un operador A-adjunto conveniente ($W \in L(\mathcal{H})$ es un *A-adjunto* de $T \in L(\mathcal{H})$ si $AW = T^*A$), a saber, el operador A-adjunto determinado por la solución reducida de Douglas de la ecuación $AX = T^*A$.

En la segunda parte de esta tesis estudiamos un problema de aproximación de marcos que tiene su génesis en la resolución de ecuaciones como las definidas en (2). Las soluciones de esta ecuación guardan una estrecha relación con los procesos de ortonormalización pues, si T es el operador asociado a una base $\mathcal{B} = \{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (es decir, si $\mathcal{E} = \{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la base ortonormal canónica de ℓ^2, el operador $T \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ está definido por $T\epsilon_i = \eta_i$) entonces toda solución $D \in Gl(\mathcal{H})$ de la ecuación (2) satisface que $\{DT\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. En particular, si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita, la solución $D = |T^*|^{-1}$ define el *proceso de ortonormalización simétrica* estudiado por R. Landshoff [42]. La base ortonormal obtenida con este proceso tiene como operador asociado al operador unitario de la descomposición polar de T, a saber, $|T^*|^{-1}T$. Landshoff introdujo la ortonormalización simétrica con el propósito de ortonormalizar un conjunto de vectores sin perder la simetría existente entre los elementos. Luego, P. O. Löwdin [43] mostró que el proceso de ortonormalización simétrica tiene una propiedad de minimalidad que lo destaca entre los demás procesos. Más precisamente, probó que si $T \in Gl(\mathbb{C}^n)$ es el operador asociado a una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ y U es el operador unitario de su descomposición polar entonces

$$\|T - U\|_2 = \text{mín}\{\|T - W\|_2 : W \in L(\mathbb{C}^n) \text{ unitario}\}, \tag{4}$$

donde $\| \ . \ \|_2$ denota la norma Frobenius. La propiedad de minimalidad (4) fue extendida para la clase de normas Schatten-p, para $1 \leq p < \infty$, por J. Aiken, J.Erdos y J. Goldstein [1], [2] para espacios de dimensión finita e infinita, respectivamente.

Con el desarrollo de la teoría de marcos para un espacio de Hilbert, introducida por R. J. Duffin y A. C. Schaeffer en 1952, el problema de aproximación (4) fue extendido al contexto de marcos, pues este concepto generaliza la noción de una base para un espacio de Hilbert. Una sucesión $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ es un *marco* para $\mathcal{H}$ si existen constantes $a, b > 0$ tales que, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ vale

$$a\|\xi\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \xi, \xi_n\rangle|^2 \leq b\|\xi\|.$$

Si $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco y $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denota la base ortonormal canónica de ℓ^2, el operador $T \in L(\ell^2, \mathcal{H})$, definido por $T(\epsilon_n) = \xi_n$ es el operador asociado al marco y se denomina *operador de síntesis*. El *operador de marco* es $S = TT^* \in L(\mathcal{H})^+$, es decir, $S\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \xi_n\rangle \, \xi_n$ y es inversible. La principal característica que presentan estas sucesiones está dada por la siguiente descomposición:

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \xi, S^{-1}\xi_i \right\rangle \xi_i.$$

Luego, todo elemento de $\mathcal{H}$ admite una representación mediante una «combinación lineal infinita» de los elementos del marco. Por lo tanto, los marcos son vistos como «bases generalizadas». Si el operador de marco es $S = I$, el marco se denomina un *marco de Parseval* y su operador de síntesis es una co-isometría, es decir $TT^* = I$. M. Frank, V. Paulsen y T. Tiballi [31] estudiaron el problema (4) en el contexto de marcos. Más precisamente, si $L^2(\mathcal{H})$ denota la clase de los operadores Hilbert-Schmidt de $L(\mathcal{H})$ y el operador de marco TT^* es de la forma $I + H$, donde $H \in L^2(\mathcal{H})$, entonces

$$\| \, |T - U| \, \|_2 = \text{mín}\{\| \, |T - W| \, \|_2 : W \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \text{ y } WW^* = I_{\mathcal{H}}\}.$$

En esta tesis presentamos una extensión del resultado de Frank, Paulsen y Tiballi a la clase de normas simétricas definidas sobre ideales de operadores compactos de $L(\mathcal{H})$.

A continuación describimos, brevemente, el contenido de esta tesis. En cada capítulo será incorporado el material preliminar requerido para su desarrollo.

Capítulo 1. Introducimos notación, definiciones y resultados básicos que utilizaremos durante este trabajo. En particular, exponemos las definiciones de ángulo de Friedrichs y ángulo de Dixmier entre subespacios y recopilamos algunos de los resultados básicos que involucran a estas nociones y que citaremos en reiteradas oportunidades en esta monografía. Por otro lado, presentamos el teorema de factorización de operadores e inclusión de rangos de R. G. Douglas.

Capítulo 2. El principal objetivo de este capítulo es el estudio de soluciones reducidas de una ecuación tipo Douglas. Para su descripción necesitamos trabajar con pseudoinversas no acotadas de un operador en $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$; en particular, trabajamos con inversas internas, inversas externas y la inversa de Moore-Penrose. Por tal motivo, al comienzo del capítulo presentamos una selección de resultados conocidos para pseudoinversas y otros resultados nuevos que generalizan propiedades conocidas para la inversa (acotada) de Moore-Penrose. Dado $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, una inversa interna de T es acotada si y sólo si T tiene rango cerrado; para tales T podemos caracterizar diferentes clases de pseudoinversas mediante soluciones de ciertas ecuaciones tipo Douglas. Este análisis se desarrolla en el Teorema 2.2.1. Como consecuencia de nuestro enfoque obtenemos un nuevo criterio para determinar la existencia y unicidad de la inversa de Moore-Penrose de un operador de rango cerrado.

Por otro lado, en el Teorema 2.3.1 justificamos la existencia de solución reducida de una ecuación tipo Douglas. Más precisamente, probamos que si $B \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ y $C \in L(\mathcal{G},\mathcal{K})$ son tales que la ecuación $BX = C$ admite una solución y $\mathcal{M}$ es un complemento topológico de $N(B)$ entonces existe una única solución $X_{\mathcal{M}} \in L(\mathcal{G},\mathcal{H})$ de la ecuación $BX = C$ tal que $R(X_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{M}$. En la descripción de las soluciones reducidas intervienen distintos tipos de pseudoinversas del operador B; ya que no requerimos la hipótesis $R(B)$ cerrado, nos vemos forzados a trabajar con pseudoinversas no acotadas. Con respecto al estudio de este tipo de soluciones, el resultado principal de este capítulo, el Teorema 2.3.8, afirma que entre todas las soluciones de una ecuación $BX = C$, las soluciones reducidas son aquellas que pueden ser factorizadas como $B'C$ para alguna inversa generalizada B' de B tal que $R(B'B)$ es cerrado. Vemos además que este conjunto coincide con el conjunto de aquellas soluciones Y tales que $\overline{R(Y)}$ tiene ángulo de Dixmier positivo con $N(B)$. Luego, aplicamos estos resultados al problema de caracterización de soluciones positivas de ecuaciones tipo Douglas. Este problema fue estudiado inicialmente por Z. Sebestyén [57]. Recientemente, ha sido resuelto por A. Dajić y J. J. Koliha [22] para operadores de rango cerrado. En el Teorema 2.3.13 extendemos el resultado de Dajić y Koliha a operadores de rango no cerrado. Los resultados desarrollados en este capítulo están contenidos en los trabajos [4] y [8].

Capítulo 3. En este capítulo nos dedicamos al estudio de proyecciones reducidas. Si el par $(A,\mathcal{S})$ es compatible, una proyección $Q \in L(\mathcal{H})$ con rango $\mathcal{S}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ si y sólo si su núcleo es un subespacio de $\mathcal{S}^{\perp_A}$, el subespacio A-ortogonal de $\mathcal{S}$. En la Proposición 3.2.2 damos una descripción más detallada del núcleo de cada elemento del conjunto $\mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ la cual afirma que $Q \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ si y sólo si $N(Q) = \mathcal{S}^{\perp}_{A} \cap \mathcal{M}$ para algún complemento topológico $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S} \cap N(A)$. Esta caracterización, junto con los resultados probados en el Capítulo 2 para soluciones reducidas de una ecuación tipo Douglas, permite clasificar a la clase de proyecciones reducidas. Más precisamente, en el Teorema 3.2.6, probamos que las proyecciones reducidas con rango $\mathcal{S}$ son aquellas proyecciones $Q \in L(\mathcal{H})$ con rango $\mathcal{S}$ tales que $N(Q) = \mathcal{S}^{\perp}_{A} \cap \mathcal{M}$ para algún complemento topológico $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S} \cap N(A)$ y el coseno del ángulo de Friedrichs entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{S}$ es nulo. Este conjunto coincide también con el de las proyecciones $Q \in L(\mathcal{H})$ con rango $\mathcal{S}$ tales que los subespacios $\overline{R(QP_{\mathcal{S}^{\perp}})}$ y $\mathcal{S} \cap N(A)$ tienen ángulo de Dixmier positivo. El elemento $P_{A,\mathcal{S}}$ es, en particular, una proyección reducida; en el último resultado de este capítulo lo exhibimos como una solución reducida de una ecuación tipo Douglas y conectamos las soluciones reducidas de esta ecuación con proyecciones A-autoadjuntas. Algunos de los resultados presentados en este capítulo están contenidos en [8].

Capítulo 4: El objetivo de este capítulo es estudiar propiedades métricas de proyecciones de $L(\mathcal{H})$ cuando se miden distancias con respecto a las seminormas de operadores $\| \cdot \|_A$ y $\| \cdot \|'_A$. Un operador $W \in L(\mathcal{H})$ se dice un operador A-adjunto de $T \in L(\mathcal{H})$ si $AW = T^*A$. Más aún, T se dice A-autoadjunto si $AT = T^*A$. Por lo tanto, $T \in L(\mathcal{H})$ admite un operador A-adjunto si y sólo si la ecuación $AX = T^*A$ tiene solución. En tal caso, existe un operador A-adjunto distinguido: la solución reducida de Douglas de la ecuación $AX = T^*A$, que denotaremos $T^\sharp$. Este operador posee propiedades similares a las que satisface el operador adjunto clásico y de su definición se desprende que es el único operador A-adjunto de T cuyo rango está contenido en $\overline{R(A)}$. Si $T \in L(\mathcal{H})$ admite un operador A-adjunto entonces T resulta acotado para las seminormas de operadores $\| \cdot \|_A$ y $\| \cdot \|'_A$; más precisamente, si denotamos

$$L_A(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : T \text{ admite un } A\text{-adjunto}\};$$

$$L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : \|T\|_A < \infty\};$$

$$L^A(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : \|T\|'_A < \infty\},$$

entonces valen las siguientes inclusiones (Proposición 4.3.3):

$$L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \subseteq L^A(\mathcal{H}) \subsetneq L(\mathcal{H}). \tag{5}$$

Más aún, si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $\|T\|_A = \|T\|'_A$. Por otro lado, en la Proposición 4.3.6 probamos que si $T \in L^A(\mathcal{H})$ entonces $A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger$ es acotado y vale

$$\|T\|'_A = \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|, \tag{6}$$

donde $(A^{1/2})^\dagger$ denota la inversa de Moore-Penrose de $A^{1/2}$. La elección del operador A-adjunto distinguido $T^\sharp$, el modo en que este operador actúa sobre el conjunto de las proyecciones A-autoadjuntas, las inclusiones dadas en (5) y la identidad (6) son elementos fundamentales para extender las propiedades métricas que poseen las proyecciones de $L(\mathcal{H})$ cuando la métrica que induce la norma espectral de operadores se reemplaza por las métricas que inducen las seminormas $\| \cdot \|_A$ y $\| \cdot \|'_A$. Otra herramienta significativa está contenida en la Proposición 4.4.2, donde probamos que una proyección Q con rango contenido en $\overline{R(A)}$ es A-autoadjunta si y sólo si $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección ortogonal en $L(\mathcal{H})$. En el transcurso de este capítulo veremos que las proyecciones A-autoadjuntas satisfacen propiedades métricas análogas a las que satisfacen las proyecciones ortogonales y que extensiones inmediatas de ciertas propiedades en las que intervienen proyecciones de $L^A(\mathcal{H})$ son falsas. Los resultados principales están contenidos en las Proposiciones 4.4.3 y 4.4.6, en los Teoremas 4.4.8 y 4.4.9 y en la Proposición 4.4.13. Por otro lado, en la última sección de este capítulo extendemos a las A-seminormas un resultado de V. Ljance [44] que relaciona la norma de una proyección con el ángulo entre su rango y su núcleo. Para ésto, introducimos una definición conveniente de ángulos entre subespacios dependiendo del semiproducto $\langle\ ,\ \rangle_A$. Algunos de los resultados contenidos en este capítulo han sido publicados en [5].

Capítulo 5: En este capítulo tratamos el problema de aproximar un marco por marcos de Parseval en ideales simétricamente normados de operadores compactos. Tal problema tiene su origen en el proceso de ortonormalización simétrica de una base de $\mathbb{C}^n$. Por este motivo, comenzamos el capítulo con una descripción del proceso de ortonormalización simétrica y analizamos sus propiedades, las cuales motivan los temas que estudiamos en esta parte de la tesis. También desarrollamos un breve resumen de la teoría de marcos para un espacio de Hilbert y de ideales simétricos de $L(\mathcal{H})$. En la sección 5.4 nos abocamos al tema que nos ocupa en este capítulo. Si $L_0(\mathcal{H})$ denota el ideal bilátero de operadores compactos de $L(\mathcal{H})$, $L_{00}(\mathcal{H})$ denota el ideal de operadores de rango finito de $L(\mathcal{H})$ e $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero de $L(\mathcal{H})$ entonces, por el teorema de Calkin, vale $L_{00}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H}) \subseteq L_0(\mathcal{H})$. Por otro lado, un ideal bilátero $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ de $L(\mathcal{H})$ se dice *simétricamente normado* si sobre $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ se define una norma simétrica que lo convierte en un espacio de Banach. Las clases de operadores Schatten-p de $L(\mathcal{H})$, para $1 \leq p < \infty$, son ejemplos de ideales simétricamente normados de $L(\mathcal{H})$. Otro ejemplo de ideales simétricamente normados son los ideales definidos por las normas de Ky-Fan (ver definición en el Capítulo 5). El resultado principal de este capítulo, el Teorema 5.4.2, afirma que si $T \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ es el operador de síntesis de un marco Ξ para $\mathcal{H}$ y $I - TT^* \in L_0(\mathcal{H})$ entonces

$$\|\,|T-U|\,\|_{(k)} = \text{mín}\{\|\,|T-W|\,\|_{(k)} : W \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \ \text{ y } \ WW^* = I_{\mathcal{H}}\} < \infty,$$

donde $U \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ es la coisometría de la descomposición polar de T y $\|\cdot\|_{(k)}$ denota la k-ésima norma de Ky Fan. Luego, la respuesta al problema de aproximación de un marco por marcos de Parseval en ideales simétricamente normados se obtiene como consecuencia del Teorema 5.4.2 y de la Propiedad de dominancia de Ky-Fan (Proposición 5.3.1).

Índice general

Capítulo 1

Nociones preliminares

1.1. Notación y resultados preliminares

A lo largo de esta tesis $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ denotarán espacios de Hilbert complejos con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Si $\xi \in \mathcal{H}$ entonces $\|\xi\| := \langle \xi, \xi \rangle^{1/2}$ indica la norma del vector ξ. El espacio de todos los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ se denota $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Dado $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $\|T\|$ denota la norma uniforme o espectral de T, esto es,

$$\|T\| := \sup\{\|T\xi\| : \xi \in \mathcal{H} \text{ y } \|\xi\| = 1\}.$$

El álgebra $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ es abreviada por $L(\mathcal{H})$ y $L(\mathcal{H})^+$ denota el cono de los operadores positivos de $L(\mathcal{H})$, es decir, $L(\mathcal{H})^+ := \{T \in L(\mathcal{H}) : \langle T\xi, \xi \rangle \geq 0\ \forall \xi \in \mathcal{H}\}$. También escribiremos $T \geq 0$ para indicar que el operador T es semidefinido positivo. Más aún, dados $T, R \in L(\mathcal{H})$ la notación $T \leq R$ significa que $\langle T\xi, \xi \rangle \leq \langle R\xi, \xi \rangle$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Por otro lado, $Gl(\mathcal{H})$ denota el grupo de operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$, $Gl(\mathcal{H})^+ = Gl(\mathcal{H}) \cap L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ el grupo de los operadores unitarios de $L(\mathcal{H})$. El subconjunto de $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ de los operadores de rango cerrado se denota $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Además, $\mathcal{Q}$ denota el subconjunto de $L(\mathcal{H})$ constituído por todas las proyecciones (es decir, idempotentes). Dado un subespacio cerrado $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ denota el subconjunto de $\mathcal{Q}$ de todas las proyecciones con imagen $\mathcal{S}$ y $P_{\mathcal{S}}$ denota la única proyección autoadjunta sobre $\mathcal{S}$.

La clausura de un subespacio $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ se denota $\overline{\mathcal{W}}$ y su complemento ortogonal es $\mathcal{W}^{\perp}$. Dados dos subespacios $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ tales que $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{0\}$, la suma directa $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ se denota por $\mathcal{W}_1 \dot{+} \mathcal{W}_2$. Si además, $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1^{\perp}$ entonces se denota $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ la suma directa ortogonal entre $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$. La diferencia ortogonal entre $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ se denota $\mathcal{W}_1 \ominus \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2^{\perp}$. Por otro lado, si $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son vectores de $\mathcal{H}$ entonces el subespacio generado por ellos se denota $gen\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

Para todo $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ se denota el rango de T por $R(T)$, el núcleo de T por $N(T)$ y el operador adjunto de T por T^*. Además se denota, indistintamente, por I o 1, al operador identidad en $L(\mathcal{H})$. Si $T \in L(\mathcal{H})^+$, la única raíz cuadrada positiva de T se denota $T^{1/2}$. Por otro lado, la descomposición polar de $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ se denota $T = U|T|$, donde $U \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es una isometría parcial tal que $U^*U = P_{\overline{R(T^*)}}$ y $UU^* = P_{\overline{R(T)}}$ y $|T|$ indica el módulo del operador T, es decir, $|T| = (T^*T)^{1/2}$. La descomposición polar a derecha es $T = |T^*|U$, donde U es la isometría parcial de antes. Por otro lado, si $\mathcal{T}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{S}$ es un complemento algebraico de $\mathcal{T}$ (es decir, $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{T} = \mathcal{H}$) entonces $Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}}$ denota la única proyección oblicua (es decir, no necesariamente ortogonal) con $R(Q) = \mathcal{S}$ y $N(Q) = \mathcal{T}$.

Utilizamos el símbolo $\square$ para indicar el final de una demostración y el símbolo $\triangle$ para indicar el final de una observación.

Finalizamos esta sección enunciando dos resultados elementales que serán utilizados a lo largo de esta tesis.

Lema 1.1.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces:*

1. $N(A) = N(A^{1/2})$.
2. $R(A) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A)}$.
3. $R(A)$ *es cerrado si y sólo si* $R(A) = R(A^{1/2})$.

Demostración.

1. Es claro que $N(A^{1/2}) \subseteq N(A)$. Ahora, si $\xi \in N(A)$ entonces $A^{1/2}\xi \in R(A^{1/2}) \cap N(A^{1/2}) = R(A^{1/2}) \cap R(A^{1/2})^{\perp} = \{0\}$. Es decir, $\xi \in N(A^{1/2})$ y así $N(A) = N(A^{1/2})$.

2. La inclusión $R(A) \subseteq R(A^{1/2})$ es inmediata. Sea $\xi = \eta + \kappa \in \mathcal{H}$, donde $\eta \in N(A)$ y $\kappa = \lim_{n\to\infty} A^{1/2}\mu_n \in \overline{R(A^{1/2})} = N(A^{1/2})^{\perp} = N(A)^{\perp}$. Luego $A^{1/2}\xi = \lim_{n\to\infty} A\mu_n \in \overline{R(A)}$ y esto prueba la segunda inclusión.

3. Si $R(A)$ es cerrado, por el ítem anterior vale que $R(A) = R(A^{1/2})$. Recíprocamente, si $R(A) = R(A^{1/2})$ entonces para cada $\xi \in N(A)^{\perp}$ existe $\eta \in N(A)^{\perp}$ tal que $A^{1/2}\xi = A\eta$. Luego $A^{1/2}(\xi - A^{1/2}\eta) = 0$ y entonces $\xi = A^{1/2}\eta \in R(A^{1/2})$. Por lo tanto $\overline{R(A^{1/2})} \subseteq R(A^{1/2})$ y así

$A^{1/2}$ tiene rango cerrado. Ahora, por hipótesis, $R(A) = R(A^{1/2})$ entonces $\overline{R(A)} \subseteq R(A) \subseteq \overline{R(A)}$, es decir, $R(A)$ es cerrado. $\square$

Lema 1.1.2. *Sea $\mathcal{T}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ un complemento algebraico de $\mathcal{T}$. Entonces $Q = Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}}$ es acotada si y sólo si el subespacio $\mathcal{S}$ es cerrado.*

Demostración. Si la proyección Q es acotada, es inmediato que $R(Q) = \mathcal{S}$ es cerrado. Recíprocamente, supongamos que $R(Q)$ es cerrado. Para probar que la proyección Q es acotada es suficiente mostrar que Q tiene gráfico cerrado. Sea $\{\xi_n\} \subseteq \mathcal{H}$ tal que $\xi_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \xi$ y $Q\xi_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \eta \in R(Q)$, pues $R(Q)$ es cerrado. Luego $Q\eta = \eta$. Entonces $\xi_n - Q\xi_n = (I - Q)\xi_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \xi - \eta \in N(Q)$ pues $N(Q)$ es cerrado. Por lo tanto, $Q(\xi - \eta) = 0$ y así $\eta = Q\xi$; en consecuencia, Q tiene gráfico cerrado y así resulta acotado. $\square$

1.2. Operadores densamente definidos

En algunas ocasiones trabajaremos con operadores lineales $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ que no están definidos en todo elemento de $\mathcal{H}$, en cuyo caso denotaremos por $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{H}$ a su dominio. Si $\mathcal{D}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$ y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ es acotado sobre $\mathcal{D}(T)$ entonces T admite una única extensión a $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$; tal extensión se denota por $\overline{T}$ y vale $\|\overline{T}\| = \|T\|$. Si $T_1 : \mathcal{D}(T_1) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, se dice que T_1 es una **extensión** de T si $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(T_1)$ y $T_1\xi = T\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{D}(T)$. En símbolos esto se denota $T \subset T_1$. Por otro lado, la noción de un operador adjunto se puede extender al caso no acotado de la siguiente manera: dado un operador $T : \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, su operador adjunto T^* se define como el operador $T^* : \mathcal{D}(T^*) \subseteq \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, donde

$$\mathcal{D}(T^*) = \{\xi \in \mathcal{K} : \text{ existe } \eta \in \mathcal{H} \text{ tal que } \langle T\kappa, \xi\rangle = \langle \kappa, \eta\rangle \, \forall \kappa \in \mathcal{D}(T)\}$$

y $T^*\xi = \eta$. Simples cálculos muestran que si $\mathcal{D}(T^*)$ es denso entonces $\overline{T} = (T^*)^*$. Luego, como consecuencia, si T y R son operadores lineales acotados densamente definidos entonces:

i. $\overline{T^*} = \overline{T}^* = T^*$;

ii. Si $T = R^*R$ entonces $\overline{T} = \overline{R^*}\,\overline{R}$.

1.3. Ángulos entre subespacios

Una noción que está naturalmente relacionada a las proyecciones oblicuas es la de ángulos entre subespacios. Aquí trabajaremos con dos definiciones de ángulos que no son equivalentes pero que guardan una relación entre sí. Dados dos subespacios cerrados $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ de $\mathcal{H}$, el **ángulo de Dixmier** entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ fue definido en [25] como el ángulo $\theta_0(\mathcal{S},\mathcal{T}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno es

$$\cos_0(\mathcal{S},\mathcal{T}) := \sup\{|\langle \xi,\eta\rangle| : \xi \in \mathcal{S}, \eta \in \mathcal{T} \text{ y } \|\xi\| \leq 1,\ \|\eta\| \leq 1\}. \tag{1.1}$$

La definición anterior es la definición más natural que existe para medir ángulos entre subespacios ya que considera el menor ángulo entre pares de rectas, una en $\mathcal{S}$ y otra en $\mathcal{T}$. Sin embargo, esta definición no es buena cuando los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ tienen intersección no trivial pues, en tal caso, el ángulo entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ sería nulo. La definición de Friedrichs, que enunciamos a continuación, es más general que la de Dixmier y contempla esta situación. El **ángulo de Friedrichs** [32] entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ es el ángulo $\theta(\mathcal{S},\mathcal{T}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno es

$$\cos(\mathcal{S},\mathcal{T}) := \sup\{|\langle \xi,\eta\rangle| : \xi \in \mathcal{S}\cap(\mathcal{S}\cap\mathcal{T})^{\perp}, \eta \in \mathcal{T}\cap(\mathcal{S}\cap\mathcal{T})^{\perp} \text{ y } \|\xi\| \leq 1,\ \|\eta\| \leq 1\}.$$

Claramente, cuando $\mathcal{S}\cap\mathcal{T} = \{0\}$ ambos ángulos coinciden. El seno de los ángulos definidos arriba es

$$sen_0(\mathcal{S},\mathcal{T}) = (1-\cos_0(\mathcal{S},\mathcal{T})^2)^{1/2} \text{ y } sen(\mathcal{S},\mathcal{T}) = (1-\cos(\mathcal{S},\mathcal{T})^2)^{1/2},$$

respectivamente. Los resultados que presentamos a continuación serán utilizados frecuentemente a lo largo de este trabajo. El lector interesado en las demostraciones de estos hechos y en más resultados referidos a ángulos entre subespacios puede consultar el trabajo de F. Deutsch [23] en el que se exponen diferentes resultados sobre ambas definiciones y también se muestran diversas relaciones que existen entre ellas. El libro de T. Kato [40] es también una excelente fuente de consulta sobre este tema. Los últimos dos items de la siguiente proposición muestran una relación entre la noción de ángulos y proyecciones oblicuas; el último ítem corresponde a un resultado de V. E. Ljance [44].

Proposición 1.3.1. *Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{S}+\mathcal{T}$ es cerrado entonces $(\mathcal{S}\cap\mathcal{T})^{\perp} = \mathcal{S}^{\perp}+\mathcal{T}^{\perp}$. En particular, $\mathcal{S}^{\perp}+\mathcal{T}^{\perp}$ es un subespacio cerrado. Luego, $\mathcal{S}+\mathcal{T}$ es cerrado si y sólo si $\mathcal{S}^{\perp}+\mathcal{T}^{\perp}$ es cerrado.*

2. *$\mathcal{S} + \mathcal{T}$ es cerrado si y sólo si* $\cos(\mathcal{S}, \mathcal{T}) < 1$.

3. $\cos(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = 0$ *si y sólo si* $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T} + \mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{\perp}$.

4. $\cos_0(\mathcal{S}, \mathcal{T}) < 1$ *si y sólo si* $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$ *y* $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ *es un subespacio cerrado.*

5. $\|P_{\mathcal{S}} P_{\mathcal{T}}\| = \cos(\mathcal{S}, \mathcal{T})$.

6. *Si* $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{T} = \mathcal{H}$ *entonces* $\|Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}}\| = (1 - \cos(\mathcal{S}, \mathcal{T})^2)^{-1/2}$.

1.4. El teorema de Douglas

Dedicamos esta sección a enunciar y demostrar un resultado sobre rangos y factorización de operadores, de R. G. Douglas [26]. Este resultado es el eje principal de la primera parte de esta tesis y será utilizado en diferentes oportunidades.

Teorema (Douglas). *Sean* $B \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ *y* $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe* $D \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ *tal que* $BD = C$.

2. $R(C) \subseteq R(B)$.

3. *Existe un número positivo* λ *tal que* $CC^* \leq \lambda BB^*$.

Si una de estas condiciones vale entonces existe un único operador $X_{N(B)^{\perp}} \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ *tal que*

$$BX_{N(B)^{\perp}} = C \quad y \quad R(X_{N(B)^{\perp}}) \subseteq N(B)^{\perp}.$$

Más aún, el operador $X_{N(B)^{\perp}}$ *satisface*

$$\|X_{N(B)^{\perp}}\| = \inf\{\lambda : \ CC^* \leq \lambda BB^*\}.$$

A esta solución la llamaremos la **solución reducida de Douglas** *de la ecuación* $BX = C$.

Demostración.

1→2 Esta implicación es inmediata.

2→1 Si $R(C) \subseteq R(B)$ entonces para cada $\xi \in \mathcal{G}$ existe un único $\eta \in N(B)^{\perp}$ tal que $C\xi = B\eta$. En efecto, supongamos que existe $\eta_1 \in N(B)^{\perp}$ tal que $C\xi = B\eta_1$. Entonces $B(\eta - \eta_1) = 0$, es decir, $\eta - \eta_1 \in N(B) \cap N(B)^{\perp} = \{0\}$. Luego $\eta = \eta_1$, como afirmamos. Por lo tanto, la aplicación

$D : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tal que $D\xi = \eta$ está bien definida y es lineal. Más aún, $BD = C$. Para ver que D es acotado es suficiente probar que su gráfico, Γ_D, es cerrado. Sea $(\xi_n, \eta_n) \in \Gamma_D$ tal que $\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi$ y $\eta_n \underset{n\to\infty}{\to} \eta$. Luego, $C\xi = \lim\limits_{n\to\infty} C\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} B\eta_n = B\eta$. Por lo tanto D tiene gráfico cerrado y así resulta acotado.

1→3 Si existe $D \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tal que $BD = C$ entonces para todo $\xi \in \mathcal{K}$ vale $\langle CC^*\xi, \xi\rangle = \|C^*\xi\|^2 = \|D^*B^*\xi\|^2 \le \|D^*\|^2\|B^*\xi\|^2 = \|D^*\|^2 \langle BB^*\xi, \xi\rangle$. Es decir $CC^* \le \|D^*\|^2 BB^*$ y se obtiene la implicación.

3→1 Supongamos que existe $\lambda > 0$ tal que $CC^* \le \lambda^2 BB^*$. Entonces $\|C^*\xi\| \le \lambda\|B^*\xi\|$ para todo $\xi \in \mathcal{K}$. Luego, la aplicación $E : R(B^*) \to R(C^*)$ definida por $E(B^*\xi) = C^*\xi$ es acotada. Extendiendo E a la clausura de $R(B^*)$ por continuidad y definiendo $E\xi = 0$ para todo $\xi \in R(B^*)^\perp$ vale que $E \in L(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ y $EB^* = C^*$. Así $BD = C$, tomando $D = E^*$.

Para probar la última parte del teorema, notemos que cuando probamos la implicación 2→1, el operador D que construimos tiene su rango contenido en $N(B)^\perp$, supongamos que existe $\tilde{D} \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tal que $B\tilde{D} = C$ y $R(\tilde{D}) \subseteq N(B)^\perp$ entonces $B(D - \tilde{D}) = 0$. Luego $R(D - \tilde{D}) \subseteq N(B) \cap N(B)^\perp = \{0\}$. Por lo tanto $D = \tilde{D}$. Por último, sea $\lambda > 0$ tal que $CC^* \le \lambda BB^*$ entonces $\|D^*B^*\xi\|^2 = \|C^*\xi\|^2 \le \lambda\|B^*\xi\|^2$ y como $R(B^*)^\perp \subseteq N(D^*)$ pues $R(D) \subseteq N(B)^\perp$ entonces $\|D^*\|^2 \le \lambda$, lo cual indica que $\|D^*\|^2 = \|D\|^2$ es una cota inferior del conjunto $\{\lambda : CC^* \le \lambda BB^*\}$. Además observemos que cuando probamos la implicación 1→3 vimos que $CC^* \le \|D^*\|^2 BB^* = \|D\|^2 BB^*$, así queda probada la afirmación, tomando $X_{N(B)^\perp} = D$. □

Corolario 1.4.1. *Sean $B \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$. Si la ecuación $BX = C$ admite solución entonces*

$$\|X_{N(B)^\perp}\| = \inf\{\|D\| : D \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \text{ tal que } BD = C\}.$$

1.5. Representación matricial de operadores acotados

Fijado un subespacio cerrado $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, los operadores de $L(\mathcal{H})$ se pueden representar como matrices 2×2 de acuerdo a la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$. Más precisamente, para cada $T \in L(\mathcal{H})$ la identidad

$$T = P_{\mathcal{S}}TP_{\mathcal{S}} + P_{\mathcal{S}}T(I - P_{\mathcal{S}}) + (I - P_{\mathcal{S}})TP_{\mathcal{S}} + (I - P_{\mathcal{S}})T(I - P_{\mathcal{S}})$$

puede reescribirse matricialmente como

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},$$

donde $t_{11} = P_{\mathcal{S}} T P_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} \in L(\mathcal{S})$, $t_{12} = P_{\mathcal{S}} T (I - P_{\mathcal{S}})|_{\mathcal{S}^\perp} \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S})$, $t_{21} = (I - P_{\mathcal{S}}) T P_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$ y $t_{22} = (I - P_{\mathcal{S}}) T (I - P_{\mathcal{S}})|_{\mathcal{S}^\perp} \in L(\mathcal{S}^\perp)$. En particular, si $A \in L(\mathcal{H})^+$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}; \tag{1.2}$$

notemos que $a \in L(\mathcal{S})^+$ y $c \in L(\mathcal{S}^\perp)^+$ pues A es semidefinido positivo. Además, $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ y $P_{\mathcal{S}}$ admiten las representaciones

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad P_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

donde y es algún operador en $L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S})$.

Proposición 1.5.1. *Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ tiene la representación matricial (1.2) entonces $R(b) \subseteq R(a^{1/2})$.*

Demostración. Como $c \in L(\mathcal{S}^\perp)^+$ entonces $c + 1 \in Gl(\mathcal{S}^\perp)^+$. Notemos que el operador $A + P_{\mathcal{S}^\perp} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c+1 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H})^+$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{pmatrix} 1 & -b(c+1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(c+1)^{-1}b^* & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - b(c+1)^{-1}b^* & 0 \\ b^* & c+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(c+1)^{-1}b^* & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - b(c+1)^{-1}b^* & 0 \\ 0 & c+1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces $0 \leq a - b(c+1)^{-1}b^*$ y así $b(c+1)^{-1}b^* \leq a$. Ahora, por el teorema de Douglas, $R(b(c+1)^{-1/2}) \subseteq R(a^{1/2})$ y como $(c+1)^{-1/2}$ es inversible entonces $R(b(c+1)^{-1/2}) = R(b)$. En consecuencia $R(b) \subseteq R(a^{1/2})$, como afirmamos. $\square$

Capítulo 2

Inversas generalizadas y ecuaciones tipo Douglas

Este capítulo está dedicado a estudiar una clase particular de soluciones de ecuaciones del tipo $BX = C$, donde B y C son operadores acotados entre convenientes espacios de Hilbert. Tales soluciones se denominarán soluciones reducidas y corresponden a una generalización natural de la solución reducida de Douglas. En el estudio de soluciones reducidas, las pseudoinversas de un operador acotado y, entre ellas, la inversa de Moore-Penrose, constituyen una herramienta central. Junto al concepto de pseudoinversas aparecen proyecciones oblicuas y vinculado a éstas se tiene la noción de ángulo entre subespacios. El objetivo de este capítulo es explicitar la relación entre las nociones de soluciones reducidas de ecuaciones tipo Douglas, pseudoinversas y ángulos entre subespacios cerrados. En la última sección del capítulo utilizamos estos resultados para caracterizar soluciones reducidas positivas de ecuaciones tipo Douglas.

2.1. Nociones básicas sobre inversas generalizadas

En esta sección presentamos una descripción detallada sobre distintos tipos de pseudoinversas de un operador acotado, haciendo especial hincapié en las inversas generalizadas. Tales operadores serán una herramienta fundamental a lo largo de esta tesis. Por este motivo incluimos demostraciones de hechos conocidos como las caracterizaciones de inversas internas e inversas generalizadas. Las proposiciones 2.1.6 y 2.1.7, que son nuevas, generalizan resultados conocidos para la inversa de Moore-Penrose de un operador acotado. El lector interesado en conocer más resultados sobre pseudoinversas de operadores acotados en espacios de Hilbert puede consultar los trabajos de M. Z. Nashed [50], [51], Engl y Nashed [29] y los libros de H. W. Engl, M. Hanke y A. Neubauer [28], A. Ben-Israel y T. N. Greville [10], M. Z. Nashed [49], S. L. Campbell y C. D. Meyer [13] y C. W. Groetsch [35] entre otros.

Antes de introducir las definiciones de pseudoinversas con las que vamos a trabajar notemos que, si $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ un complemento algebraico de $N(T)$, es decir, $\mathcal{M}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$ entonces el operador $T_{\mathcal{M}} := T|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to R(T)$ es inyectivo y por lo tanto existe

$$T_{\mathcal{M}}^{-1} = (T|_{\mathcal{M}})^{-1} : R(T) \to \mathcal{M}.$$

Definición 2.1.1. *Dado $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, sea $T' : \mathcal{D}(T') \subseteq \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ un operador lineal cuyo dominio contiene al rango de T y $\mathcal{M}$ un complemento algebraico de $N(T)$.*

1. *T' es una* **inversa interna** *de T si $T'|_{R(T)} = T_{\mathcal{M}}^{-1}$.*
2. *T' es una* **inversa generalizada** *de T si T' es una inversa interna de T y $R(T') = \mathcal{M}$.*

Las pseudoinversas de un operador acotado que hemos presentado en la definición anterior pueden ser exhibidas de diferentes maneras. Hemos elegido introducirlas de este modo, siguiendo el enfoque que utiliza M. Z. Nashed [51], pues, cuando trabajemos con estos operadores será necesario conocer su rango y, en algunos casos, la descomposición de su dominio. Dado $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, es usual decir que un operador lineal $T' : \mathcal{D}(T') \subseteq \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ cuyo dominio contiene al rango de T es una inversa interna de T si $TT'T = T$ y que T' es una inversa generalizada de T si $TT'T = T$ y $T'TT' = T'$. En las Proposiciones 2.1.2 y 2.1.4 mostramos que estas definiciones son equivalentes a las dadas en la definición 2.1.1.

Proposición 2.1.2. *Sea $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $T' : \mathcal{D}(T') \subseteq \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ un operador lineal cuyo dominio contiene al rango de T. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T' es una inversa interna de T.*
2. *$T'T = Q_{\mathcal{M}//N(T)}$ para algún complemento algebraico $\mathcal{M}$ de $N(T)$.*
3. *$TT' : \mathcal{D}(T') \to \mathcal{H}$ es una proyección y $R(TT') = R(T)$.*

4. $TT'T = T$.

Demostración.

1. $\rightarrow$ 2. Si T' es una inversa interna de T entonces T' es una extensión de $T_{\mathcal{M}}^{-1}$ para algún subespacio $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$. Sea $\xi = \xi_{\mathcal{M}} + \eta \in \mathcal{H}$, donde $\xi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ y $\eta \in N(T)$. Entonces $(T'T)^2(\xi_{\mathcal{M}} + \eta) = T'TT'T\xi_{\mathcal{M}} = T'T\xi_{\mathcal{M}} = T'T\xi$. Luego $(T'T)^2 = T'T$ y $R(T'T) = \mathcal{M}$. Por otro lado, es claro que $N(T) \subseteq N(T'T)$. Ahora, sea $\xi = \xi_{\mathcal{M}} + \eta \in N(T'T)$, donde $\xi_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ y $\eta \in N(T)$. Entonces $T'T\xi = T'T(\xi_{\mathcal{M}} + \eta) = \xi_{\mathcal{M}} = 0$. Por lo tanto $\xi = \eta \in N(T)$ y así $N(T'T) = N(T)$. Luego $T'T = Q_{\mathcal{M}//N(T)}$.

2. $\rightarrow$ 3. Observemos que $TQ_{\mathcal{M}//N(T)} = T$. Como $R(T) \subseteq \mathcal{D}(T')$, podemos calcular $(TT')^2$. Así, $(TT')^2 = TT'TT' = TQ_{\mathcal{M}//N(T)}T' = TT'$. Ahora, es inmediato que $R(TT') \subseteq R(T)$. Sea $\eta \in R(T)$ entonces $\eta = T\xi$ para algún $\xi \in \mathcal{M}$. Luego $\eta = T\xi = TT'T\xi$ y así $\eta \in R(TT')$. Por lo tanto $R(T) = R(TT')$.

3. $\rightarrow$ 4. Como TT' es una proyección sobre $R(T)$ entonces $TT'T = T$.

4. $\rightarrow$ 1. Si $TT'T = T$ entonces $(T'T)^2 = T'T$. Además $N(T'T) = N(T)$. En efecto, si $\xi \in N(T'T)$ entonces $T'T\xi = 0$; así $T\xi = TT'T\xi = 0$ y luego $N(T'T) \subseteq N(T)$. Claramente $N(T) \subseteq N(T'T)$ y entonces la igualdad vale. Tomemos $\mathcal{M} = R(T'T)$, como $T'T = Q_{\mathcal{M}//N(T)}$ entonces $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$. Veamos que $T'|_{R(T)} = T_{\mathcal{M}}^{-1}$. En efecto, sea $\xi = \xi_{\mathcal{M}} + \eta \in \mathcal{H}$ entonces $T'T\xi = Q_{\mathcal{M}//N(T)}\xi = \xi_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}}^{-1}T\xi$. Por lo tanto, T' es una inversa interna de T. □

Proposición 2.1.3. *Sea $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ entonces T tiene una inversa interna en $L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ si y sólo si T tiene rango cerrado.*

Demostración. Supongamos que existe $T' \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tal que $TT'T = T$. Entonces TT' es una proyección en $L(\mathcal{K})$. Luego $R(TT')$ es cerrado. Además, $R(T) = R(TT'T) \subseteq R(TT') \subseteq R(T)$. Así, $R(TT') = R(T)$ y por lo tanto T tiene rango cerrado. Recíprocamente, supongamos que $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tiene rango cerrado y consideremos la proyección $P_{R(T)}$. Por el teorema de Douglas, la ecuación $TX = P_{R(T)}$ tiene solución, es decir, existe $T' \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tal que $TT' = P_{R(T)}$. Entonces $TT'T = T$ y por lo tanto T tiene una inversa interna acotada. □

Proposición 2.1.4. *Sea $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $T' : \mathcal{D}(T') \subseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal cuyo dominio contiene al rango de T. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T' es una inversa generalizada de T.*

2. $TT'T = T$ *y* $T'TT' = T'$.

3. T' *es una inversa interna de* T *con* $\mathcal{D}(T') = R(T) \dot{+} N(T')$.

Demostración.

1. $\rightarrow$ 2. Si T' es una inversa generalizada de T entonces, por la Proposición 2.1.2, $TT'T = T$ y $R(T') = \mathcal{M}$ para algún subespacio $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$. Ahora, $T'TT' = Q_{\mathcal{M}//N(T)}T' = T'$.

2. $\rightarrow$ 1. Como $TT'T = T$, por la Proposición 2.1.2, T' es una inversa interna de T y así $T'T = Q_{\mathcal{M}//N(T)}$ para algún subespacio $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$. Por la definición de inversa interna se verifica que $\mathcal{M} \subseteq R(T')$. Más aún, como $T' = T'TT' = Q_{\mathcal{M}//N(T)}T'$ entonces $R(T') \subseteq \mathcal{M}$ y así $R(T') = \mathcal{M}$. Luego, T' es una inversa generalizada de T.

1. $\rightarrow$ 3. Es claro que $R(T) + N(T') \subseteq \mathcal{D}(T')$. Ahora, sea $\xi \in \mathcal{D}(T')$ y $\eta = T'\xi \in \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ es algún complemento algebraico de $N(T)$. Entonces, $\xi = T\eta + (\xi - T\eta)$. Afirmamos que $\xi - T\eta \in N(T')$. En efecto, por la definición de inversa generalizada vale $T'(\xi - T\eta) = T'\xi - T'T\eta = T'\xi - \eta = 0$. Por lo tanto, $\xi \in R(T) + N(T')$. Por otro lado, si $\xi \in R(T) \cap N(T')$ entonces $\xi = T\eta$ para algún $\eta \in \mathcal{M}$ y $0 = T'\xi = T'T\eta = \eta$. Luego $\xi = T\eta = 0$.

3. $\rightarrow$ 1. Sea T' una inversa interna de T y $\mathcal{D}(T') = R(T) \dot{+} N(T')$. Como T' es una inversa interna de T entonces $\mathcal{M} \subseteq R(T')$, para algún subespacio $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$. Consideremos $T\eta + \xi \in D(T')$ con $\eta \in \mathcal{M}$ y $\xi \in N(T')$. Así, $T'(T\eta + \xi) = T'T\eta = \eta \in \mathcal{M}$. Luego $R(T') \subseteq \mathcal{M}$ y así $R(T') = \mathcal{M}$; es decir, T' es una inversa generalizada de T. □

Las inversas internas correspondientes a un complemento topológico del núcleo en lugar de un complemento algebraico son particularmente interesantes porque, en tal caso, el operador $T'T = Q_{\mathcal{M}//N(T)}$ es acotado. Dado $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, denotaremos

$$\mathcal{I}(T) = \{T' : \mathcal{D}(T') \subseteq \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H} \text{ tal que } T'T = Q_{\mathcal{M}//N(T)} \in L(\mathcal{H})\}$$

y

$$\mathcal{I}_g(T) = \{T' \in \mathcal{I}(T) : \ T' \text{ es una inversa generalizada de } T\}.$$

Lema 2.1.5. *Sean* $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ *y* $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$. *Si* $T' \in \mathcal{I}(T)$ *y* $R(C) \subseteq R(T)$ *entonces* $T'C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

Demostración. Como $R(C) \subseteq R(T)$ entonces, por el teorema de Douglas, existe $D \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tal que $TD = C$. Ahora, como $T' \in \mathcal{I}(T)$ entonces $T'C = T'TD = Q_{\mathcal{M}//N(T)}D \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. □

En el próximo resultado caracterizamos, para un $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, las inversas generalizadas en $\mathcal{I}_g(T)$ que tienen gráfico cerrado.

Proposición 2.1.6. *Sea $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $T' \in \mathcal{I}_g(T)$. Entonces T' tiene gráfico cerrado si y sólo si* $\cos_0(\overline{R(T)}, N(T')) < 1$.

Demostración. Como $T' \in \mathcal{I}_g(T)$ entonces $R(T'T) = \mathcal{M}$ es cerrado. Además, vale que $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$ y $T'T = Q_{\mathcal{M}//N(T)}$. Primero veamos que

$$\{(\xi, T_{\mathcal{M}}^{-1}\xi) : \xi \in R(T)\} = \{(T\eta, \eta) : \eta \in \mathcal{H}\} \cap \mathcal{K} \times \mathcal{M}. \tag{2.1}$$

En efecto, sea $\xi \in R(T)$ y $\eta = T_{\mathcal{M}}^{-1}\xi \in \mathcal{M}$. Entonces $T\eta = TT_{\mathcal{M}}^{-1}\xi = TT'\xi = \xi$. Así, $(\xi, T_{\mathcal{M}}^{-1}\xi) = (T\eta, \eta)$ y entonces queda probada la primera inclusión. Por otro lado, sea $\eta \in \mathcal{M}$ y $\xi = T\eta \in R(T)$. Luego, $T_{\mathcal{M}}^{-1}\xi = T_{\mathcal{M}}^{-1}T\eta = \eta$. Por lo tanto, $(T\eta, \eta) = (\xi, T_{\mathcal{M}}^{-1}\xi)$ y así obtenemos la segunda inclusión. Ahora, por la Proposición 2.1.4 y la igualdad (2.1), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(T') &= \{(\mu, T'\mu) : \mu \in \mathcal{D}(T')\} = \{(\mu_1 + \mu_2, T'\mu_1) : \mu_1 \in R(T), \mu_2 \in N(T')\} \\
&= \{(\mu_1, T_{\mathcal{M}}^{-1}\mu_1) : \mu_1 \in R(T)\} + \{N(T') \times \{0\}\} \\
&= \{(T\eta, \eta) : \eta \in \mathcal{H}\} \cap \{\mathcal{K} \times \mathcal{M}\} + \{N(T') \times \{0\}\}.
\end{aligned}$$

Consideremos los siguientes subespacios cerrados de $\mathcal{K} \times \mathcal{H}$: $\mathcal{F} = \{(T\eta, \eta) : \eta \in \mathcal{H}\} \cap \{\mathcal{K} \times \mathcal{M}\}$ y $\mathcal{G} = N(T') \times \{0\}$. Si mostramos que $\cos_0(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \cos_0(\overline{R(T)}, N(T'))$ entonces, por la Proposición 1.3.1, obtenemos la afirmación pues $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0\} \times \{0\}$ y entonces $\cos(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \cos_0(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\cos_0(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &= \sup\{|\langle \xi, \eta \rangle| : \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{F}, \eta = (\eta_1, 0) \in \mathcal{G}, \|\xi\|^2 < 1 \text{ y } \|\eta\|^2 < 1\} \\
&= \sup\{|\langle \xi_1, \eta_1 \rangle| : \xi_1 \in R(T), \eta_1 \in N(T'), \|\xi_1\|^2 < 1 \text{ y } \|\eta_1\|^2 < 1\} \\
&= \cos_0(\overline{R(T)}, N(T')),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene luego de realizar simples cálculos. □

Proposición 2.1.7. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto y $\mathcal{M}$ un complemento topológico de $N(T)$. Entonces:*

1. *$\overline{R(T)} \dot{+} \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{H}$ y $R(T) \dot{+} \mathcal{M}^{\perp}$ es denso en $\mathcal{H}$.*

2. *Si* $T' : \mathcal{D}(T') = R(T) \dot{+} \mathcal{M}^{\perp} \to \mathcal{M}$ *es una inversa generalizada de* T *tal que* $N(T') = \mathcal{M}^{\perp}$ *entonces* $(T')^* = T'$.

3. *Si* $T \in L(\mathcal{H})^+$ *y* $T' : \mathcal{D}(T') = R(T) \dot{+} \mathcal{M}^{\perp} \to \mathcal{M}$ *es una inversa generalizada de* T *tal que* $N(T') = \mathcal{M}^{\perp}$ *entonces* T' *es positivo; es decir,* $\langle T'\xi, \xi \rangle \geq 0$ *para todo* $\xi \in \mathcal{D}(T')$.

Demostración.

1. Como $\mathcal{M}$ y $N(T)$ son subespacios cerrados entonces, por la Proposición 1.3.1, vale $\overline{R(T)} + \mathcal{M}^{\perp} = (N(T) \cap \mathcal{M})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$. Además, si $\xi \in \overline{R(T)} \cap \mathcal{M}^{\perp} = (N(T) + \mathcal{M})^{\perp} = \{0\}$ entonces $\xi = 0$. Luego, $\overline{R(T)} \dot{+} \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{H}$. Por otro lado, $\mathcal{H} = \overline{R(T)} \dot{+} \mathcal{M}^{\perp} \subseteq \overline{R(T) \dot{+} \mathcal{M}^{\perp}}$. Por lo tanto, $\overline{R(T) \dot{+} \mathcal{M}^{\perp}} = \mathcal{H}$.

2. Comencemos probando que $\mathcal{D}((T')^*) = R(T) + \mathcal{M}^{\perp}$. Si $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \mathcal{D}((T')^*)$, donde $\omega_1 \in \mathcal{M}$ y $\omega_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$ entonces, para cada ω, existe $\eta \in \mathcal{H}$ tal que $\langle T'\kappa, \omega \rangle = \langle \kappa, \eta \rangle$ para todo $\kappa = T\xi + \mu \in \mathcal{D}(T')$, donde $\xi \in \mathcal{M}$ y $\mu \in \mathcal{M}^{\perp}$. Tomemos $\mu = 0$. Luego, $\langle T'T\xi, \omega \rangle = \left\langle Q_{\mathcal{M}//N(T)}\xi, \omega \right\rangle = \langle \xi, \omega_1 \rangle$ y $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle$. Entonces $\langle \xi, \omega_1 - T\eta \rangle = 0$ para todo $\xi \in \mathcal{M}$, es decir, $\omega_1 - T\eta \in \mathcal{M}^{\perp}$. Por lo tanto, $\omega_1 \in \mathcal{M}^{\perp} + R(T)$ y así $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \mathcal{M}^{\perp} + R(T)$. Recíprocamente, sea $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in R(T) + \mathcal{M}^{\perp}$, donde $\omega_1 \in R(T)$ y $\omega_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$. Además, sea $\kappa = T\xi + \mu \in \mathcal{D}(T')$, donde $\xi \in \mathcal{M}$ y $\mu \in \mathcal{M}^{\perp}$. Luego $\langle T'(T\xi + \mu), \omega \rangle = \langle \xi, \omega_1 \rangle$. Por otro lado, si definimos $\eta = T'\omega$ entonces $\langle T\xi + \mu, \eta \rangle = \langle \xi, \omega_1 \rangle$. Luego, $\omega \in \mathcal{D}((T')^*)$ y de esta última inclusión también se obtiene $(T')^*\omega = T'\omega$ para todo $\omega \in \mathcal{D}((T')^*)$, es decir, $(T')^* = T'$.

3. Sea $\xi = T\eta + \omega \in \mathcal{D}(T')$, donde $\eta \in \mathcal{M}$ y $\omega \in \mathcal{M}^{\perp}$. Luego, como $T \in L(\mathcal{H})^+$ vale $\langle T'(T\eta + \omega), T\eta + \omega \rangle = \langle T'T\eta, T\eta + \omega \rangle = \langle T'T\eta, T\eta \rangle = \left\langle Q_{\mathcal{M}//N(T)}\eta, T\eta \right\rangle = \langle T\eta, \eta \rangle \geq 0$. □

2.1.1. La inversa de Moore-Penrose

Definición 2.1.8. *Dado* $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$*, un operador lineal* $T' : \mathcal{D}(T') \subseteq \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ *tal que* $R(T) \subseteq \mathcal{D}(T')$ *es la* **inversa de Moore-Penrose** *de* T *si* T' *es la inversa generalizada de* T *con* $R(T') = N(T)^{\perp}$ *y* $N(T') = R(T)^{\perp}$*. De aquí en adelante denotaremos* $T^{\dagger}$ *a la inversa de Moore-Penrose de* T.

La primera definición explícita de la inversa de Moore-Penrose fue dada por E. H. Moore [48] en 1920 para matrices. En 1955, R. A. Penrose publicó un trabajo sobre inversas generalizadas de matrices [52] donde también definió a este operador, pero sin conocer el trabajo de Moore. Las definiciones dadas por ambos matemáticos coinciden y por este motivo se denomina al operador de la definición 2.1.8 la inversa de Moore-Penrose. En nuestros términos, si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ tienen dimensión finita y $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$, ellos probaron que existe un único operador en $L(\mathcal{K},\mathcal{H})$ que resuelve simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$TXT = T,\ XTX = X,\ TX = P_{R(T)},\ XT = P_{N(T)^{\perp}};$$

tal solución es el operador que hoy conocemos como la inversa de Moore-Penrose de T. Más tarde, M. Z. Nashed [51] extendió este resultado cuando $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert de dimensión infinita. En el libro de C.W. Groetsch [35] se introduce una nueva definición para este operador vía un problema de la teoría de aproximación. Más precisamente, dado $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ se define a la inversa de Moore-Penrose de T como el operador $\tilde{T} : R(T) \dot{+} R(T)^{\perp} \to \mathcal{H}$ tal que $\tilde{T}\eta = \rho$, donde ρ es la única solución de cuadrados mínimos con norma mínima de la ecuación $T\xi = \eta$. Recordemos que $\omega \in \mathcal{H}$ se dice una **solución de cuadrados mínimos** de la ecuación $T\xi = \eta$ si:

$$\|T\omega - \eta\| \leq \|T\xi - \eta\| \text{ para todo } \xi \in \mathcal{H}.$$

En la siguiente proposición resumimos algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose de un operador acotado y probamos que las diferentes definiciones dadas para este operador son equivalentes.

Proposición 2.1.9. *Sea $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$ y $T^{\dagger} : R(T) \oplus R(T)^{\perp} \to N(T)^{\perp}$ la inversa de Moore-Penrose de T. Entonces:*

1. *$T^{\dagger}$ es la única solución del sistema*

$$TXT = T,\ XTX = X,\ TX = P_{\overline{R(T)}}|_{\mathcal{D}(X)},\ XT = P_{N(T)^{\perp}}; \tag{2.2}$$

donde $X : R(T) \oplus R(T)^{\perp} \to \mathcal{H}$ es lineal.

2. *Sea $\eta \in R(T) \oplus R(T)^{\perp}$. Si ρ es una solución de cuadrados mínimos de la ecuación $T\xi = \eta$ y $\|\rho\| < \|\omega\|$ para todo ω que es solución de cuadrados mínimos de $T\xi = \eta$ entonces, el operador $\tilde{T} : R(T) \oplus R(T)^{\perp} \to \mathcal{H}$ definido por $\tilde{T}\eta = \rho$ es la inversa de Moore-Penrose de T. Recíprocamente, $T^{\dagger}\eta$ es la única solución de cuadrados mínimos con mínima norma de la ecuación $T\xi = \eta$.*

3. *Para todo $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$, el operador $T^{\dagger}$ tiene gráfico cerrado.*

4. *Si $T \in L(\mathcal{H})$ y $T = T^{*}$ entonces $(T^{\dagger})^{*} = T^{\dagger}$.*

5. *Si* $T \in L(\mathcal{H})^+$ *entonces* $T^\dagger$ *es positivo y* $T^\dagger = (T^{1/2})^\dagger (T^{1/2})^\dagger|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$.

Demostración.

1. Como $T^\dagger$ es una inversa generalizada de T entonces $TT^\dagger T = T$ y $T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger$. Además, por la Proposición 2.1.2, $T^\dagger T = P_{N(T)^\perp}$ y $TT^\dagger|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$ es una proyección con $R(TT^\dagger) = R(T)$. Para probar que $TT^\dagger = P_{\overline{R(T)}}|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$ resta ver que $N(TT^\dagger) = R(T)^\perp$, o lo que es lo mismo, $N(TT^\dagger) = N(T^\dagger)$. En efecto, es claro que $N(T^\dagger) \subseteq N(TT^\dagger)$. Ahora, sea $\xi \in N(TT^\dagger)$ entonces $T^\dagger \xi \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$. Luego $T^\dagger \xi = 0$ y entonces $\xi \in N(T^\dagger)$. Por lo tanto $N(TT^\dagger) = N(T^\dagger)$ y en consecuencia $T^\dagger$ es una solución del sistema (2.2). Supongamos que existe otro operador $D : R(T) \oplus R(T)^\perp \rightarrow \mathcal{H}$ que resuelve (2.2). Como $TD = P_{\overline{R(T)}}|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$ entonces $N(D) = R(T)^\perp$. Además, como $DT = P_{N(T)^\perp}$ entonces $(T^\dagger - D)T = 0$; es decir, $T^\dagger|_{R(T)} = D|_{R(T)}$. Por lo tanto $D = T^\dagger$.

2. Primero veamos que $R(\tilde{T}) = N(T)^\perp$. Si $\eta \in R(T) \oplus R(T)^\perp$ consideramos $\tilde{T}\eta = \omega_1 + \omega_2$, donde $\omega_1 \in N(T)^\perp$ y $\omega_2 \in N(T)$. Afirmamos que ω_1 es una solución de cuadrados mínimos de $T\xi = \eta$. En efecto, $\|T\omega_1 - \eta\| = \|T(\omega_1 + \omega_2) - \eta\| = \|T(\tilde{T}\eta) - \eta\| \leq \|T\xi - \eta\|$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. Por otro lado, si $\omega_2 \neq 0$ entonces $\|\omega_1\|^2 < \|\omega_1 + \omega_2\|^2 = \|\tilde{T}\eta\|^2$, lo que contradice el hecho que $\tilde{T}\eta$ es la única solución de cuadrados mínimos de mínima norma. Por lo tanto $\omega_2 = 0$ y así $\tilde{T}\eta \in N(T)^\perp$. Ahora, sea $\omega \in N(T)^\perp$ y definimos $\mu = T\omega$. Luego, $\omega = \tilde{T}\mu$. En efecto, notemos que $T\omega = P_{\overline{R(T)}} T\omega = P_{\overline{R(T)}}\mu$. Entonces, dado $\xi \in \mathcal{H}$ vale $\|T\xi - \mu\|^2 = \|T\xi - P_{\overline{R(T)}}\mu\|^2 + \|P_{\overline{R(T)}}\mu - \mu\|^2 \geq \|P_{\overline{R(T)}}\mu - \mu\|^2 = \|T\omega - \mu\|^2$. Por lo tanto, ω es una solución de cuadrados mínimos de $T\xi = \mu$. Por otro lado, si $\kappa \in \mathcal{H}$ es otra solución de cuadrados mínimos entonces $\|T\kappa - \mu\| = \|T\omega - \mu\|$. Más aún, como $\|T\kappa - \mu\|^2 = \|T\kappa - P_{\overline{R(T)}}\mu\|^2 + \|P_{\overline{R(T)}}\mu - \mu\|^2 = \|T\kappa - P_{\overline{R(T)}}\mu\|^2 + \|T\omega - \mu\|^2$, entonces $T\kappa = P_{\overline{R(T)}}\mu = T\omega$; es decir, $\kappa \in \omega + N(T)$. En consecuencia tenemos que $\|\kappa\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\theta\|^2 \geq \|\omega\|^2$, donde $\theta \in N(T)$. Luego ω es la única solución de cuadrados mínimos con mínima norma de la ecuación $T\xi = \mu$, como afirmamos. Por lo tanto, $R(\tilde{T}) = N(T)^\perp$. Ahora probemos que $\tilde{T}$ satisface las ecuaciones del sistema (2.2). Si $\eta \in R(T) \oplus R(T)^\perp$ entonces $T\tilde{T}\eta = P_{\overline{R(T)}}\eta$, es decir $T\tilde{T} = P_{\overline{R(T)}}|_{R(T)\oplus R(T)^\perp}$. En efecto, notemos que $\|T(\tilde{T}\eta) - \eta\|^2 = \|T(\tilde{T}\eta) - P_{\overline{R(T)}}\eta\|^2 + \|P_{\overline{R(T)}}\eta - \eta\|^2 = \|T(\tilde{T}\eta) - P_{\overline{R(T)}}\eta\|^2 + \|T(T^\dagger\eta) - \eta\|^2 \geq \|T(T^\dagger\eta) - \eta\|^2$; es decir, $T^\dagger\eta$ es una solución de cuadrados mínimos de $T\xi = \eta$. Entonces $\|T(T'\eta) - \eta\| = \|T(T^\dagger\eta) - \eta\|$ y así $T(\tilde{T}\eta) = P_{\overline{R(T)}}\eta$, como afirmamos. Sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{H}$, donde $\xi_1 \in N(T)^\perp$ y $\xi_2 \in N(T)$. Entonces $T\tilde{T}T\xi = T\tilde{T}T\xi_1 = P_{\overline{R(T)}}|_{R(T)\oplus R(T)^\perp} T\xi_1 = T\xi_1 = T\xi$; por lo tanto $T\tilde{T}T = T$. Como $R(\tilde{T}) = N(T)^\perp$ entonces $\tilde{T}T\xi - \xi_1 \in N(T) \cap N(T)^\perp = \{0\}$; luego $\tilde{T}T\xi = \xi_1 = P_{N(T)^\perp}\xi$. Por

último, notemos que $\tilde{T}T\tilde{T} = P_{N(T)^\perp}\tilde{T} = \tilde{T}$ pues $R(\tilde{T}) = N(T)^\perp$ y así concluimos que $\tilde{T}$ es la inversa de Moore-Penrose de T. Recíprocamente, como $TT^\dagger = P_{\overline{R(T)}}|_{R(T)\oplus R(T)^\perp}$ entonces, dado $\xi \in \mathcal{H}$ vale $\|T\xi - \eta\|^2 = \|T\xi - T(T^\dagger\eta)\|^2 + \|T(T^\dagger\eta) - \eta\|^2 \geq \|T(T^\dagger\eta) - \eta\|^2$; es decir $T^\dagger\eta$ es una solución de cuadrados mínimos de $T\xi = \eta$. Si $\omega \in \mathcal{H}$ es otra solución de cuadrados mínimos de $T\xi = \eta$ entonces $\|T\omega - \eta\| = \|T(T^\dagger\eta) - \eta\|$ y luego $\omega = T^\dagger\eta + \theta$, donde $\theta \in N(T)$. En efecto, $\|T\omega - \eta\|^2 = \|T\omega - T(T^\dagger\eta)\|^2 + \|T(T^\dagger\eta) - \eta\|^2$. Luego $T\omega = T(T^\dagger\eta)$ y entonces $\omega \in T^\dagger\eta + N(T)$. Por lo tanto, $\|\omega\|^2 = \|T^\dagger\eta\|^2 + \|\theta\|^2$ y así $T^\dagger\eta$ es la única solución de cuadrados mínimos con mínima norma, como queríamos probar.

3. Como $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$ entonces $\cos_0(\overline{R(T)}, N(T^\dagger)) < 1$. Ahora, ya que $T^\dagger \in \mathcal{I}_g(T)$, la afirmación es consecuencia de la Proposición 2.1.6.

4. Como $T = T^*$ entonces $R(T)^\perp = N(T)$. Luego $T^\dagger : R(T) \oplus N(T) \to N(T)^\perp$ y la afirmación es consecuencia de la Proposición 2.1.7.

5. Como $T \in L(\mathcal{H})^+$ entonces $T^\dagger : R(T) \oplus N(T) \to N(T)^\perp$ y $N(T^\dagger) = N(T)$. Luego, la positividad del operador $T^\dagger$ es consecuencia de la Proposición 2.1.7. Por otro lado, notemos que $R((T^{1/2})^\dagger|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}) \subseteq R(T^{1/2})$. En efecto, sea $\eta \in R((T^{1/2})^\dagger|_{\mathcal{D}(T^\dagger)})$, $\eta = (T^{1/2})^\dagger(T\xi + \omega)$, donde $\xi \in N(T)^\perp$ y $\omega \in N(T) = N(T^{1/2})$. Luego, $\eta = (T^{1/2})^\dagger(T^{1/2}T^{1/2}\xi + \omega) = T^{1/2}\xi$ y así $\eta \in R(T^{1/2})$; entonces podemos calcular $(T^{1/2})^\dagger(T^{1/2})^\dagger|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$. Ahora, dados $\xi \in N(T)^\perp$ y $\omega \in N(T)$ vale $(T^{1/2})^\dagger(T^{1/2})^\dagger(T\xi + \omega) = (T^{1/2})^\dagger T^{1/2}\xi = \xi$ y $T^\dagger(T\xi + \omega) = \xi$. Por lo tanto, $T^\dagger = (T^{1/2})^\dagger(T^{1/2})^\dagger|_{\mathcal{D}(T^\dagger)}$.

□

2.2. Inversas generalizadas y ecuaciones tipo Douglas

Dado $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, identificaremos a las ecuaciones del sistema (2.2) de la siguiente manera:

1 . $TXT = T$,

2 . $XTX = X$,

3 . $(TX)^* = TX$,

4 . $(XT)^* = XT$.

Denotaremos $T[i]$, $T[i,j]$, $T[i,j,k]$, $T[i,j,k,l]$ los conjuntos de operadores X en $L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ que satisfacen las ecuaciones $\{i\}$, $\{i,j\}$, $\{i,j,k\}$ y $\{i,j,k,l\}$ respectivamente, donde $i,j,k,l = 1,2,3,4$.

Luego, por el resultado de Moore y Penrose, $T[1,2,3,4] = \{T^\dagger\}$.

En esta sección estudiamos la relación entre las soluciones de las ecuaciones $TX = Q$, donde Q es una proyección sobre el rango de T y los conjuntos $T[1]$, $T[1,i]$, $T[1,i,j]$ y $T[1,i,j,k]$. Parte de la información contenida en el siguiente resultado se encuentra diseminada en la literatura, mientras que otra parte es novedosa. El libro de Ben-Israel y Greville [10] contiene una excelente exposición de estos temas (ver en particular, capítulo 1 y 2). Como consecuencia de este enfoque obtenemos una manera muy breve de probar la existencia y unicidad de la inversa generalizada de Moore-Penrose de un operador con rango cerrado.

Teorema 2.2.1. *Sea $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Entonces:*

(i) $T[1] = \{X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H}) : TX = Q \text{ para algún } Q \in \mathcal{Q}_{R(T)}\}$.

(ii) $T[1,2] = \{X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H}) : TX = Q \in \mathcal{Q}_{R(T)} \text{ y } N(X) = N(Q)\}$.

(iii) $T[1,3] = \{X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H}) : TX = P_{R(T)}\}$.

(iv) $T[1,4] = \{X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H}) : XT = P_{R(T^*)}\}$.

(v) $T[1,2,3] = \{X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H}) : TX = P_{R(T)} \text{ y } N(X) = R(T)^\perp\}$.

(vi) $T[1,2,4] = \{X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H}) : XT = P_{R(T^*)} \text{ y } R(X) \subseteq R(T^*)\}$.

(vii) $T[1,3,4] = \{X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H}) : TX = P_{R(T)} \text{ y } XT = P_{R(T^*)}\}$.

(viii) $T[1,2,3,4] = \{\text{solución reducida de Douglas de } TX = P_{R(T)}\}$.

Demostración.

(i) Sea $X \in T[1]$, es decir, X verifica que $TXT = T$. Por lo tanto, $TXTX = TX$ y $R(T) \subseteq R(TX) \subseteq R(T)$. Entonces $TX \in \mathcal{Q}_{R(T)}$. Recíprocamente, sea X tal que $TX = Q$ para algún $Q \in \mathcal{Q}_{R(T)}$ entonces $TXT = QT = T$.

(ii) Consideremos $X \in T[1,2]$. Entonces, por (i), $TX = Q \in \mathcal{Q}_{R(T)}$ y así $N(X) \subseteq N(Q)$. Por otro lado, como $X = XTX = XQ$, entonces $N(Q) \subseteq N(X)$. Así $N(X) = N(Q)$. Recíprocamente, sea $X \in L(\mathcal{K},\mathcal{H})$ tal que $TX = Q \in \mathcal{Q}_{R(T)}$ y $N(X) = N(Q)$ entonces, por (i), $X \in T[1]$. Para probar que $X \in T[1,2]$, es suficiente observar que $XTX = XQ = X$, donde la última igualdad vale porque $N(Q) = R(I-Q) = N(X)$.

(iii) La demostración es inmediata: por (i) todo $X \in T[1,3]$ satisface que $TX = Q$ para algún $Q \in \mathcal{Q}_{R(T)}$. Además $(TX)^* = TX$, entonces $Q^* = Q$ y luego $Q = P_{R(T)}$. La recíproca es trivial.

(iv) Sea $X \in T[1,4]$. Entonces $T^*X^*T^* = T^*$ y así $T^*X^* \in \mathcal{Q}_{R(T^*)}$. Ahora, como $X \in T[4]$, vale que $T^*X^* = XT = P_{R(T^*)}$. Recíprocamente, si $XT = P_{R(T^*)} = T^*X^*$ entonces $T^*X^*T^* = T^*$ y así $X \in T[1,4]$.

(v) Si $X \in T[1,2,3]$ entonces, por (ii), $TX = Q \in \mathcal{Q}_{R(T)}$ y $N(X) = N(Q)$. Además, como $X \in T[3]$, vale que $Q^* = (TX)^* = TX = Q$. Así $Q = P_{R(T)}$ y $N(X) = R(T)^{\perp}$. Para probar la recíproca, tomemos X tal que $TX = P_{R(T)}$ y $N(X) = R(T)^{\perp}$; entonces, por (ii), $X \in T[1,2]$ y $TX = (TX)^*$. Esto prueba que $X \in T[1,2,3]$.

(vi) Sea $X \in T[1,2,4]$. Por (iv), $XT = P_{R(T^*)}$. Entonces $X = XTX = P_{R(T^*)}X$ y así $R(X) \subseteq R(T^*) = N(T)^{\perp}$. Recíprocamente, por (iv), sólo resta probar que $X \in T[2]$. Ahora, $XTX = P_{R(T^*)}X = X$ donde la última igualdad vale porque $R(X) \subseteq R(T^*)$.

(vii) La igualdad es consecuencia de los items (iii) y (iv).

(viii) Es suficiente mostrar que $T^\dagger$ es la solución reducida de Douglas de $TX = P_{R(T)}$, pero este hecho es una consecuencia inmediata de los items (iii) y (vi).

$\square$

Observación 2.2.2. Si $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ entonces la ecuación $TX = P_{R(T)}$ tiene una solución. Más aún, la solución reducida de Douglas es la inversa de Moore-Penrose de T. Este es el significado del último ítem del teorema anterior. Luego, las condiciones necesarias y suficientes para que un operador $D \in L(\mathcal{K},\mathcal{H})$ sea la inversa de Moore-Penrose de $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ son $TD = P_{R(T)}$ y $R(D) \subseteq N(T)^{\perp}$. Esta parece ser la manera más breve de testear las identidades de Moore-Penrose para un operador de rango cerrado. $\triangle$

Observación 2.2.3. La ecuación $XT = C$ es equivalente a $T^*X^* = C^*$. Luego, los conjuntos $T^*[1]$, $T^*[1,i]$, $T^*[1,i,j]$ y $T^*[1,i,j,k]$ están relacionados con las soluciones de las ecuaciones $XT = Q$, donde $Q^* \in \mathcal{Q}_{R(T^*)}$. $\triangle$

2.3. Soluciones reducidas de ecuaciones tipo Douglas

En el siguiente resultado presentamos una versión más general del criterio de Douglas en el cual extendemos la noción de solución reducida. La prueba es similar a la presentada para demostrar dicho teorema, por este motivo no la incluimos.

Teorema 2.3.1. *Sean $B \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ tales que $R(C) \subseteq R(B)$. Si $\mathcal{M}$ es un complemento topológico de $N(B)$ entonces existe una única solución $X_{\mathcal{M}} \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ de la ecuación $BX = C$ tal que $R(X_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{M}$. Llamaremos al operador $X_{\mathcal{M}}$ la* **solución reducida para** $\mathcal{M}$ *de la ecuación $BX = C$.*

Oservaciones 2.3.2.

- Si la ecuación $BX = C$ tiene solución y $\mathcal{M}$ es un complemento algebraico de $N(B)$ entonces existe un único operador lineal $X_{\mathcal{M}} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tal que $BX_{\mathcal{M}} = C$ y $R(X_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{M}$. Sin embargo, en este caso, no podemos garantizar que $X_{\mathcal{M}}$ resulte acotado. Veamos los siguientes ejemplos:

  i. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ y $\mathcal{M}$ un subespacio no cerrado de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} N(T) = \mathcal{H}$. La proyección $Q = Q_{\mathcal{M}//N(T)}$ es solución de la ecuación $TX = T$ y además $R(Q) \subseteq \mathcal{M}$, pero Q no es acotada ya que $\mathcal{M}$ no es cerrado.

  ii. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ un subespacio no cerrado de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{S} = \mathcal{H}$. Si $\xi \in \mathcal{M}$ entonces $P_{gen\{\xi\}}$ es una solución acotada de la ecuación $P_{\mathcal{S}^\perp} X = P_{\mathcal{S}^\perp} P_{gen\{\xi\}}$ y además satisface $R(P_{gen\{\xi\}}) \subseteq \mathcal{M}$.

- Si $\mathcal{M} = N(B)^\perp$ entonces el operador $X_{N(B)^\perp}$ es la solución reducida de Douglas de la ecuación $BX = C$. $\triangle$

Corolario 2.3.3. *Sean $B \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ tales que $R(C) \subseteq R(B)$. Si $X_{\mathcal{M}}$ es la solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $BX = C$ entonces $N(X_{\mathcal{M}}) = N(C)$.*

Demostración. Como $BX_{\mathcal{M}} = C$ entonces $N(X_{\mathcal{M}}) \subseteq N(C)$. Ahora, sea $\xi \in N(C)$. Entonces $0 = C\xi = BX_{\mathcal{M}}\xi$. Luego, $X_{\mathcal{M}}\xi \in R(X_{\mathcal{M}}) \cap N(B) \subseteq \mathcal{M} \cap N(B) = \{0\}$. Por lo tanto $\xi \in N(X_{\mathcal{M}})$ y así $N(X_{\mathcal{M}}) = N(C)$. $\square$

Corolario 2.3.4. *Sean $B \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ tales que $R(C) \subseteq R(B)$. Toda solución Y de la ecuación $BX = C$ puede escribirse como*

$$Y = X_0 + X_{\mathcal{M}},$$

donde X_0 es una solución de la ecuación homogénea $BX = 0$ y $X_{\mathcal{M}}$ es la solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $BX = C$.

Demostración. Sean Y y $X_{\mathcal{M}}$ una solución y la solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $BX = C$, respectivamente. Entonces $X_0 = Y - X_{\mathcal{M}}$ es una solución de la ecuación homogénea $BX = 0$ y así obtenemos la afirmación. □

Si D es una solución de la ecuación $BX = C$ entonces, en muchos casos, es útil tener una expresión explícita de este operador; más precisamente, es útil encontrar un operador $\tilde{B}$ tal que $D = \tilde{B}C$. Observemos que en tal caso, el operador $\tilde{B}$ actúa como una suerte de inversa de B pues $\tilde{B}BD = D$. En la siguiente proposición damos condiciones equivalentes para garantizar tal factorización de la solución.

Proposición 2.3.5. *Sea $D \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ una solución de la ecuación $BX = C$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$D = \tilde{B}C$ para algún operador lineal $\tilde{B} : \mathcal{D}(\tilde{B}) \to \mathcal{H}$ con $R(C) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{B})$;*
2. *$N(D) = N(C)$;*
3. *$R(D) \cap N(B) = \{0\}$.*

Demostración.

$1 \to 2$ Si D es una solución de la ecuación $BX = C$, es decir, si $BD = C$, entonces $N(D) \subseteq N(C)$. Además, como $D = \tilde{B}C$ para algún operador lineal $\tilde{B} : \mathcal{D}(\tilde{B}) \to \mathcal{H}$ con $R(C) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{B})$ entonces $N(C) \subseteq N(D)$, y así $N(C) = N(D)$.

$2 \to 1$ Consideremos el operador $\tilde{B} : R(C) \to \mathcal{H}$ definido por $\tilde{B}(C\xi) = D\xi$. Es fácil verificar que $\tilde{B}$ es lineal. Además, $\tilde{B}$ está bien definido. En efecto, sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$ tales que $C\xi_1 = C\xi_2$. Entonces $D\xi_1 = D\xi_2$ pues $N(C) = N(D)$. Por otro lado, es claro que $\tilde{B}C = D$ y así queda probada la implicación.

$2 \leftrightarrow 3$ Sea D una solución de la ecuación $BX = C$ y supongamos que $R(D) \cap N(B) = \{0\}$. Si $\xi \in N(C)$ entonces $BD\xi = C\xi = 0$, es decir, $D\xi \in R(D) \cap N(B) = \{0\}$. Así $\xi \in N(D)$ y por lo tanto $N(C) \subseteq N(D)$. Por otro lado, es inmediato que $N(D) \subseteq N(C)$ ya que $BD = C$. Luego $N(C) = N(D)$. Recíprocamente, si $N(D) = N(C)$ y $\xi = D\eta \in R(D) \cap N(B)$ para algún $\eta \in \mathcal{G}$ entonces $C\eta = BD\eta = B\xi = 0$. Así $\eta \in N(C) = N(D)$. Entonces $\xi = D\eta = 0$ y por lo tanto $R(D) \cap N(B) = \{0\}$. □

Corolario 2.3.6. *Toda solución reducida $X_{\mathcal{M}}$ de la ecuación $BX = C$ puede escribirse como $X_{\mathcal{M}} = \tilde{B}C$, para algún operador lineal $\tilde{B}$ tal que $R(C) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{B})$.*

Demostración. Como $R(X_{\mathcal{M}}) \cap N(B) \subseteq \mathcal{M} \cap N(B) = \{0\}$ entonces la afirmación se obtiene de la Proposición 2.3.5. □

Observación 2.3.7. Si la ecuación $BX = C$ admite solución, la solución reducida de Douglas es $X_{N(B)^\perp} = B^\dagger C$. En efecto, la afirmación es consecuencia del Lema 2.1.5 y del hecho que $B^\dagger B = P_{N(B)^\perp}$. △

En el próximo resultado describimos al operador $\tilde{B}$ del Corolario 2.3.6. Probaremos que para las soluciones reducidas vale una factorización similar a la que admite la solución reducida de Douglas cuando la inversa de Moore-Penrose de B se reemplaza por una inversa generalizada en $\mathcal{I}_g(B)$. Más aún, caracterizamos a las soluciones reducidas mediante ángulos. Como consecuencia, veremos que las soluciones reducidas son exactamente las soluciones que pueden ser escritas como $\tilde{B}C$ para algún $\tilde{B}$ con $R(C) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{B})$ si se añaden algunas hipótesis sobre la dimensión de los espacios de Hilbert involucrados.

Teorema 2.3.8. *Sean $B \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ tales que $R(C) \subseteq R(B)$. Si $Y \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ es una solución de la ecuación $BX = C$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Y es una solución reducida de $BX = C$;*
2. *$Y = Q_{\mathcal{M}//N(B)} X_{N(B)^\perp}$ para algún complemento topológico $\mathcal{M}$ de $N(B)$;*
3. *$Y = B'C$, donde $B' \in \mathcal{I}_g(B)$;*
4. *$Y = B'C$, donde $B' \in \mathcal{I}(B)$;*
5. $\cos_0(\overline{R(Y)}, N(B)) < 1$.

Demostración.

1 → 2. Sea Y una solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $BX = C$. Consideremos el operador $B' : R(B) + R(B)^\perp \to \mathcal{H}$ definido por $B' = Q_{\mathcal{M}//N(B)} B^\dagger$. Luego $B'B = Q_{\mathcal{M}//N(B)} P_{N(B)^\perp} = Q_{\mathcal{M}//N(B)}$ es acotado pues $\mathcal{M}$ es cerrado. Así, $Y = B'BY = Q_{\mathcal{M}//N(B)} B^\dagger BY = Q_{\mathcal{M}//N(B)} B^\dagger C = Q_{\mathcal{M}//N(B)} X_{N(B)^\perp}$, como queríamos probar.

$2 \rightarrow 3$. Supongamos $Y = Q_{\mathcal{M}//N(B)}X_{N(B)^\perp}$. En el párrafo anterior vimos que el operador $B' = Q_{\mathcal{M}//N(B)}B^\dagger$ satisface que $B'B = Q_{\mathcal{M}//N(B)}$; más aún, se tiene que $B' \in \mathcal{I}_g(B)$. En efecto, como $B'B = Q_{\mathcal{M}//N(B)}$ entonces B' es una inversa interna de B y como $\mathcal{M}$ es cerrado entonces $B'B \in L(\mathcal{H})$. Además, $B'BB' = Q_{\mathcal{M}//N(B)}B' = B'$. Luego, $Y = Q_{\mathcal{M}//N(B)}X_{N(B)^\perp} = B'BX_{N(B)^\perp} = B'C$.

$3 \rightarrow 4$. Esta implicación es inmediata pues $\mathcal{I}_g(B) \subseteq \mathcal{I}(B)$.

$4 \rightarrow 5$. Sea $Y = B'C$, donde $B' \in \mathcal{I}(B)$. Luego $R(Y) = R(B'C) \subseteq R(B'B) = \mathcal{M}$ para algún subespacio cerrado $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} N(B) = \mathcal{H}$. Así, $\overline{R(Y)} \subseteq \mathcal{M}$ y entonces $\overline{R(Y)} \cap N(B) = \{0\}$. Más aún, ya que $\mathcal{M} \dot{+} N(B) = \mathcal{H}$ es cerrado, tenemos que $\cos_0(\mathcal{M}, N(B)) < 1$. Luego, como $\overline{R(Y)} \subseteq \mathcal{M}$ entonces $\cos_0(\overline{R(Y)}, N(B)) \leq \cos_0(\mathcal{M}, N(B)) < 1$ y así queda probada la afirmación.

$5 \rightarrow 1$. Si $\cos_0(\overline{R(Y)}, N(B)) < 1$ entonces, por la Proposición 1.3.1, $\overline{R(Y)} \cap N(B) = \{0\}$ y $\overline{R(Y)} + N(B)$ es cerrado. Así, $\overline{R(Y)} \dot{+} N(B)$ es un subespacio cerrado. Por lo tanto $\mathcal{M} = (\overline{R(Y)} \dot{+} N(B))^\perp + \overline{R(Y)}$ tiene las siguientes propiedades: a) es cerrado, pues $(\overline{R(Y)} \dot{+} N(B))^\perp \subseteq R(Y)^\perp$; b) $R(Y) \subseteq \mathcal{M}$; c) $\mathcal{M} \dot{+} N(B) = \mathcal{H}$. Para probar la última propiedad, sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{M} \cap N(B)$, donde $\xi_1 \in (\overline{R(Y)} \dot{+} N(B))^\perp$ y $\xi_2 \in \overline{R(Y)}$. Entonces $\xi - \xi_2 \in (N(B) + \overline{R(Y)}) \cap (N(B) + \overline{R(Y)})^\perp = \{0\}$. Así $\xi_1 = 0$ y entonces $\xi = \xi_2 \in N(B) \cap \overline{R(Y)} = \{0\}$. Por lo tanto $\xi = 0$ y así $\mathcal{M} \cap N(B) = \{0\}$. Como $\overline{R(Y)} + N(B)$ es cerrado entonces es inmediato que $\mathcal{M} \dot{+} N(B) = \mathcal{H}$. Luego, Y es una solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $BX = C$. □

Corolario 2.3.9. *Sean $B \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $C \in L(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ e $Y \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ tales que $BY = C$. Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Y es una solución reducida de la ecuación $BX = C$;*

2. *$Y = \tilde{B}C$ para algún operador lineal $\tilde{B}$ con $R(C) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{B})$.*

Demostración.

$1 \rightarrow 2$ Esta implicación es consecuencia del Teorema 2.3.8.

$2 \rightarrow 1$ Si $Y = \tilde{B}C$ para algún operador lineal $\tilde{B}$ con $R(C) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{B})$ entonces, por la Proposición 2.3.5, $R(Y) \cap N(B) = \{0\}$. Además, como $R(Y) + N(B)$ tiene dimensión finita entonces $R(Y) + N(B)$ es un subespacio cerrado. Luego, por la Proposición 1.3.1, $\cos_0(R(Y), N(B)) < 1$ y así, por el Teorema 2.3.8, Y es una solución reducida de la ecuación $BX = C$. □

El siguiente ejemplo muestra que el Corolario 2.3.9 puede ser falso en el caso infinito dimensional.

Ejemplo 2.3.10. Sea $D \in L(\mathcal{H})$ un operador de rango no cerrado y $\xi \in \overline{R(D)} \setminus R(D)$. Definimos $B = P_{gen\{\xi\}^\perp}$. Claramente, D es una solución de la ecuación $BX = BD$. Más aún, $N(B) = gen\{\xi\}$ y entonces $R(D) \cap N(B) = \{0\}$. Así, por la Proposición 2.3.5, $D = \tilde{B}BD$ para algún operador lineal $\tilde{B} : \mathcal{D}(\tilde{B}) \to \mathcal{H}$ con $R(BD) \subseteq \mathcal{D}(\tilde{B})$. Sin embargo, D no es una solución reducida de la ecuación $BX = BD$. En efecto, como $\overline{R(D)} \cap N(B) = N(B) \neq \{0\}$ entonces $\cos_0(\overline{R(D)}, N(B)) = 1$. Luego, por el Teorema 2.3.8, D no es una solución reducida.

Observación 2.3.11. En el Corolario 1.4.1 vimos que la solución reducida de Douglas tiene norma mínima entre todas las soluciones de la ecuación en cuestión. Aquí veremos que ocurre lo mismo con las soluciones reducidas para $\mathcal{M}$, cuando se considera una norma ($|||\cdot|||$) equivalente a la norma de operadores inducida por $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $\mathcal{M}$ un complemento topológico de $N(B)$, sea $X_{\mathcal{M}} \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ la solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $BX = C$ y sea $B' : R(B) \oplus R(B)^\perp \subseteq \mathcal{K} \to \mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ una inversa generalizada de B tal que $N(B') = R(B)^\perp$. Entonces $X_{\mathcal{M}} = B'C$. Consideremos $Q = Q_{\mathcal{M}//N(B)}$ y $A = Q^*Q + (I - Q^*)(I - Q)$. Luego $A \in Gl(\mathcal{H})^+$ induce un producto interno, a saber, $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle$. Entonces $\left\langle Q_{\mathcal{M}//N(B)}\xi, \eta \right\rangle_A = \left\langle \xi, Q_{\mathcal{M}//N(B)}\eta \right\rangle_A$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Es decir, $Q_{\mathcal{M}//N(B)}$ es ortogonal con respecto al producto interno $\langle\ ,\ \rangle_A$, o, lo que es lo mismo, $AQ_{\mathcal{M}//N(B)} = Q^*_{\mathcal{M}//N(B)}A$. Luego, $\mathcal{M} = N(B)^{\perp_A}$, el complemento ortogonal de $N(B)$ respecto a $\langle\ ,\ \rangle_A$. Por lo tanto, si desde ahora consideramos $\mathcal{H}$ con el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_A$ entonces la inversa generalizada B' definida anteriormente es la inversa de Moore-Penrose de B. Luego, $X_{\mathcal{M}} = B'C$ es la solución reducida de Douglas de la ecuación $BX = C$ y así $|||X_{\mathcal{M}}||| = \inf\{|||D||| : \ D \in L(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \text{ tal que } BD = C\}$; donde $|||D||| = \sup\{\|D\xi\|_A : \xi \in \mathcal{G}, \|\xi\| = 1\}$. Notemos que, como $A \in Gl(\mathcal{H})^+$, entonces $\langle\ ,\ \rangle_A$ y $\langle\ ,\ \rangle$ son equivalentes. Por lo tanto, las normas de operadores inducidas por ellos también son equivalentes. $\triangle$

2.3.1. Soluciones reducidas positivas

Esta subsección está dedicada a estudiar soluciones reducidas positivas de ecuaciones tipo Douglas. El primero en dar una condición equivalente a la existencia de soluciones positivas de este tipo de ecuaciones fue Z. Sebestyén [57] quien probó el siguiente resultado:

Teorema (Sebestyén). *Sean $B, C \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tales que $R(C) \subseteq R(B)$. Entonces, la ecuación $BX = C$ admite una solución positiva si y sólo si $CC^* \leq \lambda BC^*$ para alguna constante $\lambda \geq 0$.*

Sin embargo, el resultado de Sebestyén no provee una fórmula explícita de tal solución. Más tarde, A. Dajić y J. J. Koliha [22] dieron una fórmula para la solución positiva bajo algunas hipótesis extras. Más precisamente, ellos probaron el siguiente resultado:

Teorema (Dajić-Koliha). *Sean $B, C \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tales que $R(C) \subseteq R(B)$ y $R(B)$ y $R(BC^*)$ son cerrados. Si la ecuación $BX = C$ tiene una solución positiva entonces la solución general positiva está dada por*

$$X = C^*(BC^*)'C + (I - B'B)S(I - B'B)^*,$$

donde $S \in L(\mathcal{H})^+$ y $(BC^*)'$ y B' son inversas internas arbitrarias de B y BC^*, respectivamente. Más aún, $C^*(BC^*)'C$ es una solución positiva independiente de la elección de la inversa interna $(BC^*)'$.

A continuación probamos que la fórmula de A. Dajić y J. J. Koliha vale si las condiciones $R(B)$ y $R(BC^*)$ cerrados se reemplazan por una cierta condición de ángulo. En la Observación 2.3.14 mostramos que nuestras hipótesis son más débiles que las de Dajić y Koliha. Antes, enunciamos un lema que necesitaremos para probar el resultado.

Lema 2.3.12. *La solución general autoadjunta de la ecuación homogénea $BX = 0$ está dada por*

$$Y = (I - B'B)Z(I - B'B)^*,$$

donde $Z \in L(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto y $B' \in \mathcal{I}(B)$.

Demostración. Para todo $B' \in \mathcal{I}(B)$ vale $I - B'B \in \mathcal{Q}_{N(B)}$. Sea Y una solución de $BX = 0$. Entonces $R(Y) \subseteq N(B)$ y así $Y = (I - B'B)Y$ para toda $B' \in \mathcal{I}(B)$. Si además $Y = Y^*$, tenemos que $Y = Y(I - B'B)^*$ y así $Y = (I - B'B)Y(I - B'B)^*$. Recíprocamente, si $Z \in L(\mathcal{H})$ es autoadjunto entonces $Y = (I - B'B)Z(I - B'B)^*$ es una solución autoadjunta de $BX = 0$. $\square$

La demostración del siguiente resultado sigue el esquema de la prueba presentada por Dajić y J. J. Koliha [[22], Theorem 5.2]

Teorema 2.3.13. *Sean $B, C \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ tales que la ecuación $BX = C$ tiene una solución positiva. Si $R(C) \subseteq R(BC^*)$ y $c_0(\overline{R(C^*)}, N(B)) < 1$ entonces*

$$X_0 = C^*(BC^*)^\dagger C$$

es una solución reducida positiva de la ecuación $BX = C$. Además, la solución general positiva es

$$Y = C^*(BC^*)^\dagger C + (I - B'B)S(I - B'B)^*, \tag{2.3}$$

donde $S \in L(\mathcal{H})^+$ y $B' \in \mathcal{I}(B)$.

Demostración. Comencemos notando que $X_0 = C^*(BC^*)^\dagger C \in L(\mathcal{H})$ porque $R(C) \subseteq R(BC^*)$ (Lema 2.1.5). Más aún, ya que la ecuación $BX = C$ admite una solución positiva entonces, por el Teorema de Sebestyén, $BC^* \in L(\mathcal{K})^+$ y así $(BC^*)^\dagger$ es positivo (Proposición 2.1.9). Luego, $X_0 \in L(\mathcal{H})^+$. Además, $BX_0 = B(C^*(BC^*)^\dagger C) = P_{\overline{R(BC^*)}}|_{\mathcal{D}((BC^*)^\dagger)}C = C$. Por otro lado, $\overline{R(X_0)} = \overline{R(C^*)}$. En efecto, ya que $BX_0 = C$ entonces $N(X_0) \subseteq N(C)$ lo cual implica que $\overline{R(C^*)} \subseteq \overline{R(X_0)}$. La otra inclusión es una consecuencia inmediata de la definición de X_0. Luego, como $c_0(\overline{R(X_0)}, N(B)) = c_0(\overline{R(C^*)}, N(B)) < 1$, por el Teorema 2.3.8, afirmamos que X_0 es una solución reducida. En lo que resta de la demostración nos dedicaremos a probar la fórmula (2.3). Sea Y una solución positiva de $BX = C$. Entonces $Y - X_0$ es una solución autoadjunta de $BX = 0$. Consideremos $\hat{B} \in \mathcal{I}(B)$ tal que $X_0 = \hat{B}C$; la existencia de tal $\hat{B}$ está garantizada por el Teorema 2.3.8. Luego, por el Lema 2.3.12, tenemos que

$$Y - X_0 = (I - \hat{B}B)Z(I - \hat{B}B)^*, \tag{2.4}$$

para algún $Z \in L(\mathcal{H})$ autoadjunto. Entonces,

$$\begin{aligned}(I - \hat{B}B)Y(I - \hat{B}B)^* &= (I - \hat{B}B)X_0(I - \hat{B}B)^* + (I - \hat{B}B)Z(I - \hat{B}B)^* \\ &= (I - \hat{B}B)Z(I - \hat{B}B)^*.\end{aligned}$$

Notemos que $S = (I - \hat{B}B)Z(I - \hat{B}B)^* \in L(\mathcal{H})^+$ porque $Y \in L(\mathcal{H})^+$. Sea $B' \in \mathcal{I}(B)$. Luego, $(I - B'B)(I - \hat{B}B) = (I - \hat{B}B)$ y entonces de la ecuación (2.4) se obtiene que $Y - X_0 = (I - B'B)(Y - X_0)(I - B'B)^*$. Así, $Y = X_0 + (I - B'B)S(I - B'B)^*$. Recíprocamente, si $Y = X_0 + (I - B'B)S(I - B'B)^*$, donde $S \in L(\mathcal{H})^+$ y $B' \in \mathcal{I}(B)$ entonces Y es una solución positiva de $BX = C$. □

Observación 2.3.14. Las hipótesis del Teorema 2.3.13 son más débiles que las hipótesis de A. Dajić y J. J. Koliha. En efecto, supongamos que las hipótesis de Dajić y Koliha valen. Como la ecuación $BX = C$ admite una solución positiva entonces $CC^* \leq \lambda BC^*$ para alguna constante no negativa λ. Por lo tanto, por el Teorema de Douglas, $R(C) \subseteq R((BC^*)^{1/2})$. Así, si $R(BC^*)$ es cerrado entonces $R(C) \subseteq R((BC^*)^{1/2}) = R(BC^*)$. Por otro lado, de la desigualdad $CC^* \leq \lambda BC^*$ obtenemos que

$N(BC^*) \subseteq N(C^*)$, y así si $R(BC^*)$ es cerrado entonces $\overline{R(C)} \subseteq R(BC^*) = R(CB^*) \subseteq R(C)$. Por lo tanto, $R(C)$ es cerrado. Además, la condición $N(BC^*) \subseteq N(C^*)$ implica $R(C^*) \cap N(B) = \{0\}$. Finalmente, si $X_0 = C^*(BC^*)^\dagger C$ entonces $R(C^*) = R(X_0 B^*) \subseteq R(X_0) \subseteq R(C^*)$, es decir, $R(C^*) = R(X_0)$. Ahora, $R(C^*) \dot{+} N(B) = R(X_0) \dot{+} N(B) = B^{-1}(R(C))$ es cerrado y así, por la Proposición 1.3.1, $c_0(\overline{R(C^*)}, N(B)) < 1$. Recíprocamente, sea $C \in L(\mathcal{H})^+$ con rango no cerrado y $B = P_{\overline{R(C)}}$. Obviamente, C es una solución reducida positiva de la ecuación $BX = C$ y $R(C) \subseteq R(BC^*)$. Además, $c_0(\overline{R(C^*)}, N(B)) = 0$. Sin embargo, $R(BC^*) = R(C)$ no es cerrado. $\triangle$

Observación 2.3.15. Sean B y C operadores que satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3.13 y $\mathcal{M}$ un complemento topológico de $N(BC^*)$. Entonces la solución reducida positiva X_0 del Teorema 2.3.13 es $X_0 = C^*(BC^*)'C$ para toda inversa generalizada $(BC^*)'$ de BC^* tal que $(BC^*)' : R(BC^*) \dot{+} \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}$ y $N((BC^*)') = \mathcal{M}^\perp$. En efecto, sea $(BC^*)'$ una inversa generalizada de BC^* con esas características. Como $BC^* \in L(\mathcal{K})^+$ entonces, por la Proposición 2.1.7, $(BC^*)'$ es un operador positivo. Luego $X_1 = C^*(BC^*)'C \in L(\mathcal{H})^+$. Además, $BX_1 = B(C^*(BC^*)'C) = Q_{R(BC^*)//\mathcal{M}^\perp} C = C$. Para probar que $X_0 = X_1$ veamos que ambas soluciones son soluciones reducidas de $BX = C$ para un mismo complemento topológico de $N(B)$. Para ésto observemos que, como $c_0(\overline{R(C^*)}, N(B)) < 1$ entonces $\overline{R(C^*)} \dot{+} N(B)$ es cerrado y entonces el subespacio $\mathcal{W} = (\overline{R(C^*)} \dot{+} N(B))^\perp + \overline{R(C^*)}$ es un complemento topológico de $N(B)$. Luego, como $\overline{R(X_0)} = \overline{R(C^*)} \subseteq \mathcal{W}$ entonces X_0 es la solución reducida para $\mathcal{W}$. Ahora, si probamos que $\overline{R(X_1)} = \overline{R(C^*)}$ entonces X_1 también resulta una solución reducida para $\mathcal{W}$ y así concluimos que $X_0 = X_1$. Es claro que $R(X_1) \subseteq \overline{R(C^*)}$. Además, como $BX_1 = C$ entonces $N(X_1) \subseteq N(C)$, o lo que es lo mismo, $\overline{R(C^*)} \subseteq \overline{R(X_1)}$. En consecuencia $\overline{R(C^*)} = \overline{R(X_1)}$ y así queda probada nuestra afirmación. $\triangle$

Capítulo 3

Proyecciones A-autoadjuntas

Los operadores que son autoadjuntos con respecto a un cierto producto interno se denominan *simetrizables*. Si bien tales operadores han sido estudiados desde mucho tiempo antes, los primeros trabajos sistemáticos sobre el tema corresponden a M. G. Krein [41] , A. C. Zaanen [60] y W. T. Reid [55] donde se estudian diferentes propiedades espectrales de operadores simetrizables. J. Dieudonné [24] y P D. Lax [43] estudiaron condiciones para garantizar la simetrizabilidad de operadores; otros trabajos más actuales corresponden a Z. Sebestyén [56], B.A. Barnes [9], S. Hassi, Z. Sebestyén y H. de Snoo [38] y P. Cojuhari y A. Gheondea [16] donde se obtienen muchas aplicaciones relacionadas a la noción de simetrizabilidad. En este capítulo trabajaremos con proyecciones que son autoadjuntas con respecto al semiproducto interno inducido por un operador positivo A (o bien, simetrizables para A). G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff [18], [19] y [21] han trabajado sobre la existencia y unicidad de tales proyecciones, las cuales también se denominan proyecciones A-autoadjuntas. En sus trabajos se encuentran distintas caracterizaciones, en término de descomposiciones del espacio de Hilbert y de los rangos de A y de $A^{1/2}$, que permiten asegurar la existencia de proyecciones A-autoadjuntas con un rango previamente fijado. Aquí focalizamos nuestra atención en la relación que existe entre las proyecciones A-autoadjuntas y ecuaciones tipo Douglas. Más precisamente, estudiaremos aquellas proyecciones A-autoadjuntas que están vinculadas con soluciones reducidas de ecuaciones tipo Douglas.

3.1. Nociones básicas sobre la teoría de compatibilidad

Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$, el funcional

$$\langle\ ,\ \rangle_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C},\ \langle \xi, \eta \rangle_A := \langle A\xi, \eta \rangle \tag{3.1}$$

define una forma sesquilineal Hermitiana que es semidefinida positiva, es decir, $\langle\ ,\ \rangle_A$ es un semiproducto interno sobre $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ entonces denotamos

$$\mathcal{S}^{\perp_A} := \{\xi \in \mathcal{H} : \langle \xi, \eta \rangle_A = 0\ \forall \eta \in \mathcal{S}\}$$

el subespacio A-ortogonal de $\mathcal{S}$. Simples cálculos muestran que $\mathcal{S}^{\perp_A}$ es cerrado y que las siguientes identidades valen:

$$\mathcal{S}^{\perp_A} = (A\mathcal{S})^\perp = A^{-1}(\mathcal{S}^\perp).$$

Si A es inyectivo entonces $\langle\ ,\ \rangle_A$ es un producto interno. Más aún, si $A \in Gl(\mathcal{H})^+$ entonces $\langle\ ,\ \rangle_A$ es un producto interno equivalente a $\langle\ ,\ \rangle$; luego todo subespacio cerrado $\mathcal{S}$ admite un A-complemento en $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$, a saber, el subespacio $\mathcal{S}^{\perp_A}$; así $\mathcal{H} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{S}^{\perp_A}$. Sin embargo, si A no es inversible tal complemento puede no existir; en efecto, $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{S} \cap N(A)$. Más aún, $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A}$ puede ser un subespacio propio de $\mathcal{H}$. Veamos un ejemplo de esta última afirmación: sea $B \in L(\mathcal{H})^+$ con rango no cerrado entonces el operador

$$A = \begin{pmatrix} B & B^{1/2} \\ B^{1/2} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1/2} & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{1/2} & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^+.$$

Consideremos el subespacio cerrado $\mathcal{S} = \mathcal{H} \oplus \{0\}$. Luego $\mathcal{S}^{\perp_A} = N(B) \oplus N(B)$ y así $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H} \oplus N(B) \subsetneq \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. En la proposición 3.1.1 veremos condiciones que garantizan la existencia de un A-complemento para un subespacio cerrado.

Dado $T \in L(\mathcal{H})$, un operador $W \in L(\mathcal{H})$ se dice un operador A-**adjunto** de T si

$$\langle T\xi, \eta \rangle_A = \langle \xi, W\eta \rangle_A \quad \text{para todo} \quad \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

o, lo que es equivalente, si W satisface la ecuación $AX = T^*A$. Además, el operador T se dice A-**autoadjunto** si $AT = T^*A$. Notemos que la existencia de un operador A-adjunto no está garantizada. En efecto, $T \in L(\mathcal{H})$ admite un operador A-adjunto si y sólo si la ecuación $AX = T^*A$ tiene solución. De esta manera, T puede no tener un operador A-adjunto, tener solamente uno o bien, tener infinitos operadores A-adjuntos.

Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ y un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ denotamos por $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ el conjunto de las proyecciones con rango $\mathcal{S}$ que son A-autoadjuntas:

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) := \{Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} : \ AQ = Q^*A\}.$$

El conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ es una variedad afín, enventualmente vacía. Si $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ es no vacío entonces el par $(A, \mathcal{S})$ se dice **compatible**. La teoría de compatibilidad ha sido introducida y extensamente desarrollada por G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff [18], [19] y [21]. En [46], A. Maestripieri y F. Martínez Pería estudiaron el conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ cuando el operador A es autoadjunto. En esta tesis trabajaremos solamente con el caso en que $A \in L(\mathcal{H})^+$. En la siguiente proposición resumimos algunas condiciones equivalentes a la compatibilidad de un par $(A, \mathcal{S})$. El material recopilado ha sido extraído de [18], [19] y [21].

Proposición 3.1.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado.*

1. *Consideremos A con la representación matricial (1.2). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

   a) *El par $(A, \mathcal{S})$ es compatible;*

   b) *$R(P_{\mathcal{S}}A) \subseteq R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ o equivalentemente $R(b) \subseteq R(a)$;*

   c) *La ecuación $ax = b$ admite una solución;*

   d) *$\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp}_{A} = \mathcal{H}$;*

   e) *Existe un subespacio cerrado $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ tal que $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{W} = \mathcal{H}$;*

   f) *$c_0(\mathcal{S}^{\perp}, \overline{A(\mathcal{S})}) < 1$.*

2. *Si $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces $\mathcal{S} + N(A)$ es un subespacio cerrado. Más aún, si $R(A)$ es cerrado entonces $(A, \mathcal{S})$ es compatible si y sólo si $\mathcal{S} + N(A)$ es un subespacio cerrado.*

Demostración.

a $\leftrightarrow$ c. Sea $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$. Consideremos la representación (1.3) de Q. Simples cálculos muestran que $AQ = Q^*A$ si y sólo si $ay = b$. Luego, por el teorema de Douglas, la equivalencia queda probada.

b $\leftrightarrow$ c. Observemos que

$$P_{\mathcal{S}}A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $R(P_{\mathcal{S}}A) = R(a) + R(b)$, $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}) = R(a)$ y entonces la equivalencia es consecuencia del teorema de Douglas.

a $\rightarrow$ d. Supongamos que el par $(A,\mathcal{S})$ es compatible y sea $Q \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$. Entonces $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ y así $\mathcal{H} = \mathcal{S} \dotplus N(Q) \subseteq \mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A}$. Luego $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$.

d $\rightarrow$ e. Supongamos que $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$ y denotemos $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp_A}$. Si $\mathcal{W} = \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{N}^{\perp}$ entonces $\mathcal{S} \dotplus \mathcal{W} = \mathcal{H}$. En efecto, $\mathcal{S} \cap (\mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{N}^{\perp}) = (\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp_A}) \cap \mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{N} \cap \mathcal{N}^{\perp} = \{0\}$. Por otro lado, es claro que $\mathcal{S} + \mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$. Ahora, sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{H}$, donde $\xi_1 \in \mathcal{S}$ y $\xi_2 \in \mathcal{S}^{\perp_A}$. Como $\mathcal{N}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ entonces $\mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{H}$ y podemos escribir $\xi_2 = \mu + \eta$, donde $\mu \in \mathcal{N}$ y $\eta \in \mathcal{N}^{\perp}$. Entonces $\xi_2 - \mu = \eta \in \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{N}^{\perp}$. Luego $\xi = \xi_1 + \mu + \eta$, donde $\xi_1 + \mu \in \mathcal{S}$ y $\eta \in \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{W}$. Por lo tanto $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S} + \mathcal{W}$ y así queda probada la implicación.

e $\rightarrow$ a. Sea $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ un subespacio cerrado tal que $\mathcal{S} \dotplus \mathcal{W} = \mathcal{H}$ y consideremos la única proyección $Q = Q_{\mathcal{S}//\mathcal{W}}$. Luego, para todo $\xi = \xi_1 + \xi_2, \eta = \eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{H}$, donde $\xi_1, \eta_1 \in \mathcal{S}$ y $\xi_2, \eta_2 \in \mathcal{W}$ vale $\langle Q(\xi_1 + \xi_2), \eta_1 + \eta_2 \rangle_A = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle_A = \langle \xi_1 + \xi_2, Q(\eta_1 + \eta_2) \rangle_A$. Por lo tanto $AQ = Q^*A$ y así el par $(A,\mathcal{S})$ es compatible.

d $\leftrightarrow$ f. Si $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$ entonces $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A}$ es cerrado y así $c(\mathcal{S}, \mathcal{S}^{\perp_A}) < 1$. Recordemos que $\mathcal{S}^{\perp_A} = (A\mathcal{S})^{\perp}$. Luego $c(\mathcal{S}^{\perp}, \overline{A(\mathcal{S})}) < 1$. Además, $\mathcal{S}^{\perp} \cap \overline{A(\mathcal{S})} = (\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A})^{\perp} = \{0\}$. Por lo tanto, $c_0(\mathcal{S}^{\perp}, \overline{A(\mathcal{S})}) < 1$. Recíprocamente, si $c_0(\mathcal{S}^{\perp}, \overline{A(\mathcal{S})}) < 1$ entonces, por la Proposición 1.3.1, $\mathcal{S}^{\perp} \cap \overline{A(\mathcal{S})} = \{0\}$ y $\mathcal{S}^{\perp} + \overline{A(\mathcal{S})}$ es cerrado. Luego, $\mathcal{S} + (A\mathcal{S})^{\perp}$ es cerrado y como $(\mathcal{S} + (A\mathcal{S})^{\perp})^{\perp} = \mathcal{S}^{\perp} \cap \overline{A(\mathcal{S})} = \{0\}$ entonces $\mathcal{S} + (A\mathcal{S})^{\perp} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$.

2. Supongamos que el par $(A,\mathcal{S})$ es compatible, consideremos $Q \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ y definimos $E = I - Q$. Notemos que E es una proyección A-autoadjunta con núcleo $\mathcal{S}$ y que $N(A) \subseteq N(E^*A) = N(AE)$. Luego $\mathcal{S} + N(A) \subseteq N(AE)$. Por otro lado, afirmamos que $N(AE) = \{\xi \in \mathcal{H} : E\xi \in N(A)\} = \mathcal{S} + (N(A) \cap R(E))$. En efecto, sea $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $E\xi \in N(A)$. Entonces $E\xi \in N(A) \cap R(E)$ y luego $E\xi \in \mathcal{S} + N(A) \cap R(E)$. Así $\{\xi \in \mathcal{H} : E\xi \in N(A)\} \subseteq \mathcal{S} + (N(A) \cap R(E))$. Ahora, sea $\xi = \eta + \mu \in \mathcal{S} + (N(A) \cap R(E))$, donde $\eta \in \mathcal{S}$ y $\mu \in N(A) \cap R(E)$. Entonces $AE\xi = AE\eta + A\mu = 0$ y así $E\xi \in N(A)$. Por lo tanto $\mathcal{S} + (N(A) \cap R(E)) \subseteq \{\xi \in \mathcal{H} : E\xi \in N(A)\}$ y así queda probada la afirmación. Luego $N(AE) = \mathcal{S} + (N(A) \cap R(E)) \subseteq \mathcal{S} + N(A)$, con lo cual hemos probado que $\mathcal{S} + N(A) = N(AE)$. En consecuencia, el subespacio $\mathcal{S} + N(A)$ es cerrado. Por otro lado, consideremos ahora A con rango cerrado y $\mathcal{S} + N(A)$ cerrado. La compatibilidad del par $(A,\mathcal{S})$ seguirá del hecho que $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ es cerrado pues, en tal caso, $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}) = R(a) = R(a^{1/2}) \supseteq R(b)$ (Proposición 1.5.1) y así, por el item (1) de

esta proposición se obtiene la afirmación. Veamos que $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ es cerrado. Observemos que $N(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}) = N(AP_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}^{\perp} \oplus (\mathcal{S} \cap N(A))$. En efecto, es claro que $N(AP_{\mathcal{S}}) \subseteq N(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$. Si $\xi \in N(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ entonces $A^{1/2}P_{\mathcal{S}}\xi \in R(A^{1/2}P_{\mathcal{S}}) \cap N(P_{\mathcal{S}}A^{1/2}) = R(A^{1/2}P_{\mathcal{S}}) \cap R(A^{1/2}P_{\mathcal{S}})^{\perp} = \{0\}$. Luego $\xi \in N(A^{1/2}P_{\mathcal{S}}) \subseteq N(AP_{\mathcal{S}})$ y así $N(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}) = N(AP_{\mathcal{S}})$. Sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \in N(AP_{\mathcal{S}})$, donde $\xi_1 \in \mathcal{S}^{\perp}$, $\xi_2 \in \mathcal{S} \cap N(A)$ y $\xi_3 \in \mathcal{S} \cap (\mathcal{S} \cap N(A))^{\perp}$. Entonces $0 = AP_{\mathcal{S}}\xi = A\xi_3$ y así $\xi_3 = 0$; es decir $N(AP_{\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{S}^{\perp} \oplus (\mathcal{S} \cap N(A))$. La otra inclusión es inmediata y por lo tanto $N(AP_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}^{\perp} \oplus (\mathcal{S} \cap N(A))$. Llamemos $\mathcal{M} := \mathcal{S} \cap (\mathcal{S} \cap N(A))^{\perp} = N(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})^{\perp} = \overline{R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})}$. Es claro que $\mathcal{M} \cap N(A) = \{0\}$. Luego, como $\mathcal{N} = \mathcal{S} + N(A) = \mathcal{M} + N(A)$ es cerrado, podemos definir $Q : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $Q = Q_{\mathcal{M}//N(A)}$. Notemos que Q es una proyección acotada pues $\mathcal{M}$ es cerrado. Si $Q = 0$ entonces $\mathcal{M} = \{0\}$, es decir, $P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}} = 0$. Si $Q \neq 0$ entonces existe $0 \neq \xi \in \mathcal{M}$. Sea $\eta \in R(A)$ tal que $A\xi = A\eta$. Luego $A(\xi - \eta) = 0$ y así $\eta = \xi + \omega$, donde $\omega \in N(A)$. Por lo tanto $Q\eta = \xi$ y así $\|\xi\| \leq \|Q\|\|\eta\|$. Luego, $\langle P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}\xi, \xi\rangle = \langle AP_{\mathcal{S}}\xi, P_{\mathcal{S}}\xi\rangle = \langle A\xi, \xi\rangle = \langle A\eta, \eta\rangle \geq \lambda\|\eta\|^2 \geq \lambda\|Q\|^{-2}\|\xi\|^2$, para algún $\lambda > 0$; notemos que la primer desigualdad vale por el hecho que $R(A)$ es cerrado y $A|_{R(A)}$ es inversible. Por lo tanto hemos probado que $P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}$ es acotado inferiormente y entonces su rango es cerrado, como queríamos probar. □

Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ y consideramos la representación matricial (1.2) de A entonces, por la Proposición 1.5.1, $R(b) \subseteq R(a^{1/2})$; por lo tanto, si $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})$ es cerrado entonces el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible pues $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}) = R(a) = R(a^{1/2}) \supseteq R(b)$. En particular:

- Si $dim(\mathcal{H}) < \infty$ entonces $(A, \mathcal{S})$ es compatible para todo subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$;
- Si $dim(\mathcal{S}) < \infty$ entonces $(A, \mathcal{S})$ es compatible;
- Si $A \in Gl(\mathcal{H})^+$ entonces $R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$. Luego $(A, \mathcal{S})$ es compatible.

3.2. Proyecciones reducidas

Esta sección está dedicada a aplicar los resultados de la sección 2.3 del Capítulo 2 a la clase de proyecciones A-autoadjuntas. Primero enunciamos un resultado que motiva una caracterización de los elementos del conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ por medio de sus núcleos.

Proposición 3.2.1. *Sean $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ subespacios cerrados tales que $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \mathcal{H}$. Si $\mathcal{W}$ es un subespacio cerrado contenido en $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{W} = \mathcal{H}$ entonces $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$ para algún subespacio cerrado*

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ que satisface $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{H}$. Recíprocamente, si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{H}$ entonces $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{T} \cap \mathcal{M} = \mathcal{H}$.

Demostración. Si $\mathcal{W}$ es un subespacio cerrado contenido en $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{W} = \mathcal{H}$ entonces $\mathcal{T} = \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \dot{+} \mathcal{W}$. En efecto, $(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \cap \mathcal{W} = (\mathcal{S} \cap \mathcal{W}) \cap \mathcal{T} = \{0\}$. Por otro lado $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} + \mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}$. Ahora, sea $\xi = \eta + \mu \in \mathcal{T}$, donde $\eta \in \mathcal{S}$ y $\mu \in \mathcal{W}$. Entonces $\xi - \mu = \eta \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Luego $\xi \in (\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) + \mathcal{W}$ y entonces $(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \dot{+} \mathcal{W} = \mathcal{T}$. Definimos $\mathcal{M} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{T}^{\perp}$. Observemos que el subespacio $\mathcal{M}$ es cerrado pues $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}$. Además $\mathcal{M} \dot{+} (\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = \mathcal{H}$. En efecto, $\mathcal{M} + \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{W} + \mathcal{T}^{\perp} + \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{T}^{\perp} + (\mathcal{W} + \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = \mathcal{T}^{\perp} + \mathcal{T} = \mathcal{H}$. Queda probar que $\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$. Sea $\xi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Como $\xi \in \mathcal{M}$ entonces $\xi = \xi_1 + \xi_2$, donde $\xi_1 \in \mathcal{W}$ y $\xi_2 \in \mathcal{T}^{\perp}$. Además, $\xi \in \mathcal{T}$. Luego $\xi - \xi_1 = \xi_2 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\perp} = \{0\}$ y entonces $\xi = \xi_1 \in \mathcal{W} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \{0\}$. En consecuencia $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{H}$. Resta probar que $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$. Es evidente que $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$. Para probar la otra inclusión consideremos $\xi = \eta + \mu \in \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$, donde $\eta \in \mathcal{W}$ y $\mu \in \mathcal{T}^{\perp}$. Entonces $\xi - \eta = \mu \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}^{\perp} = \{0\}$. Por lo tanto $\xi \in \mathcal{W}$ y así $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$. Recíprocamente, supongamos que existe un subespacio cerrado $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{S} \cap \mathcal{T} = \mathcal{H}$. Para probar la afirmación es suficiente ver que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S} + \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$. Sea $\xi = \eta + \omega \in \mathcal{H}$, donde $\eta \in \mathcal{S}$ y $\omega \in \mathcal{T}$. Además $\omega = \rho + \tau$, donde $\rho \in \mathcal{M}$ y $\tau \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Entonces $\omega - \tau = \rho \in \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$. Luego $\xi = \eta + \tau + \rho$, donde $\eta + \tau \in \mathcal{S}$ y $\rho \in \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$ y así $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S} + \mathcal{T} \cap \mathcal{M}$ como queríamos probar. □

Una proyección $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ pertenece al conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ si y sólo si $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$. La prueba de esta afirmación se encuentra diseminada en la demostración de la Proposición 3.1.1. La proposición anterior provee una descripción más precisa de los núcleos de los elementos del conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$, como veremos a continuación.

Proposición 3.2.2. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible y $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$;*

2. *$N(Q) = \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{M}$ para algún complemento topológico $\mathcal{M}$ de $\mathcal{S} \cap N(A)$.*

Demostración.

1→ 2 Como el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{\perp_A} = \mathcal{H}$. Si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ y $\mathcal{S} \dot{+} N(Q) = \mathcal{H}$. Luego la afirmación se obtiene por la Proposición 3.2.1.

2→ 1 Como $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ y $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ entonces $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. □

De acuerdo a las representaciones matriciales (1.2) de $A \in L(\mathcal{H})^+$ y (1.3) de una proyección $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$, la proyección Q es A-autoadjunta si y sólo si $y \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S})$ es una solución de la ecuación $ax = b$. En el Teorema 3.2.6 caracterizamos las proyecciones A-autoadjuntas que se obtienen mediante las soluciones reducidas de esta ecuación.

Definición 3.2.3. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible, A con la representación matricial (1.2) y $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ con la representación matricial (1.3). Diremos que Q es una* **proyección reducida** *si y es una solución reducida de la ecuación $ax = b$ para algún complemento topológico de $N(a)$ en $\mathcal{S}$.*

Antes de estudiar las proyecciones reducidas enunciamos dos lemas que necesitaremos para tal fin.

Lema 3.2.4. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible y A con la representación matricial (1.2). Si $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A)$ entonces $\mathcal{N} = N(a)$.*

Demostración. Si $\xi \in N(a) \subseteq \mathcal{S}$ entonces, como el par es compatible y a es positivo, tenemos que $N(a) \subseteq N(b^*)$ y luego $b^*\xi = 0$. Por lo tanto, $A\xi = a\xi + b^*\xi = 0$, es decir, $\xi \in \mathcal{N}$. Probemos la otra inclusión, si $\xi \in \mathcal{N}$ entonces $a\xi = P_{\mathcal{S}} A P_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} \xi = P_{\mathcal{S}} A \xi = 0$. Luego, $\xi \in N(a)$, es decir, $\mathcal{N} \subseteq N(a)$ y por lo tanto $\mathcal{N} = N(a)$, como queríamos probar. □

Lema 3.2.5. *Si $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ satisfacen $N(Q_1) \subseteq N(Q_2)$ y $R(Q_1) \subseteq R(Q_2)$ entonces $Q_1 = Q_2$.*

Demostración. Notemos que la afirmación del lema es consecuencia inmediata de las siguientes equivalencias: $N(Q_1) \subseteq N(Q_2) \Leftrightarrow Q_2 Q_1 = Q_2$ y $R(Q_1) \subseteq R(Q_2) \Leftrightarrow Q_2 Q_1 = Q_1$. Por lo tanto es suficiente probar las equivalencias: supongamos $N(Q_1) \subseteq N(Q_2)$ y sea $\xi = \eta + \mu \in \mathcal{H}$, donde $\eta \in N(Q_1)$ y $\mu \in R(Q_1)$. Entonces $Q_2 Q_1 \xi = Q_2 Q_1 (\eta + \mu) = Q_2 Q_1 \mu = Q_2 \mu$ y $Q_2 \xi = Q_2(\eta + \mu) = Q_2 \mu$. Por lo tanto $Q_2 Q_1 = Q_2$. La recíproca es inmediata. Para probar la segunda equivalencia supongamos que $R(Q_1) \subseteq R(Q_2)$ y tomemos nuevamente $\xi = \eta + \mu \in \mathcal{H}$, donde $\eta \in N(Q_1)$ y $\mu \in R(Q_1)$. Entonces $Q_2 Q_1 \xi = \mu$ y $Q_1 \xi = \mu$. Así $Q_2 Q_1 = Q_1$. La recíproca es evidente. □

Observemos que en la Proposición 3.2.2 describimos el núcleo de los elementos del conjunto $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ mediante complementos de $\mathcal{S} \cap N(A)$. En el siguiente resultado daremos una condición adicional sobre tal complemento para que $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ sea una proyección reducida.

Teorema 3.2.6. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible y $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Q es una proyección reducida;*

2. *$N(Q) = \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{M}$, donde $\mathcal{M}$ es un complemento topológico de $\mathcal{S} \cap N(A)$ y $\cos(\mathcal{M}, \mathcal{S}) = 0$.*

3. *$\cos_0(\overline{R(QP_{\mathcal{S}^\perp})}, \mathcal{S} \cap N(A)) < 1$.*

Demostración. A lo largo de esta demostración trabajaremos con la representación matricial (1.3) de Q.

$1 \to 2$ Sea Q una proyección reducida. Entonces el operador y de la representación matricial de Q es una solución reducida de la ecuación $ax = b$ para un complemento topológico $\mathcal{W}$ de $N(a)$. Definimos $\mathcal{M} = \mathcal{W} + \mathcal{S}^\perp$. Notemos que $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado pues $\mathcal{W}$ y $\mathcal{S}^\perp$ son subespacios ortogonales. Luego, $\mathcal{M} + (\mathcal{S} \cap N(A)) = \mathcal{M} + N(a) = \mathcal{W} + \mathcal{S}^\perp + N(a) = \mathcal{S} + \mathcal{S}^\perp = \mathcal{H}$. Además, $\mathcal{M} \cap (\mathcal{S} \cap N(A)) = \{0\}$. En efecto, si $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{M} \cap (\mathcal{S} \cap N(A))$ con $\xi_1 \in \mathcal{S}^\perp$ y $\xi_2 \in \mathcal{W}$ entonces $\xi - \xi_2 = \xi_1 \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp = \{0\}$. Por lo tanto $\xi_1 = 0$ y así $\xi = \xi_2 \in \mathcal{W} \cap N(a) = \{0\}$, es decir, $\xi = 0$ y entonces $\mathcal{M} \dotplus \mathcal{S} \cap N(A) = \mathcal{H}$. Luego, por la Proposición 3.2.1 vale que $\mathcal{S} \dotplus \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{M} = \mathcal{H}$ y así, por el Lema 3.2.5, para probar que $N(Q) = \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{M}$ es suficiente probar que $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A} \cap \mathcal{M}$. Ahora, como $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces $N(Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$. Veamos que $N(Q) \subseteq \mathcal{M}$. Para ésto, sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in N(Q)$ con $\xi_1 \in \mathcal{S}$ y $\xi_2 \in \mathcal{S}^\perp$. Luego $Q\xi = \xi_1 + y\xi_2 = 0$. Por lo tanto, $\xi_1 = -y\xi_2 \in \mathcal{W}$. Así, $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{W} + \mathcal{S}^\perp = \mathcal{M}$ y entonces $N(Q) \subseteq \mathcal{M}$. Sólo queda probar que $\cos(\mathcal{M}, \mathcal{S}) = 0$, o, lo que es equivalente, $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \oplus (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}^\perp)$. Claramente, $(\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \oplus (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}^\perp) \subseteq \mathcal{M}$. Para probar la otra inclusión consideremos $\eta = \eta_1 + \eta_2 \in \mathcal{M}$, donde $\eta_1 \in \mathcal{W}$ y $\eta_2 \in \mathcal{S}^\perp$. Entonces $\eta - \eta_1 = \eta_2 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}^\perp$ y $\eta - \eta_2 = \eta_1 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$. Por lo tanto $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \oplus (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}^\perp)$ y en consecuencia $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \oplus (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}^\perp)$.

$2 \to 1$ Es suficiente mostrar que existe un subespacio cerrado $\mathcal{W}$ tal que $\mathcal{W} \dotplus N(a) = \mathcal{S}$ y $R(y) \subseteq \mathcal{W}$. Definamos $\mathcal{W} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{W} + N(a) \subseteq \mathcal{S}$. Ahora, sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{S}$, donde $\xi_1 \in \mathcal{M}$ y $\xi_2 \in \mathcal{S} \cap N(A) = N(a)$. Luego $\xi - \xi_2 = \xi_1 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S} = \mathcal{W}$. Además, $\mathcal{W} \cap N(a) = \mathcal{W} \cap (\mathcal{S} \cap N(A)) = \mathcal{M} \cap (\mathcal{S} \cap N(A)) = \{0\}$. Así, $\mathcal{W} \dotplus N(a) = \mathcal{S}$. Ahora, si $\xi \in \mathcal{S}^\perp$ entonces $-y\xi + \xi \in N(Q) \subseteq \mathcal{M}$. Como $\cos(\mathcal{M}, \mathcal{S}) = 0$ entonces $\mathcal{M} = (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}) \oplus (\mathcal{M} \cap \mathcal{S}^\perp)$ y así $-y\xi + \xi = \kappa_1 + \kappa_2$, donde $\kappa_1 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$ y $\kappa_2 \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}^\perp$. Luego $-y\xi = \kappa_1$ y $\xi = \kappa_2$ y así $R(y) \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{S} = \mathcal{W}$.

$1 \leftrightarrow 3$ Es consecuencia del Teorema 2.3.8. □

Definición 3.2.7. *Si el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible, la única proyección reducida determinada por la solución* *reducida de Douglas de la ecuación $ax = b$, se denota $P_{A,\mathcal{S}}$. Más precisamente,*

$$P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & a^{\dagger}b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 3.2.8. Si el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible y $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces Q es la proyección reducida $P_{A,\mathcal{S}}$ si y sólo si alguna de las siguientes condiciones vale:

1. $N(Q) = \mathcal{S}^{\perp_A} \cap (\mathcal{S} \cap N(A))^{\perp}$;

2. $c_0(\overline{R(QP_{\mathcal{S}^{\perp}})}, \mathcal{S} \cap N(A)) = 0$. $\triangle$

A continuación presentamos un resumen de propiedades que satisface el elemento $P_{A,\mathcal{S}}$ y que han sido estudiadas en [18], [19], [20] y [21].

Proposición 3.2.9. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible y $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A)$. Entonces:*

1. $P_{A,\mathcal{S}} = P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N}}$.

2. $\|P_{A,\mathcal{S}}\|^2 = \|P_{A\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\|^2 + 1$.

3. *$\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ es una variedad afín la cual puede parametrizarse como*

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = P_{A,\mathcal{S}} + \mathcal{L}(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{N}),$$

donde hemos identificado $\mathcal{L}(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{N})$ con $\{T \in L(\mathcal{H}) : T(\mathcal{S}) = \{0\}$ y $T(\mathcal{S}^{\perp}) = \mathcal{N}\}$. En particular, si $\mathcal{N} = \{0\}$ entonces $\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{P_{A,\mathcal{S}}\}$.

4. *$\|P_{A,\mathcal{S}}\| = \text{mín}\{\|Q\| : Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})\}$. Sin embargo, $P_{A,\mathcal{S}}$ no es en general el único $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ que realiza la mínima norma.*

Demostración. A lo largo de esta demostración consideraremos las descomposiciones $\mathcal{S} = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}$ y $\mathcal{H} = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{S}^{\perp}$; respecto a éstas, los operadores A y $P_{A,\mathcal{S}}$ se escriben como:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1^* & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1^{\dagger}b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

1. Notemos que, bajo la descomposición $\mathcal{H} = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{S}^{\perp}$, los operadores $P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ y $P_{\mathcal{N}}$ tienen las siguientes representaciones

$$P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1^{\dagger}b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_{\mathcal{N}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego por (3.2) obtenemos la descomposición $P_{A,\mathcal{S}} = P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N}}$.

2. Sea $\xi = \eta + \sigma + \rho \in \mathcal{H}$, donde $\eta \in \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$, $\sigma \in \mathcal{N}$ y $\rho \in \mathcal{S}^{\perp}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|P_{A,\mathcal{S}}\|^2 &= \sup_{\|\xi\|=1} \|(P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N}})\xi\|^2 = \sup_{\|\xi\|=1} \|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}(\eta+\rho) + P_{\mathcal{N}}\sigma\|^2 \\ &= \sup_{\|\xi\|=1} \{\|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}(\eta+\rho)\|^2 + \|P_{\mathcal{N}}\sigma\|^2\} \\ &= \sup_{\|\xi\|=1} \|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}(\eta+\rho)\|^2 + \sup_{\|\xi\|=1} \|\sigma\|^2 \\ &= \|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\|^2 + 1. \end{aligned}$$

3. Como el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces $\mathcal{N} = N(a)$. Sea $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ con la representación matricial (1.3). Entonces el operador y de la representación matricial de Q es una solución de la ecuación $ax = b$, donde a, b son los operadores de la representación (1.2) de A. Luego, $y = a^{\dagger}b + d$, con $d \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S})$ y $R(d) \subseteq N(a) = \mathcal{N}$ y así obtenemos que $\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) \subseteq P_{A,\mathcal{S}} + \mathcal{L}(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{N})$. La otra inclusión se prueba de manera análoga.

4. Si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces por el ítem anterior $Q = P_{A,\mathcal{S}} + Z$, donde $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{N})$; es decir,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1^{\dagger}b \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

para algún $z \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{N})$. Luego, si $\xi = \eta + \sigma + \rho \in \mathcal{H}$, donde $\eta \in \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$, $\sigma \in \mathcal{N}$ y $\rho \in \mathcal{S}^{\perp}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|Q\|^2 &= \|I-Q\|^2 = \sup_{\|\xi\|=1} \|(-a_1^\dagger b_1 - z + 1)\rho\|^2 \\
&= \sup_{\|\xi\|=1} \{\| - a_1^\dagger b_1 \rho\|^2 + \| - z\rho\|^2 + \|\rho\|^2\} \\
&\geq \sup_{\|\xi\|=1} \{\| - a_1^\dagger b_1 \rho\|^2 + \|\rho\|^2\} \\
&= \sup_{\|\xi\|=1} \|(-a_1^\dagger b_1 + 1)\rho\|^2 = \|I - P_{A,\mathcal{S}}\|^2 \\
&= \|P_{A,\mathcal{S}}\|^2.
\end{aligned}$$

Veamos que el elemento $P_{A,\mathcal{S}}$ no es, en general, el único elemento que realiza la mínima norma. En efecto, sea $d \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S})$ tal que $\|d\| = 1$, $R(d) = \overline{R(d)} \neq \mathcal{S}$ y $\{0\} \neq N(d) \subseteq \mathcal{S}^\perp$. Consideremos $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$ y $T_1, T_2 \in L(\mathcal{H})$ definidos por

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_2 = \begin{pmatrix} P_{R(d)} & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego $T_2^* T_2 \geq T_1^* T_1 \geq 0$ y definimos

$$A = T_2^* T_2 - T_1^* T_1 = \begin{pmatrix} P_{R(d)} & d \\ d^* & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H})^+.$$

Como $R(P_\mathcal{S} A P_\mathcal{S}) = R(d)$ es cerrado entonces el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible y en consecuencia $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A) = R(d)^\perp$. Además, el operador d es la solución reducida de Douglas de la ecuación $P_{R(d)} x = d$. Así obtenemos que

$$P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora consideremos $z \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{N})$, $z \neq 0$ tal que $N(z)^\perp = N(d)$ y $0 \leq \|z\| \leq 1$; tomemos $Q = P_{A,\mathcal{S}} + z$ como en (3.3). Claramente, $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Luego, sea $\xi = \eta + \sigma + \rho \in \mathcal{H}$, donde

$\eta \in \mathcal{S}$, $\sigma \in N(d)$ y $\rho \in N(d)^\perp$. Entonces

$$\begin{aligned} \|Q\|^2 &= \|I-Q\|^2 = \sup_{\|\xi\|=1} \|-d\rho - z\sigma + (\sigma+\rho)\|^2 \\ &= \sup_{\|\xi\|=1} \{\|-d\rho + (\sigma+\rho)\|^2 + \|-z\sigma\|^2\} \\ &\leq 1 + \sup_{\|\xi\|=1} \|-d\rho + (\sigma+\rho)\|^2 = 1 + \|1 - P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\|^2 \\ &= 1 + \|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\|^2 = \|P_{A,\mathcal{S}}\|^2. \end{aligned}$$

Así $\|Q\| \leq \|P_{A,\mathcal{S}}\|$. Luego, por la primera parte de este ítem tenemos que $\|Q\| = \|P_{A,\mathcal{S}}\|$, como queríamos probar. □

En el próximo resultado mostramos que el elemento $P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ es la solución reducida de Douglas de la ecuación $A^{1/2}P_{\mathcal{S}}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$. El resultado provee una fórmula para el elemento $P_{A,\mathcal{S}}$ cuando $\mathcal{S} \cap N(A) = \{0\}$, este hecho ha sido probado en [20] bajo la hipótesis $A^{1/2}(\mathcal{S})$ cerrado. Aquí omitimos esta condición.

Proposición 3.2.10. *Si $(A,\mathcal{S})$ es compatible y $\mathcal{T} = \overline{A^{1/2}\mathcal{S}}$ entonces vale $R(P_{\mathcal{T}}A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2}P_{\mathcal{S}})$. Más aún, si $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A)$ entonces $P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ es la solución reducida de Douglas de $A^{1/2}P_{\mathcal{S}}X = P_{\mathcal{T}}A^{1/2}$. Además, si $\mathcal{N} = \{0\}$ entonces $P_{A,\mathcal{S}} = (A^{1/2}P_{\mathcal{S}})^\dagger P_{\mathcal{T}}A^{1/2}$.*

Demostración. Es suficiente probar que $P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ es la solución reducida de Douglas de la ecuación $A^{1/2}P_{\mathcal{S}}X = P_{\mathcal{T}}A^{1/2}$. Para ésto observemos que

$$A^{1/2}P_{\mathcal{T}}A^{1/2} = AP_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} = AP_{\mathcal{S}}P_{A\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}. \tag{3.4}$$

En efecto, sea $\eta = P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\xi$ y $\rho = \xi - \eta \in (\mathcal{S}\ominus\mathcal{N})^{\perp_A} = A^{-1}((\mathcal{S}\ominus\mathcal{N})^\perp)$. Entonces, $A^{1/2}\eta \in A^{1/2}(\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{T}$ y $A^{1/2}\rho \in A^{-1/2}((\mathcal{S}\ominus\mathcal{N})^\perp) = (A^{1/2}(\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}))^\perp = \mathcal{T}^\perp$. Así, $A^{1/2}P_{\mathcal{T}}A^{1/2}\xi = A^{1/2}P_{\mathcal{T}}(A^{1/2}\rho + A^{1/2}\eta) = A^{1/2}P_{\mathcal{T}}A^{1/2}\eta = A\eta = AP_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\xi$. Es inmediato que $AP_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} = AP_{\mathcal{S}}P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ y así queda probada la igualdad (3.4). Luego, $A^{1/2}(A^{1/2}P_{\mathcal{S}}P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} - P_{\mathcal{T}}A^{1/2}) = 0$. Como $R(A^{1/2}P_{\mathcal{S}}P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}} - P_{\mathcal{T}}A^{1/2}) \subseteq \overline{R(A^{1/2})}$ entonces $P_{\mathcal{T}}A^{1/2} = A^{1/2}P_{\mathcal{S}}P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$. Por lo tanto, $P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ es una solución de la ecuación $A^{1/2}P_{\mathcal{S}}X = P_{\mathcal{T}}A^{1/2}$. Para probar que $P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ es la solución reducida de Douglas notemos que, como el par $(A,\mathcal{S})$ es compatible, $\mathcal{S} \cap N(A) = N(a)$. Luego $N(A^{1/2}P_{\mathcal{S}})^\perp = \overline{R(P_{\mathcal{S}}A^{1/2})} = \overline{R(P_{\mathcal{S}}AP_{\mathcal{S}})} = R(a) = \mathcal{S}\ominus\mathcal{N}$; es decir $R(P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}) \subseteq N(A^{1/2}P_{\mathcal{S}})^\perp$. Si $\mathcal{N} = \{0\}$ entonces la fórmula $P_{A,\mathcal{S}} = (A^{1/2}P_{\mathcal{S}})^\dagger P_{\mathcal{T}}A^{1/2}$ es consecuencia de la observación 2.3.7. □

Finalizamos este capítulo probando que si el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces la ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ tiene solución. En tal caso, relacionamos las soluciones reducidas de esta ecuación con proyecciones A-autoadjuntas. Además, si $\mathcal{S} \cap N(A) = \{0\}$, probamos que el elemento $P_{A,\mathcal{S}}$ es una solución reducida de la ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$.

Proposición 3.2.11. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible. Entonces:*

1. *La ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ tiene solución.*

2. *Si $X_{\mathcal{M}}$ es una solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ entonces $X_{\mathcal{M}}$ es una proyección A-autoadjunta con $N(X_{\mathcal{M}}) = \mathcal{S}^{\perp_A}$.*

3. *Si $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A) = \{0\}$ entonces existe un subespacio cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \dot{+} N(A) = \mathcal{H}$. En tal caso, $P_{A,\mathcal{S}}$ es la solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$. En otras palabras, $P_{A,\mathcal{S}} = (A^{1/2})'P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ donde $(A^{1/2})'$ es una inversa generalizada de $A^{1/2}$ con $R((A^{1/2})') = \mathcal{M}$.*

Demostración.

1. Por la Proposición 3.2.10, la ecuación $A^{1/2}P_{\mathcal{S}}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ tiene solución. Por lo tanto, $R(P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2}P_{\mathcal{S}}) \subseteq R(A^{1/2})$. Así, $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ tiene solución.

2. Sea $X_{\mathcal{M}}$ una solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$. Luego, vale $A^{1/2}X_{\mathcal{M}}^2 = A^{1/2}X_{\mathcal{M}}X_{\mathcal{M}} = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}X_{\mathcal{M}} = P^2_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2} = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$. Entonces $X_{\mathcal{M}}$ y $X_{\mathcal{M}}^2$ son soluciones reducidas para $\mathcal{M}$ de la ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ y así, $X_{\mathcal{M}} = X_{\mathcal{M}}^2$. Además, $AX_{\mathcal{M}} = A^{1/2}P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ es autoadjunto. Por lo tanto $X_{\mathcal{M}}$ es una proyección A-autoadjunta. Finalmente, ya que $N(X_{\mathcal{M}}) = N(P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2})$, es suficiente mostrar que $N(P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}) = \mathcal{S}^{\perp_A}$. Sea $\xi \in N(P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2})$ entonces para todo $\eta \in \mathcal{S}$ se tiene que $\langle \xi, \eta \rangle_A = \left\langle A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle = \left\langle A^{1/2}\xi, P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}\eta \right\rangle = \left\langle P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle = 0$. Luego $\xi \in \mathcal{S}^{\perp_A}$ y así $N(P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$. La otra inclusión se prueba de manera análoga.

3. Como $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces $\mathcal{S} + N(A)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Así, $\mathcal{M} = \mathcal{S} + (\mathcal{S} \dot{+} N(A))^{\perp}$ es un subespacio cerrado pues $(\mathcal{S} \dot{+} N(A))^{\perp} \subseteq \mathcal{S}^{\perp}$. Claramente, $\mathcal{M} + N(A) = \mathcal{H}$. Además $\mathcal{M} \cap N(A) = \{0\}$. En efecto, sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathcal{M} \cap N(A)$, donde $\xi_1 \in \mathcal{S}$ y $\xi_2 \in (\mathcal{S} \dot{+} N(A))^{\perp}$. Entonces $\xi - \xi_1 = \xi_2 \in (\mathcal{S} \dot{+} N(A)) \cap (\mathcal{S} \dot{+} N(A))^{\perp} = \{0\}$. Luego $\xi = \xi_1 \in \mathcal{S} \cap N(A) = \{0\}$. Por lo tanto $\mathcal{M} \cap N(A) = \{0\}$ y así $\mathcal{M} \dot{+} N(A) = \mathcal{H}$. Ahora, si $X_{\mathcal{M}}$ denota la solución reducida para $\mathcal{M}$ de la ecuación $A^{1/2}X = P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}}A^{1/2}$ entonces, por el ítem (2), $X_{\mathcal{M}}$ es

una proyección A-autoadjunta. Además, $\mathcal{S} \subseteq R(X_{\mathcal{M}})$. En efecto, si $\eta \in \mathcal{S}$ entonces $P_{\overline{A^{1/2}\mathcal{S}}} A^{1/2}\eta = A^{1/2}\eta = A^{1/2}X_{\mathcal{M}}\eta$. Así, $\eta - X_{\mathcal{M}}\eta \in \mathcal{M} \cap N(A^{1/2}) = \{0\}$. Luego, $\eta = X_{\mathcal{M}}\eta \in R(X_{\mathcal{M}})$. Como $\mathcal{N} = \{0\}$, por el ítem (2) vale que $N(X_{\mathcal{M}}) = N(P_{A,\mathcal{S}})$. Entonces $X_{\mathcal{M}}$ es un a proyección A-autoadjunta con $R(P_{A,\mathcal{S}}) = \mathcal{S} \subseteq R(X_{\mathcal{M}})$ y $N(X_{\mathcal{M}}) = N(P_{A,\mathcal{S}})$. Así $X_{\mathcal{M}} = P_{A,\mathcal{S}}$. □

Capítulo 4

Propiedades métricas de proyecciones en espacios semi-Hilbertianos

Este capítulo está dedicado al estudio de propiedades métricas que poseen los elementos de los conjuntos $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ cuando se considera una seminorma adicional sobre $\mathcal{H}$. A lo largo de este capítulo, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ denotarán subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Dados $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, las siguientes propiedades son bien conocidas:

(I) $\|P_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{T}}\| \leq 1$. Más aún, si $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$ entonces la igualdad vale si y sólo si $P_{\mathcal{S}}$ y $P_{\mathcal{T}}$ conmutan;

(II) $\|P_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{T}}\| = \text{máx}\ \{\ \|P_{\mathcal{S}}(I - P_{\mathcal{T}})\|,\ \|P_{\mathcal{T}}(I - P_{\mathcal{S}})\|\ \}$;

(III) Para todo $0 \neq Q \in \mathcal{Q}$ vale $\|Q\| = 1$ si y sólo si $Q^* = Q$;

(IV) $\|P_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{T}}\| \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|$ para toda $Q_{\mathcal{S}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ y $Q_{\mathcal{T}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$;

(V) Para toda proyección $Q \neq 0$ y $Q \neq I$ vale $\|Q\| = \|I - Q\|$;

(VI) Para todo $Q \in \mathcal{Q}$ vale $\|Q\| = \dfrac{1}{\sin_0(R(Q), N(Q))}$.

Demostraciones de las propiedades (I), (III) y (V) pueden encontrarse en libros de texto como [17] y [40]. Una prueba de la propiedad (II) puede encontrarse en el libro de Akhiezer y Glazman [3]. La propiedad (IV) fue probada por T. Kato [[40], Theorem. 6.35, p. 58] (ver también M. Mbekhta [[47], Proposition 1.10]). La propiedad (VI) fue probada por V. Ljance [44]. Demostraciones de esta última propiedad pueden encontrarse en la monografía de Gohberg y Krein [33] y en los trabajos de V. Ptak [54], J. Steinberg [58], D. Buckholtz [12] e I. Ipsen y C. Meyer [39] (para espacios de dimensión finita).

El principal objetivo de este capítulo es estudiar estas propiedades cuando consideramos una seminorma adicional $\| \ . \ \|_A$ sobre $\mathcal{H}$ definida por $\|\xi\|_A^2 = \langle A\xi, \xi\rangle$, $\xi \in \mathcal{H}$, donde $A \in L(\mathcal{H})^+$ y reemplazamos la norma de operadores en las fórmulas (I) a (VI) por las cantidades

$$\|T\|_A = \sup\{\|T\xi\|_A : \ \|\xi\|_A = 1\}$$

y

$$\|T\|'_A = \sup\{\|T\xi\|_A : \ \xi \in \overline{R(A)} \text{ y } \|\xi\|_A = 1\}.$$

4.1. El operador A-adjunto $T^\sharp$

En esta sección definimos un operador A-adjunto distinguido que posee propiedades similares a las del clásico operador adjunto. La elección de este elemento será fundamental para probar algunos resultados de este capítulo.

De aquí en adelante denotaremos por $L_A(\mathcal{H})$ al subconjunto de $L(\mathcal{H})$ que consiste de los operadores que admiten un operador A-adjunto, es decir,

$$L_A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : \ T \text{ admite un operador } A\text{-adjunto}\}.$$

El conjunto $L_A(\mathcal{H})$ es una subálgebra de $L(\mathcal{H})$ que no es cerrada ni densa en $L(\mathcal{H})$, en general. En efecto, es claro que $L_A(\mathcal{H})$ es un subespacio de $L(\mathcal{H})$. Además, si $T_1, T_2 \in L_A(\mathcal{H})$ entonces existen $W_1, W_2 \in L(\mathcal{H})$ tal que $\langle T_1\xi, \eta\rangle_A = \langle \xi, W_1\eta\rangle_A$ y $\langle T_2\xi, \eta\rangle_A = \langle \xi, W_2\eta\rangle_A$ para todo $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Veamos que $T_1T_2 \in L_A(\mathcal{H})$. En efecto, si $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ entonces $\langle T_1T_2\xi, \eta\rangle_A = \langle T_2\xi, W_1\eta\rangle_A = \langle \xi, W_2W_1\eta\rangle_A$. Luego T_1T_2 admite un operador A-adjunto y por lo tanto $T_1T_2 \in L_A(\mathcal{H})$; es decir $L_A(\mathcal{H})$ es una subálgebra de $L(\mathcal{H})$. Para ver que $L_A(\mathcal{H})$ es una subálgebra no cerrada, sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango no cerrado y sea $\eta \in \overline{R(A)} \setminus R(A)$. Luego, existe $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(A)$ tal que

$\eta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta$. Fijado $\xi \in R(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $T_n : \mathcal{H} = gen\{\xi\} \oplus gen\{\xi\}^\perp \to \mathcal{H}$ como $T_n\xi = \eta_n$ y $T_n(gen\{\xi\}^\perp) = \{0\}$. Por lo tanto, $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ donde T se define como $T\xi = \eta$ y $T(gen\{\xi\}^\perp) = \{0\}$. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, el operador $T_n^* \in L_A(\mathcal{H})$ y $T^* \notin L_A(\mathcal{H})$. Luego, $L_A(\mathcal{H})$ es una subálgebra no cerrada de $L(\mathcal{H})$. Por otro lado, es fácil verificar que $\overline{L_A(\mathcal{H})} \subseteq \{T \in L(\mathcal{H}) : R(T^*A) \subseteq \overline{R(A)}\}$. Veamos que $\{T \in L(\mathcal{H}) : R(T^*A) \subseteq \overline{R(A)}\} \neq L(\mathcal{H})$. En efecto, si A no es inyectivo entonces existe $0 \neq \eta \in \mathcal{H} \setminus \overline{R(A)}$. Sea $\xi \in R(A)$ y definamos $S : \mathcal{H} = gen\{\xi\} \oplus gen\{\xi\}^\perp \to \mathcal{H}$ por $S\xi = \eta$ y $S(gen\{\xi\}^\perp) = \{0\}$. Por lo tanto, $S \in L(\mathcal{H})$ y $T = S^* \notin \{T \in L(\mathcal{H}) : R(T^*A) \subseteq \overline{R(A)}\}$. Luego, $L_A(\mathcal{H})$ no es densa en $L(\mathcal{H})$.

Definición 4.1.1. *Sea $T \in L_A(\mathcal{H})$. Denotamos $T^\sharp$ al único operador A-adjunto de T que satisface $R(T^\sharp) \subseteq \overline{R(A)}$.*

Oservaciones 4.1.2.

1. El operador $T^\sharp$ es la solución reducida de Douglas de la ecuación $AX = T^*A$. Luego, por la observación 2.3.7, vale
$$T^\sharp = A^\dagger T^* A.$$
Sus principales propiedades son:
$$AT^\sharp = T^*A, \quad R(T^\sharp) \subseteq \overline{R(A)} \quad \text{y} \quad N(T^\sharp) = N(T^*A).$$

2. Si $W \in L(\mathcal{H})$ es un operador A-adjunto de T entonces $T^\sharp = P_{\overline{R(A)}}W$.

3. Si $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador A-autoadjunto esto no significa, en general, que $T = T^\sharp$. Por ejemplo, si consideramos $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ y los operadores
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)^+ \quad \text{y} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L(\mathbb{C}^2),$$
entonces se verifica que T es A-autoadjunto, es decir $AT = T^*A$ pero
$$T^\sharp = A^\dagger T^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq T. \triangle$$

Proposición 4.1.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L_A(\mathcal{H})$. Entonces $T = T^\sharp$ si y sólo si T es A-autoadjunto y $R(T) \subseteq \overline{R(A)}$.*

Demostración. Como $T \in L_A(\mathcal{H})$ entonces la ecuación $AX = T^*A$ admite solución. Luego, por el teorema de Douglas, $R(T^*A) \subseteq R(A)$. Si $T = T^\sharp$ entonces $T = A^\dagger T^*A$. Así, $R(T) \subseteq N(A)^\perp = \overline{R(A)}$ y $AT = P_{\overline{R(A)}}|_{\mathcal{D}(A^\dagger)} T^*A = T^*A$. Luego T es A-autoadjunto. Recíprocamente, como T es A-autoadjunto y $R(T) \subseteq \overline{R(A)}$ entonces T es la solución reducida de Douglas de la ecuación $AX = T^*A$. Luego, por la unicidad de la solución reducida vale $T = T^\sharp$. □

En la siguiente proposición estudiamos algunas propiedades del operador $T^\sharp$.

Proposición 4.1.4. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L_A(\mathcal{H})$. Entonces:*

1. $(A^t)^\sharp = A^t$ *para todo* $t > 0$.

2. *Si* $AT = TA$ *entonces* $T^\sharp = P_{\overline{R(A)}} T^*$.

3. *Si* $W \in L_A(\mathcal{H})$ *entonces* $TW \in L_A(\mathcal{H})$ *y* $(TW)^\sharp = W^\sharp T^\sharp$.

4. $T^\sharp \in L_A(\mathcal{H})$, $(T^\sharp)^\sharp = P_{\overline{R(A)}} T P_{\overline{R(A)}}$ *y* $((T^\sharp)^\sharp)^\sharp = T^\sharp$.

5. $T^\sharp T$ *y* $TT^\sharp$ *son A-autoajuntos.*

6. $\|T^\sharp\| \leq \|W\|$ *para todo* $W \in L(\mathcal{H})$ *que es un A-adjunto de T. Sin embargo, en general, $T^\sharp$ no es el único A-adjunto de T que realiza la mínima norma.*

Demostración. A lo largo de la demostración consideraremos $P = P_{\overline{R(A)}}$.

1. Para todo $t > 0$ vale $(A^t)^\sharp = A^\dagger A^t A = A^\dagger A A^t = PA^t = A^t$.

2. Si $AT = TA$ entonces $T^\sharp = A^\dagger T^*A = A^\dagger AT^* = PT^*$.

3. Como $R(W^\sharp T^\sharp) \subseteq \overline{R(A)}$, es suficiente probar que $W^\sharp T^\sharp$ es solución de la ecuación $AX = (TW)^*A$. Ahora, $AW^\sharp T^\sharp = W^*AT^\sharp = W^*T^*A = (TW)^*A$. Entonces, por la unicidad de la solución reducida, obtenemos la afirmación.

4. Como $R((T^\sharp)^*A) = R(AT) \subseteq R(A)$ entonces $T^\sharp \in L_A(\mathcal{H})$. Además, ya que $A(PTP) = ATP = (T^\sharp)^*A$ y $R(PTP) \subseteq \overline{R(A)}$ entonces $(T^\sharp)^\sharp$ y PTP son soluciones reducidas de $AX = (T^\sharp)^*A$. Así, $(T^\sharp)^\sharp = PTP$. En particular, $((T^\sharp)^\sharp)^\sharp = PT^\sharp P = T^\sharp P = T^\sharp$.

5. Como $AT^\sharp = T^*A$ entonces $AT^\sharp T = T^*AT$ y $ATT^\sharp = (T^\sharp)^*AT^\sharp$ son operadores autoadjuntos. Así, $T^\sharp T$ y $TT^\sharp$ son A-autoadjuntos.

6. Sea $W \in L(\mathcal{H})$ un operador A-adjunto de T. Entonces $\|T^\sharp\| \leq \|W\|$ pues $T^\sharp$ es la solución reducida de Douglas de la ecuación $AX = T^*A$ (Corolario 1.4.1). Veamos que $T^\sharp$ no es el único

A-adjunto de T que realiza la mínima norma: sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)^+ \text{ y } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2).$$

Es fácil verificar que T admite un operador A-adjunto y que

$$T^\sharp = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, el operador identidad I es un A-adjunto de T y vale $\|T^\sharp\| = \|I\| = 1$ y $T^\sharp \neq I$. □

4.2. La operación de A-adjunción $\sharp$ sobre las proyecciones

En esta sección estudiamos cómo actúa la operación de A-adjunción $\sharp$ sobre el conjunto de las proyecciones A-adjuntables . Primero notemos que no existe una noción obvia de autoadjunción: un operador T tal que $AT = T^*A$ puede ser llamado A-Hermitiano, pero también un operador $T \in L_A(\mathcal{H})$ tal que $T^\sharp = T$. Aquí discutimos este problema focalizándonos en el conjunto de las proyecciones. Para ésto consideramos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{W} = \{Q \in \mathcal{Q} \cap L_A(\mathcal{H}) : \ Q^\sharp = Q\};$$

$$\mathcal{X} = \{Q \in \mathcal{Q} \cap L_A(\mathcal{H}) : \ AQ = Q^*A\};$$

$$\mathcal{Y} = \{Q \in \mathcal{Q} \cap L_A(\mathcal{H}) : \ (Q^\sharp)^2 = Q^\sharp\};$$

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Q} \cap L_A(\mathcal{H}).$$

Proposición 4.2.1. *Las siguientes inclusiones valen: $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{X} \subsetneq \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$. En general, las inclusiones son estrictas.*

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{W}$. Entonces $Q^\sharp = Q$. Así, $Q^*A = AQ^\sharp = AQ$ y luego $Q \in \mathcal{X}$. Por otro lado, si consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)^+ \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)$$

entonces simples cálculos muestran que $Q \in \mathcal{X}$ pero $Q \notin \mathcal{W}$. Es inmediato que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$. Para probar que esta inclusión es estricta consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2)^+ \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C}^2).$$

Como A es inversible entonces $R(Q^*A) \subseteq R(A)$, es decir, $Q \in \mathcal{Z}$, pero $Q \notin \mathcal{X}$. Finalmente, sea $Q \in \mathcal{Z}$. Entonces $Q^2 = Q$ y existe $Q^\sharp$. Veamos que $(Q^\sharp)^2 = Q^\sharp$. En efecto, $(Q^\sharp)^2 = A^\dagger Q^* A A^\dagger Q^* A = A^\dagger Q^* P_{\overline{R(A)}}|_{\mathcal{D}(A^\dagger)} Q^* A = A^\dagger (Q^*)^2 A = A^\dagger Q^* A = Q^\sharp$. Luego $Q \in \mathcal{Y}$. La otra inclusión es trivial. $\square$

Proposición 4.2.2. *Si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces:*

1. *$Q^\sharp$ es una proyección y vale $Q^\sharp = Q^\sharp Q = P_{\overline{R(A)}} Q = P_{\overline{R(A)}} P_{A,\mathcal{S}}$.*
2. *$I - Q^\sharp \in \mathcal{P}(A, N(P_\mathcal{S} A))$.*

Demostración.
1. Sea $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. En la Proposición 4.2.1 vimos que $(Q^\sharp)^2 = Q^\sharp$. Para probar que $Q^\sharp Q = Q^\sharp$ es suficiente verificar que $Q^\sharp Q$ es la solución reducida de Douglas de la ecuación $AX = Q^* A$. Para esto, $AQ^\sharp Q = Q^* A Q = (Q^*)^2 A = Q^* A$ y $R(Q^\sharp Q) \subseteq R(Q^\sharp) \subseteq \overline{R(A)}$. Luego, por la unicidad de la solución reducida vale $Q^\sharp Q = Q^\sharp$. Para probar que $Q^\sharp = P_{\overline{R(A)}} P_{A,\mathcal{S}}$, observemos que, por la Proposición 3.2.9, tenemos $Q = P_{A,\mathcal{S}} + Z$, donde $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{N})$. Entonces, $Q^\sharp = A^\dagger Q^* A = P_{\overline{R(A)}} Q = P_{\overline{R(A)}} (P_{A,\mathcal{S}} + Z) = P_{\overline{R(A)}} P_{A,\mathcal{S}}$.
2. Si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces $Q^\sharp$ también es una proyección A-autoadjunta. En efecto, del ítem anterior tenemos que $(Q^\sharp)^2 = Q^\sharp$. Ahora, por la definición del operador $\sharp$ vale $AQ^\sharp = Q^* A$. Además, como $(Q^\sharp)^* \supset AQA^\dagger$ entonces $(Q^\sharp)^* A \supset AQA^\dagger A = AQP_{\overline{R(A)}} = Q^* A P_{\overline{R(A)}} = Q^* A$. Ahora, ya que $\mathcal{D}(Q^* A) = \mathcal{H}$ entonces $(Q^\sharp)^* A = Q^* A$ y así $AQ^\sharp = (Q^\sharp)^* A$; es decir, $Q^\sharp$ es A-autoadjunto. Por otro lado, $R(I - Q^\sharp) = N(Q^\sharp) = N(Q^* A) = R(AQ)^\perp = R(AP_\mathcal{S})^\perp = N(P_\mathcal{S} A)$. Entonces $I - Q^\sharp \in \mathcal{P}(A, N(P_\mathcal{S} A))$. $\square$

Observación 4.2.3. Considerando los subconjuntos definidos anteriormente, es claro que si el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces $\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{X}$. Por otro lado, $\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{S} \subseteq \overline{R(A)}$ y el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible. En efecto, si existe $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S}) \cap \mathcal{W}$ entonces $Q^\sharp = Q$ y así $\mathcal{S} = R(Q) = R(Q^\sharp) \subseteq \overline{R(A)}$. Recíprocamente, si $\mathcal{S} \subseteq \overline{R(A)}$ y $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces $P_{A,\mathcal{S}}^\sharp = P_{\overline{R(A)}} P_{A,\mathcal{S}} = P_{A,\mathcal{S}}$, es decir, $P_{A,\mathcal{S}} \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S}) \cap \mathcal{W}$. $\triangle$

4.3. Operadores A-acotados

Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\langle\ ,\ \rangle_A$ el semiproducto interno definido en (3.1). Luego, $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_A)$ es un **espacio semi-Hilbertiano**. Denotaremos por $\|\ .\ \|_A$ a la seminorma inducida por $\langle\ ,\ \rangle_A$ sobre $\mathcal{H}$, es decir, si $\xi \in \mathcal{H}$ entonces

$$\|\xi\|_A := \langle \xi, \xi \rangle_A^{1/2} = \|A^{1/2}\xi\|.$$

Observemos que $\|\xi\|_A = 0$ si y sólo si $\xi \in N(A)$. Luego, $\|\ .\ \|_A$ es una norma si y sólo si A es inyectivo. Además, el semiproducto $\langle\ ,\ \rangle_A$ induce seminormas sobre subconjuntos de $L(\mathcal{H})$. A saber, dado $T \in L(\mathcal{H})$, si existe una constante $c > 0$ tal que $\|T\xi\|_A \leq c\|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ diremos que T es A**-acotado** y definimos

$$\|T\|_A := \sup\{\|T\xi\|_A : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\|_A = 1\} < \infty. \tag{4.1}$$

Si existe una constante $c > 0$ tal que $\|T\xi\|_A \leq c\|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \overline{R(A)}$ diremos que T es A**-acotado sobre** $\overline{R(A)}$ y definimos

$$\|T\|'_A := \sup\{\|T\xi\|_A : \xi \in \overline{R(A)}, \|\xi\|_A = 1\} < \infty. \tag{4.2}$$

Observemos que $\|T\|_A = 0$ si y sólo si $R(T) \subseteq N(A)$; además $\|T\|'_A = 0$ si y sólo si $\overline{R(A)} \subseteq N(A^{1/2}T)$. De aquí en adelante denotaremos

$$L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : \|T\|_A < \infty\}$$

y

$$L^A(\mathcal{H}) := \{T \in L(\mathcal{H}) : \|T\|'_A < \infty\}.$$

Proposición 4.3.1. *Si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y $\|T\|_A \neq 0$ entonces*

$$\|T\|_A = \sup\{|\langle T\xi, \eta\rangle_A| : \xi, \eta \notin N(A) \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1, \|\eta\|_A \leq 1\}. \tag{4.3}$$

Demostración. Sean $\xi, \eta \in \mathcal{H} \setminus N(A)$. Luego

$$\begin{aligned} |\langle T\xi, \eta\rangle_A| &= |\left\langle A^{1/2}T\xi, A^{1/2}\eta \right\rangle| \leq \|T\xi\|_A\,\|\eta\|_A \\ &\leq \|T\|_A\|\xi\|_A\|\eta\|_A \end{aligned}$$

y así $\sup\{|\langle T\xi, \eta\rangle_A| : \xi, \eta \notin N(A)$ y $\|\xi\|_A \leq 1, \|\eta\|_A \leq 1\} \leq \|T\|_A$. Por otro lado, $\|T\|_A^2 = \sup\{\langle T\xi, T\xi\rangle_A : \xi \notin N(A)$ y $\|\xi\|_A \leq 1\}$. Como $\|T\|_A \neq 0$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\xi \notin N(A^{1/2}T)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|T\|_A^2 &= \sup\{\left\langle T\xi, \|T\xi\|_A \frac{T\xi}{\|T\xi\|_A} \right\rangle_A : \xi \notin N(A) \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1\} \\
&= \sup\{\|T\xi\|_A \left\langle T\xi, \frac{T\xi}{\|T\xi\|_A} \right\rangle_A : \xi \notin N(A) \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|T\|_A \ \langle T\xi, \eta\rangle_A : \xi, \eta \notin N(A) \text{ y } \|\xi\|_A, \|\eta\|_A \leq 1\} \\
&= \|T\|_A \sup\{\langle T\xi, \eta\rangle_A : \xi, \eta \notin N(A) \text{ y } \|\xi\|_A, \|\eta\|_A \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Luego $\|T\|_A \leq \sup\{|\langle T\xi, \eta\rangle_A| : \xi, \eta \notin N(A) \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1, \|\eta\|_A \leq 1\}$ y así obtenemos la igualdad (4.3). □

En las siguientes proposiciones estudiamos los conjuntos $L_A(\mathcal{H}), L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y $L^A(\mathcal{H})$ y analizamos las relaciones que existen entre ellos. Comenzamos mostrando que las notaciones $L_A(\mathcal{H})$ y $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$, las cuales representan subconjuntos diferentes de $L(\mathcal{H})$, son consistentes.

Proposición 4.3.2. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces:*

1. $L_A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : T^*R(A) \subseteq R(A)\}$.
2. $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : T^*R(A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})\}$.
3. $L^A(\mathcal{H}) = \{T \in L(\mathcal{H}) : R(A^{1/2}T^*A^{1/2}) \subseteq R(A)\}$

Demostración.

1. Una aplicación directa del teorema de Douglas prueba la igualdad.

2. Observemos que $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ si y sólo si $T^*AT \leq cA$ para alguna constante $c \geq 0$. Luego, la igualdad resulta de aplicar el teorema de Douglas.

3. Es claro que existe una constante no nula tal que $\|T\xi\|_A \leq c\|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \overline{R(A)}$ si y sólo si $\|T\xi\|_A \leq c\|\xi\|_A$ para todo $\xi \in R(A^{1/2})$, es decir, si y sólo si $\|A^{1/2}TA^{1/2}\eta\| \leq c\|A\eta\|$ para todo $\eta \in \mathcal{H}$. Ahora, por el teorema de Douglas, esto es equivalente a $R(A^{1/2}T^*A^{1/2}) \subseteq R(A)$. □

La primera inclusión del ítem (1) en el siguiente resultado ha sido probada, en un contexto más general, por Hassi, Sebestyén y De Snoo ([38], Theorem 5.1). Aquí presentamos una breve demostración, realizada por J. Antezana, que sólo usa la desigualdad de Jensen para operadores y el teorema de Douglas.

Proposición 4.3.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces:*

1. $L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \subsetneq L^A(\mathcal{H})$.

2. $L_A(\mathcal{H}) = L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ *si y sólo si* A *tiene rango cerrado.*

3. $L^A(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H})$ *si y sólo si* A *tiene rango cerrado.*

Demostración.

1. Sea $T \in L_A(\mathcal{H})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que T es una contracción. En este caso, la aplicación $\phi : L(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H})$ definida por $\phi(E) = T^*ET$ es una aplicación positiva (es decir, $\phi(L(\mathcal{H})^+) \subseteq L(\mathcal{H})^+$) y contractiva (es decir, $\|\phi(E)\| \leq \|E\|$). Si existe un operador $C \in L(\mathcal{H})$ tal que $AC = T^*A$ entonces

$$T^*A^2T = ACC^*A \leq \|C\|^2A^2.$$

Ahora, por la desigualdad de Jensen (ver [37] o [36]), se obtiene que $T^*AT \leq (T^*A^2T)^{1/2}$. Por otro lado, $(T^*A^2T)^{1/2} \leq \|C\|A$ pues $f(t) = t^{1/2}$ es una función monótona de operadores. Esto prueba que

$$(T^*A^{1/2})(T^*A^{1/2})^* = T^*AT \leq \|C\|A.$$

Luego, por el teorema de Douglas, $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y así $L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. La segunda inclusión es trivial. Para probar que la inclusión es estricta consideramos $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ y los operadores

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2)^+ \text{ y } T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2).$$

Notemos que $R(A) = gen\{(1,1)\}$. Simples cálculos muestran que $\|T\|'_A = \sqrt{2}$ y así $T \in L^A(\mathcal{H})$. Sin embargo, como $R(T^*A^{1/2}) \not\subseteq R(A^{1/2})$ entonces $T \notin L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$.

2. Supongamos que $R(A)$ no es cerrado. Sea $\eta \in R(A^{1/2}) \setminus R(A)$. Fijado $\xi_0 \in \mathcal{H}$, definimos $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como $T(A\xi_0) = \eta$ y $T(gen\{A\xi_0\}^\perp) = 0$. El operador T resulta lineal y acotado, luego $T \in L(\mathcal{H})$. Además, $TR(A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})$: en efecto, si $\mu \in \mathcal{H}$ entonces $A^{1/2}\mu = cA\xi_0 + z$, donde $z \in gen\{A\xi_0\}^\perp$ luego, $TA^{1/2}\mu = T(cA\xi_0 + z) = cTA\xi_o + Tz = c\eta \in R(A^{1/2})$. Pero $TR(A) \not\subseteq R(A)$. Es decir, $T^* \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ pero $T^* \notin L_A(\mathcal{H})$. Luego $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \not\subseteq L_A(\mathcal{H})$. Recíprocamente, si $R(A)$ es cerrado entonces $R(A) = R(A^{1/2})$ y así, por la Proposición 4.3.2, se obtiene la igualdad.

3. Supongamos que $R(A)$ no es cerrado, y sea $\mu \in R(A^{1/2}) \setminus R(A)$. Entonces existe $\eta \in \overline{R(A)} \setminus R(A^{1/2})$ tal que $\mu = A^{1/2}\eta$. Ahora, sea $\xi \in R(A^{1/2})$ y $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H} = gen\{\xi\} + gen\{\eta\} + \mathcal{S}$. Consideramos $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por $T\xi = \eta$, $T\eta = \eta$ y $T(\mathcal{S}) =$

$\{0\}$. Así, $T \in L(\mathcal{H})$. Más aún, $T \in \mathcal{Q}$ y luego $T^* \in \mathcal{Q}$. Sin embargo, $T^* \notin L^A(\mathcal{H})$. En efecto, $\mu = A^{1/2}\eta = A^{1/2}T\xi \in R(A^{1/2}TA^{1/2})$ y $\mu \notin R(A)$. Luego $R(A^{1/2}TA^{1/2}) \nsubseteq R(A)$ y entonces, por la Proposición 4.3.2, $T^* \notin L^A(\mathcal{H})$. Recíprocamente, si $R(A)$ es cerrado entonces $R(A) = R(A^{1/2})$ y así $(A^{1/2})^\dagger$ es un operador acotado. Luego, dado $T \in L(\mathcal{H})$, el operador $A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger$ es acotado. Entonces para todo $\xi \in R(A)$ vale

$$\begin{aligned}
\|T\xi\|_A &= \|TP_{R(A)}\xi\|_A = \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger A^{1/2}\xi\| \\
&\leq \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|\|A^{1/2}\xi\| \\
&= \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|\|\xi\|_A,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $T \in L^A(\mathcal{H})$. La otra inclusión es trivial. Luego $L^A(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H})$. $\square$

Observación 4.3.4. Si en la demostración del primer ítem de la proposición anterior, se cambia $t \to t^{1/2}$ por $t \to t^s$ entonces se prueba que $L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^s}(\mathcal{H})$ para todo $s \in (0,1)$. Más generalmente, si $0 < s < s' < 1$ entonces $L_{A^{s'}}(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^s}(\mathcal{H})$. Más aún, $L_{A^{s'}}(\mathcal{H}) = L_{A^s}(\mathcal{H})$ si y sólo si $R(A)$ es cerrado. $\triangle$

El conjunto $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ es una subálgebra de $L(\mathcal{H})$. En efecto, por la Proposición 4.3.2 es claro que $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ es un subespacio de $L(\mathcal{H})$. Además, si $T_1, T_2 \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ vale $R((T_1T_2)^*A^{1/2}) = R(T_2^*T_1^*A^{1/2}) \subseteq R(T_2^*A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})$. Luego $T_1T_2 \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. En cambio, el conjunto $L^A(\mathcal{H})$ no es una subálgebra de $L(\mathcal{H})$. Probemos este último hecho. Primero afirmamos que si $T \in L^A(\mathcal{H})$ entonces $R(T^*A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2}) \dot{+} N(A)$: en efecto, sea $\xi \in \mathcal{H}$ y $\eta = T^*A^{1/2}\xi$. Como $T \in L^A(\mathcal{H})$ entonces $A^{1/2}\eta = A^{1/2}T^*A^{1/2}\xi \in R(A)$, es decir, $A^{1/2}\eta = A\omega$ para algún $\omega \in \mathcal{H}$. Luego, $P_{\overline{R(A)}}\eta = A^{1/2}\omega$ y entonces $\eta = P_{\overline{R(A)}}\eta + P_{N(A)}\eta = A^{1/2}\omega + P_{N(A)}\eta \in R(A^{1/2}) \dot{+} N(A)$, con lo cual queda probada la afirmación. Consideremos $A \in L(\mathcal{H})^+$ con rango no cerrado. Ahora, sea $T_1 \in L^A(\mathcal{H})$. Elegimos $\xi_0 = T_1^*A^{1/2}\omega \in R(T_1^*A^{1/2})$ tal que $\xi_0 = A^{1/2}\nu + \mu$, donde $\nu \in \overline{R(A)}$ y $0 \neq \mu \in N(A)$. Por otro lado, como $R(A)$ no es cerrado entonces existe $\rho \in R(A^{1/2}) \setminus R(A)$ tal que $\rho = A^{1/2}\kappa$, con $\kappa \in \overline{R(A)} \setminus R(A^{1/2})$. Consideremos los vectores ν, μ y κ mencionados recientemente y sea $\mathcal{M} = (\overline{R(A)} \dot{+} gen\{\mu\})^\perp$. Definimos $T_2 : (\overline{R(A)} \dot{+} gen\{\mu\}) \oplus \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ de la siguiente manera, $T_2\xi = \xi$ para todo $\xi \in \overline{R(A)}$, $T_2\mu = \kappa$ y $T_2(\mathcal{M}) = \{0\}$. Es fácil verificar que T_2 es lineal, acotado y que $T_2^* \in L^A(\mathcal{H})$ (es decir, $R(A^{1/2}T_2A^{1/2}) \subseteq R(A)$). Ahora, $A^{1/2}T_2T_1^*A^{1/2}\omega = A^{1/2}T_2\xi_0 = A^{1/2}T_2(A^{1/2}\nu + \mu) = A\nu + \rho \notin R(A)$. Luego $T_1T_2^* \notin L^A(\mathcal{H})$ y así $L^A(\mathcal{H})$ no es una subálgebra de $L(\mathcal{H})$.

Proposición 4.3.5. *Si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $\|T\|_A = \|T\|'_A$.*

Demostración. En la Proposición 4.3.3 vimos que la inclusión $L_{A^{1/2}}(\mathcal{H}) \subseteq L^A(\mathcal{H})$ vale; por lo tanto, si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $\|T\|'_A < \infty$. Además, si $T \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces $R(T^* A^{1/2}) \subseteq R(A^{1/2})$ y por lo tanto $N(A^{1/2}) \subseteq N(A^{1/2}T)$. Sea $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \overline{R(A)} + N(A) = \mathcal{H}$, donde $0 \neq \xi_1 \in \overline{R(A)}$ y $\xi_2 \in N(A)$. Luego $\|T\|_A = \sup\limits_{\xi \notin N(A)} \frac{\|T\xi\|_A}{\|\xi\|_A} = \sup\limits_{\xi \notin N(A)} \frac{\|T\xi_1\|_A}{\|\xi_1\|_A} = \sup\limits_{\substack{\xi_1 \in \overline{R(A)} \\ \xi_1 \neq 0}} \frac{\|T\xi_1\|_A}{\|\xi_1\|_A} = \|T\|'_A$. □

Finalizamos esta sección estudiando propiedades de las seminormas $\| \ . \ \|_A$ y $\| \ . \ \|'_A$. En la siguiente proposición presentamos una identidad que será de gran utilidad en el resto del capítulo.

Proposición 4.3.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L(\mathcal{H})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $T \in L^A(\mathcal{H})$;
2. $A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger$ *es un operador lineal acotado en* $\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)$;
3. $R(A^{1/2}T^* A^{1/2}) \subseteq R(A)$.

Más aún, si una de estas condiciones vale entonces

$$\|T\|'_A = \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|.$$

Demostración.

1→2 Si $T \in L^A(\mathcal{H})$ entonces existe $c > 0$ tal que $\|T\xi\|_A \leq c\|\xi\|_A$ para todo $\xi \in \overline{R(A)}$. Luego para todo $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)$, donde $\omega_1 \in R(A^{1/2})$ y $\omega_2 \in N(A)$ vale

$$\begin{aligned} \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\omega\|^2 &= \|T(A^{1/2})^\dagger\omega_1\|_A^2 \leq \|T\|'^2_A\|(A^{1/2})^\dagger\omega_1\|_A^2 \\ &= \leq \|T\|'^2_A\|\omega_1\|^2 \leq \|T\|'^2_A(\|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2) \\ &= \|T\|'^2_A\|\omega\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger$ es acotado y $\|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\| \leq \|T\|'_A$.

2→1 Sea $A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger$ un operador acotado. Entonces, para todo $\xi \in \overline{R(A)}$ vale

$$\begin{aligned} \|T\xi\|_A &= \|TP_{\overline{R(A)}}\xi\|_A = \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger A^{1/2}\xi\| \\ &\leq \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|\|A^{1/2}\xi\| \\ &= \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|\|\xi\|_A, \end{aligned}$$

es decir, el ítem 1. vale. Más aún, $\|T\|'_A \leq \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|$.

2↔3 Esta equivalencia fue probada en la Proposición 4.3.2 □

Proposición 4.3.7. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $T \in L_A(\mathcal{H})$. Entonces*

1. $\|T\|_A = \|T^\sharp\|_A = \|T^\sharp T\|_A^{1/2}$.
2. $\|W\|_A = \|T^\sharp\|_A$ *para todo* $W \in L(\mathcal{H})$ *que es un A-adjunto de T.*
3. *Si* $W \in L_A(\mathcal{H})$ *entonces* $\|TW\|_A = \|WT\|_A$.

Demostración.
1. Notemos que $\overline{A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger}^* = \overline{A^{1/2}(A^\dagger T^* A)(A^{1/2})^\dagger}$. En efecto,

$$\overline{A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger}^* = (A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger)^* = (A^{1/2})^\dagger T^* A^{1/2}$$

y

$$\begin{aligned}
\overline{A^{1/2}(A^\dagger T^* A)(A^{1/2})^\dagger} &= \overline{A^{1/2}(A^{1/2})^\dagger(A^{1/2})^\dagger|_{\mathcal{D}(A^\dagger)}T^*A(A^{1/2})^\dagger} \\
&= \overline{A^{1/2}(A^{1/2})^\dagger(A^{1/2})^\dagger T^* A(A^{1/2})^\dagger} \\
&= \overline{P_{\overline{R(A^{1/2})}}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}(A^{1/2})^\dagger T^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}} \\
&= (A^{1/2})^\dagger T^* A^{1/2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|T\|_A &= \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\| = \|\overline{A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger}\| = \|\overline{A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger}^*\| \\
&= \|\overline{A^{1/2}(A^\dagger T^* A)(A^{1/2})^\dagger}\| = \|A^{1/2}(A^\dagger T^* A)(A^{1/2})^\dagger\| \\
&= \|A^{1/2}T^\sharp(A^{1/2})^\dagger\| = \|T^\sharp\|_A.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|T^\sharp T\|_A &= \|A^{1/2}T^\sharp T(A^{1/2})^\dagger\| = \|A^{1/2}A^\dagger T^* AT(A^{1/2})^\dagger\| \\
&= \|(A^{1/2})^\dagger T^* AT(A^{1/2})^\dagger\| = \|\overline{(A^{1/2})^\dagger T^* AT(A^{1/2})^\dagger}\| \\
&= \|\overline{(A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger)}^* \, \overline{(A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger)}\| = \|\overline{A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger}\|^2 \\
&= \|A^{1/2}T(A^{1/2})^\dagger\|^2 = \|T\|_A^2.
\end{aligned}$$

2. Si $W \in L(\mathcal{H})$ es un operador A-adjunto de T entonces $W = T^\sharp + Z$, donde Z es una solución de la ecuación homogénea $AX = 0$. Entonces $\|W\|_A = \|A^{1/2}W(A^{1/2})^\dagger\| = \|A^{1/2}(T^\sharp + Z)(A^{1/2})^\dagger\| = \|A^{1/2}T^\sharp(A^{1/2})^\dagger\| = \|T^\sharp\|_A$.

3. Notemos que

$$\begin{aligned}
\|TW\|_A &= \|(TW)^\sharp\|_A = \|W^\sharp T^\sharp\|_A = \|A^{1/2}W^\sharp T^\sharp(A^{1/2})^\dagger\| \\
&= \|A^{1/2}W^\sharp(A^{1/2})^\dagger A^{1/2}T^\sharp(A^{1/2})^\dagger\| \\
&= \|A^{1/2}T^\sharp(A^{1/2})^\dagger A^{1/2}W^\sharp(A^{1/2})^\dagger\| \\
&= \|T^\sharp W^\sharp\|_A = \|(WT)^\sharp\|_A \\
&= \|WT\|_A.
\end{aligned}$$

□

4.4. Propiedades métricas de proyecciones A-acotadas

Esta sección está destinada a la generalización de las identidades (I)-(VI) mencionadas al comienzo del capítulo cuando consideramos las seminormas de operadores (4.1) y (4.2) inducidas por $A \in L(\mathcal{H})^+$. Los resultados muestran que las proyecciones A-autoadjuntas tienen propiedades métricas similares a las que verifican las proyecciones ortogonales. A continuación vemos que si $\xi \in \mathcal{H}$ y el par $(A, \mathcal{S})$ es compatible entonces existe un elemento $\tau \in \mathcal{S}$ más cercano a ξ cuando medimos distancias con respecto a $\| \ . \ \|_A$; más aún, $\tau = Q\xi$ para toda $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. En [20] se da una demostración de este hecho en el contexto de splines interpolantes, aquí presentamos una prueba diferente.

Proposición 4.4.1. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible.*

1. *Si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ y $\xi \in \mathcal{H}$ entonces*

$$\|(I-Q)\xi\|_A = d_A(\xi, \mathcal{S}) = inf\{\|\xi - \eta\|_A : \eta \in \mathcal{S}\}.$$

2. *Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ vale*

$$\|(I - P_{A,\mathcal{S}})\xi\| = \text{mín}\{\|(I-Q)\xi\| : \ Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})\}.$$

Más aún, el vector $(I - P_{A,\mathcal{S}})\xi$ es el único que realiza el mínimo.

Demostración.

1. Sea $Q \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$. Si $\xi \in \mathcal{S}$, la afirmación es cierta y $\|(I-Q)\xi\|_A = 0$. Supongamos que $\xi \notin \mathcal{S}$. Entonces $\xi = \sigma + \rho$, donde $\sigma \in \mathcal{S}$ y $0 \neq \rho \in \mathcal{S}^\perp$. Observemos que, fijado ξ, $\{\|\xi - \eta\|_A : \eta \in \mathcal{S}\} = \{\|(I-E)\xi\|_A : E \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}\}$. En efecto, sea $\eta \in \mathcal{S}$ tal que $\eta \neq c\sigma$, $c \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{T}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ tal que $gen\{\sigma,\eta\} \dot{+} \mathcal{T} = \mathcal{S}$ (si η es un múltiplo de σ sólo consideramos $gen\{\sigma\} \dot{+} \mathcal{T} = \mathcal{S}$). Por otro lado, sea $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado tal que $gen\{\rho\} \dot{+} \mathcal{W} = \mathcal{S}^\perp$. Definimos $E : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $E\omega = \omega$ para todo $\omega \in \mathcal{S}$ y $E\rho = \eta - \sigma$ y $E(\mathcal{W}) = \{0\}$. Así definido, E es lineal y $E^2 = E$. Como $R(E) = \mathcal{S}$ es un subespacio cerrado entonces E es acotado y además satisface $E\xi = \eta$. Así, $\|\xi - \eta\|_A = \|\xi - E\xi\|_A = \|(I-E)\xi\|_A$ y entonces $\{\|\xi - \eta\|_A : \eta \in \mathcal{S}\} \subseteq \{\|(I-E)\xi\|_A : E \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}\}$. La otra inclusión es inmediata. Luego, dada $E \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}$ se verifica que $\|(I-E)\xi\|_A^2 = \|(I-Q)\xi + (Q-E)\xi\|_A^2 = \|(I-Q)\xi\|_A^2 + \|(Q-E)\xi\|_A^2$ pues $R(I-Q) \subseteq \mathcal{S}^{\perp_A}$ y $R(Q-E) \subseteq \mathcal{S}$. Por lo tanto $\|(I-Q)\xi\|_A \leq \|(I-E)\xi\|_A$ y así obtenemos la afirmación.

2. Si $\xi \in \mathcal{S}$ entonces $\|(I-P_{A,\mathcal{S}})\xi\| = 0$ y así $(I-P_{A,\mathcal{S}})\xi$ es minimal. Supongamos que $\xi \notin \mathcal{S}$. Entonces $\xi = \sigma + \rho$, donde $\sigma \in \mathcal{S}$ y $0 \neq \rho \in \mathcal{S}^\perp$. Si $Q \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ entonces, por la Proposición 3.2.9, $Q = P_{A,\mathcal{S}} + Z$, con $Z \in \mathcal{L}(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S} \cap N(A))$. Luego, si $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A)$

$$\begin{aligned}
\|(I-Q)\xi\|^2 &= \|(I-Q)(\sigma+\rho)\|^2 = \|\rho - P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\rho - (P_\mathcal{N} + Z)\rho\|^2 \\
&= \|\rho\|^2 + \|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\rho\|^2 + \|(P_\mathcal{N} + Z)\rho\|^2 \\
&= \|\rho\|^2 + \|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\rho\|^2 + \|Z\rho\|^2 \\
&\geq \|\rho\|^2 + \|P_{A,\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}\rho\|^2 \\
&= \|(I-P_{A,\mathcal{S}})\xi\|^2.
\end{aligned}$$

Además, si existe $Q \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ tal que $\|(I-Q)\xi\| = \|(I-P_{A,\mathcal{S}})\xi\|$ entonces $Z = 0$ y así $Q = P_{A,\mathcal{S}}$. □

Con el objetivo de extender las propiedades (I)-(VI) establecemos una relación muy útil entre proyecciones ortogonales y proyecciones A-autoadjuntas.

Proposición 4.4.2. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $Q \in \mathcal{Q} \cap L^A(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{S} = R(Q) \subseteq \overline{R(A)}$ entonces:*

1. *$\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección.*

2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *$Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$;*

b) *$Q \in L_A(\mathcal{H})$ y $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección ortogonal.*

Más aún, si una de estas condiciones vale entonces $\|Q\|_A = \|\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}\| = 1$.

Demostración.
1. Como $Q \in \mathcal{Q}$ y $R(Q) \subseteq \overline{R(A)}$ entonces $A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger$ es una proyección. Además, por la Proposición 4.3.6, $A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger$ es acotado. Luego, $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección de $L(\mathcal{H})$.
2. Sea $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. Por el ítem (1) vale que $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección. Para ver que $(\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger})^* = \overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$, en primer lugar, notemos que valen las siguientes igualdades $(\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger})^* = (A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger)^* \supset (A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}$. Así, como $\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}) = \mathcal{H}$ entonces $(\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger})^* = (A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2} = \overline{(A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}} = \overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ donde la última igualdad vale porque $AQ = Q^*A$. Recíprocamente, sea $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ una proyección ortogonal. Primero veamos que Q es una proyección. Ya que $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección, $A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger$ también lo es. Luego, $A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger = (A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger)^2 = A^{1/2}Q^2(A^{1/2})^\dagger$. Entonces, $Q(A^{1/2})^\dagger = Q^2(A^{1/2})^\dagger$, es decir, $(Q^2 - Q)(A^{1/2})^\dagger = 0$. Por lo tanto, $\overline{R(A)} \subseteq N(Q^2 - Q)$ y entonces $R(((Q^*)^2 - Q^*)A) \subseteq R((Q^*)^2 - Q^*) \subseteq N(A)$. Por otro lado, ya que $R(Q^*A) \subseteq R(A)$, es fácil ver que $R((Q^*)^2A) \subseteq R(A)$ y así $R(((Q^*)^2 - Q^*)A) \subseteq R(A)$. Luego, $((Q^*)^2 - Q^*)A = 0$, es decir, $AQ^2 = AQ$ y entonces $Q^2 = Q$. Sólo resta probar que Q es A-autoadjunto. Ahora, como $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es autoadjunto, se tiene que $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger} = (\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger})^* = (A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger)^* = (A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}$. Por lo tanto, $A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger = (A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}$ y en consecuencia obtenemos que $AQP_{\overline{R(A)}} = P_{\overline{R(A)}}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}Q^*A = Q^*A$. Ahora, tomando adjuntos obtenemos $Q^*A = AQ$. Por lo tanto $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. La igualdad $\|Q\|_A = \|\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}\|$ es consecuencia de la Proposición 4.3.6. □

Las propiedades (I) y (II) enunciadas en la introducción del capítulo se deben a M. G. Krein, M. A. Krasnoselski y B. Sz. Nagy. Una demostración elemental se encuentra en [3], § 34. Aquí extendemos estos hechos para proyecciones A-autoadjuntas y la seminorma inducida por A, con hipótesis de compatibilidad convenientes.

Proposición 4.4.3. *Si los pares $(A, \mathcal{S})$ y $(A, \mathcal{T})$ son compatibles entonces:*

1. $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A \leq 1$;

2. *Si $P^\sharp_{A,\mathcal{S}}$ y $P^\sharp_{A,\mathcal{T}}$ conmutan entonces* $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A = 1$;

3. $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A = \text{máx}\ \{\ \|P_{A,\mathcal{S}}(I - P_{A,\mathcal{T}})\|_A,\ \|P_{A,\mathcal{T}}(I - P_{A,\mathcal{S}})\|_A\ \}$.

Demostración. Por la Proposición 4.2.2, $P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}} = P_{\overline{R(A)}}P_{A,\mathcal{S}}$ es una proyección A-autoadjunta y además satisface $R(P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}) \subseteq \overline{R(A)}$. Así, por la Proposición 4.4.2, el operador $P_1 = \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}}$ es una proyección ortogonal. Análogamente se prueba que $P_2 = \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}}$ es una proyección ortogonal. Ahora, por las observaciones anteriores y las Proposiciones 4.3.5 4.3.6 y 4.3.7 se obtiene

$$\begin{aligned}
\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A &= \|P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}} - P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}\|_A \\
&= \|A^{1/2}(P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}} - P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}})(A^{1/2})^{\dagger}\| \\
&= \|\overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}} - \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}}\| \\
&= \|P_1 - P_2\|.
\end{aligned}$$

Luego, por (I), $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A \leq 1$; esto prueba (1).
Si $P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}$ y $P^{\sharp}_{A\mathcal{T}}$ conmutan entonces P_1 y P_2 conmutan. En efecto,

$$\begin{aligned}
P_1P_2 &= \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}}\ \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}} = \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}} \\
&= \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}P_{\overline{R(A)}}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}} = \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}} \\
&= \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}} = \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}P_{\overline{R(A)}}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}} \\
&= \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}} = \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}}\ \overline{A^{1/2}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}} \\
&= P_2P_1.
\end{aligned}$$

Luego, aplicando (I), $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A = \|P_1 - P_2\| = 1$, lo cual prueba (2).
Para probar el ítem (3) observemos que

$$\begin{aligned}
\|P_{A,\mathcal{S}}(I - P_{A,\mathcal{T}})\|_A &= \|(I - P_{A,\mathcal{T}})^{\sharp}P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}\|_A = \|(P_{\overline{R(A)}} - P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}})P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}\|_A \\
&= \|(I - P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}})P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}\|_A = \|A^{1/2}(I - P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}})P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}\| \\
&= \|\overline{A^{1/2}(I - P^{\sharp}_{A,\mathcal{T}})P^{\sharp}_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}}\| = \|(I - P_2)P_1\| \\
&= \|P_1(I - P_2)\|.
\end{aligned}$$

Análogamente, $\|P_{A,\mathcal{T}}(I - P_{A,\mathcal{S}})\|_A = \|P_2(I - P_1)\|$. Por otro lado, por la demostración de (1), $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A = \|P_1 - P_2\|$. Luego, la afirmación se obtiene aplicando (II). □

Lema 4.4.4. *Sean $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A)$. Para toda $Q \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}$ vale*

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

donde $Q_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ y $Q_2 \in \mathcal{Q}_\mathcal{N}$.

Demostración. Es suficiente tomar $Q_1 = P_{\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}Q$ y $Q_2 = P_\mathcal{N}Q$ y se obtiene la descomposición. □

En lo que sigue, dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ diremos que una proyección Q es **no trivial para** A si $AQ \neq 0$. Observemos que $Q \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}$ es trivial para A (es decir $AQ = 0$) si y sólo si $\mathcal{S} \subseteq N(A)$. En tal caso, $\|Q\|_A = 0$ y $\|I - Q\|_A = 1$.

Proposición 4.4.5. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $Q \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}$. Entonces:*

1. *Si $Q \in L^A(\mathcal{H})$ y $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ entonces $1 \leq \|Q\|'_A$.*
2. *Si $Q \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ es no trivial para A entonces $1 \leq \|Q\|_A$.*

Demostración.

1. Sea $0 \neq \xi \in \mathcal{S} \cap \overline{R(A)}$ y $\eta = A^{1/2}\xi$. Luego, $\dfrac{\|A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger\eta\|}{\|\eta\|} = \dfrac{\|A^{1/2}Q\xi\|}{\|A^{1/2}\xi\|} = \dfrac{\|A^{1/2}\xi\|}{\|A^{1/2}\xi\|} =$ 1. Así, por la Proposición 4.3.6, vale $\|Q\|'_A = \|A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger\| \geq 1$.

2. Sea $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(A)$. Entonces, por el Lema 4.4.4, $Q = Q_1 + Q_2$, donde $Q_1 \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}\ominus\mathcal{N}}$ y $Q_2 \in \mathcal{Q}_\mathcal{N}$. Además, $\|Q\|_A = \|Q_1\|_A$. Si probamos que el hecho que Q sea no trivial para A implica que existe $0 \neq \xi \in \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$ entonces obtenemos la afimación de la proposición pues

$$1 = \frac{\|\xi\|_A}{\|\xi\|_A} = \frac{\|Q_1\xi\|_A}{\|\xi\|_A} \leq \sup_{\substack{0\neq\eta \\ \eta\notin N(A)}} \frac{\|Q_1\eta\|_A}{\|\eta\|_A} = \|Q_1\|_A = \|Q\|_A.$$

Ahora, como Q es no trivial para A entonces $\mathcal{S} \nsubseteq N(A)$. Así, $\mathcal{S} \cap N(A) \subsetneq \mathcal{S}$. Luego, existe $\omega \in \mathcal{S}$ tal que $\omega \notin \mathcal{S} \cap N(A)$. Sea $\omega = \omega_1 + \omega_2$, donde $\omega_1 \in \mathcal{S} \cap N(A)$ y $\omega_2 \in (\mathcal{S} \cap N(A))^\perp$. Notemos que $\omega_2 \neq 0$ pues $\omega \notin \mathcal{S} \cap N(A)$. Luego $\omega - \omega_1 = \omega_2 \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, $0 \neq \omega_2 \in \mathcal{S} \cap (\mathcal{S} \cap N(A))^\perp = \mathcal{S} \ominus \mathcal{N}$. □

Si en el inciso (1) de la Proposición anterior no se cumple la condición $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ entonces no es cierto que $1 \leq \|Q\|_A$ para todo $Q \in \mathcal{Q}_\mathcal{S}$; ver el ejemplo 4.4.11 más abajo.

Como $L_A(\mathcal{H}) \subseteq L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$, si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces $\|Q\|_A$ es finita. Más aún, en la próxima proposición mostramos que si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ es no trivial para A entonces $\|Q\|_A = 1$. Este resultado extiende la propiedad (III) enunciada al comienzo del capítulo.

Proposición 4.4.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Si $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ es una proyección no trivial para A entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$.
2. $\|Q\|_A = 1$ *y* $Q \in L_A(\mathcal{H})$.

Demostración.

$1 \to 2$. Si $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ entonces, por la Proposición 4.2.2, $Q^\sharp Q$ resulta una proyección A-autoadjunta. Como $R(Q^\sharp Q) \subseteq \overline{R(A)}$, por la Proposición 4.4.2 obtenemos que $\overline{A^{1/2}Q^\sharp Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección ortogonal. Más aún, como Q es no trivial para A entonces $R(Q) \not\subseteq N(A)$ y así se tiene que $\overline{A^{1/2}Q^\sharp Q(A^{1/2})^\dagger} \neq 0$. Luego, $\|Q\|_A^2 = \|Q^\sharp Q\|_A = \|A^{1/2}Q^\sharp Q(A^{1/2})^\dagger\| = \|\overline{A^{1/2}Q^\sharp Q(A^{1/2})^\dagger}\| = 1$.

$2 \to 1$. Si $Q \in L_A(\mathcal{H})$ entonces $Q^\sharp$ es una proyección cuyo rango está contenido en $\overline{R(A)}$. Luego, $(A^{1/2}Q^\sharp(A^{1/2})^\dagger)^2 = A^{1/2}Q^\sharp(A^{1/2})^\dagger$ y así $\overline{A^{1/2}Q^\sharp(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección. Además, como $1 = \|Q\|_A = \|Q^\sharp\|_A = \|\overline{A^{1/2}Q^\sharp(A^{1/2})^\dagger}\|$, la proyección $\overline{A^{1/2}Q^\sharp(A^{1/2})^\dagger}$ resulta ortogonal. Ahora, como $Q^\sharp = A^\dagger Q^* A$ entonces tenemos que $\overline{A^{1/2}Q^\sharp(A^{1/2})^\dagger} = \overline{(A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}}$. Así, $\overline{(A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}} = (\overline{(A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}})^*$ y $((A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)})^* \supset A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger$. Por lo tanto, $\overline{(A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}} = \overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ y así $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger}$ es una proyección ortogonal. Luego, $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger} = (A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger)^* \supset (A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}$. Más aún, ya que $\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}) = \mathcal{H}$ entonces $\overline{A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger} = (A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}$. Por lo tanto, $A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger = (A^{1/2})^\dagger Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}$. Así, $AQ(A^{1/2})^\dagger = Q^* A^{1/2}|_{\mathcal{D}((A^{1/2})^\dagger)}$ y entonces $AQ = Q^* A$. Luego, $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$. □

Corolario 4.4.7. *Sea $(A, \mathcal{S})$ un par compatible y $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$. Entonces:*

1. *Si $Q \in L^A(\mathcal{H})$ y $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ entonces*
$$\|P_{A,\mathcal{S}}\|'_A \leq \|Q\|'_A. \tag{4.4}$$
2. *Si $Q \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ entonces*
$$\|P_{A,\mathcal{S}}\|_A \leq \|Q\|_A.$$

Demostración.

1. Como $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ entonces $\mathcal{S} \not\subseteq N(A)$. Luego, por las Proposiciones 4.4.5 y 4.4.6, obtenemos que $\|P_{A,\mathcal{S}}\|_A = 1 \leq \|Q\|_A$.

2. Si $\|P_{A,\mathcal{S}}\|_A = 0$ el resultado es trivial. Supongamos $\|P_{A,\mathcal{S}}\|_A \neq 0$. Luego, $\mathcal{S} \not\subseteq N(A)$ y entonces, por la Proposición 4.4.5 y la Proposición 4.4.6, tenemos $\|P_{A,\mathcal{S}}\|_A = 1 \leq \|Q\|_A$. $\square$

En [[40], Theorem 6.35, p. 58] T. Kato probó que $\|P_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{T}}\| \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|$ para todo $Q_{\mathcal{S}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ y $Q_{\mathcal{T}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$ (ver también M. Mbekhta [[47], Proposition 1.10]). Aquí extendemos esta propiedad para proyecciones A-autoadjuntas y las seminormas inducidas por $A \in L(\mathcal{H})^+$ de tres maneras diferentes. En el Teorema 4.4.8 la desigualdad se prueba para $Q_{\mathcal{S}}$, $Q_{\mathcal{T}} \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Para obtener esta desiguladad para todo $Q_{\mathcal{S}}$, $Q_{\mathcal{T}} \in L^A(\mathcal{H})$ necesitamos hipótesis adicionales sobre los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ (Teorema 4.4.9, Corolario 4.4.10). La demostración del siguiente resultado sigue las mismas líneas que la demostración propuesta por Kato [[40], Theorem 6.35].

Teorema 4.4.8. *Si los pares $(A, \mathcal{S})$ y $(A, \mathcal{T})$ son compatibles entonces*

$$\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|_A.$$

para toda $Q_{\mathcal{S}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} \cap L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y $Q_{\mathcal{T}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}} \cap L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$.

Demostración. Por la Proposición 4.4.1, dado $\xi \in \mathcal{H}$ vale

$$\begin{aligned} \|(1 - P_{A,\mathcal{T}})P_{A,\mathcal{S}}\xi\|_A &= \text{dist}_A(P_{A,\mathcal{S}}\xi, \mathcal{T}) \leq \|P_{A,\mathcal{S}}\xi - Q_{\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}\xi\|_A \\ &= \|(Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}})P_{A,\mathcal{S}}\xi\|_A \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|_A \ \|P_{A,\mathcal{S}}\xi\|_A \\ &= \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|_A \ \|\xi\|_A. \end{aligned}$$

Entonces $\|(1 - P_{A,\mathcal{T}})P_{A,\mathcal{S}}\|_A \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|_A$. Análogamente se prueba que $\|(1 - P_{A,\mathcal{S}})P_{A,\mathcal{T}}\|_A \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|_A$. Luego, por el ítem (c) de la Proposición 4.4.3, concluimos que $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|_A$. $\square$

Teorema 4.4.9. *Sean $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \overline{R(A)}$. Si los pares $(A, \mathcal{S})$ y $(A, \mathcal{T})$ son compatibles entonces*

$$\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|'_A \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|'_A$$

para todo $Q_{\mathcal{S}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} \cap L^A(\mathcal{H})$ y $Q_{\mathcal{T}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}} \cap L^A(\mathcal{H})$.

Demostración. Si $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \overline{R(A)}$ entonces $Q_1 = A^{1/2}Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^\dagger$ y $Q_2 = A^{1/2}Q_{\mathcal{T}}(A^{1/2})^\dagger$ son proyecciones con el mismo rango que $A^{1/2}P_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^\dagger$ y $A^{1/2}P_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^\dagger$, respectivamente. En efecto, por la Proposición 4.4.2, $Q_1^2 = Q_1$ y $Q_2^2 = Q_2$. Para ver que $R(Q_1) = R(A^{1/2}P_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^\dagger)$

es suficiente probar que $R(Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}) = \mathcal{S}$. Claramente $R(Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}) \subseteq \mathcal{S}$. Sea $\eta \in \mathcal{S} \subseteq \overline{R(A)}$. Luego $\eta = (A^{1/2})^{\dagger}\xi$ para algún $\xi \in \mathcal{D}((A^{1/2})^{\dagger})$. Entonces $\eta = Q_{\mathcal{S}}\eta = Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}\xi$ y así $\mathcal{S} \subseteq R(Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger})$. Por lo tanto $R(Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}) = \mathcal{S}$. Por otro lado, aplicando nuevamente la Proposición 4.4.2, tenemos que los operadores $\overline{A^{1/2}P_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}}$ y $\overline{A^{1/2}P_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}}$ son proyecciones ortogonales. Luego,

$$\begin{aligned}
\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|'_A &= \|A^{1/2}(P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}})(A^{1/2})^{\dagger}\| \\
&= \|\overline{A^{1/2}P_{A,\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}} - \overline{A^{1/2}P_{A,\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}}\| \\
&\leq \|\overline{A^{1/2}Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger}} - \overline{A^{1/2}Q_{\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}}\| \\
&= \|A^{1/2}Q_{\mathcal{S}}(A^{1/2})^{\dagger} - A^{1/2}Q_{\mathcal{T}}(A^{1/2})^{\dagger}\| \\
&= \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|'_A,
\end{aligned}$$

donde la desigualdad vale por [[40], Theorem 6.35, p. 58]. □

Corolario 4.4.10. *Dados* $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$*; si* $\cos(\mathcal{S}, \overline{R(A)}) = 0$, $\cos(\mathcal{T}, \overline{R(A)}) = 0$ *y los pares* $(A, \mathcal{S})$ *y* $(A, \mathcal{T})$ *son compatibles entonces*

$$\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|'_A \leq \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|'_A$$

para toda $Q_{\mathcal{S}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} \cap L^A(\mathcal{H})$ *y* $Q_{\mathcal{T}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}} \cap L^A(\mathcal{H})$.

Demostración. Como $\cos(\mathcal{S}, \overline{R(A)}) = 0$ entonces, por la Proposición 1.3.1, $\mathcal{S} = \mathcal{S} \cap \overline{R(A)} + \mathcal{S} \cap N(A)$. Llamemos $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cap \overline{R(A)}$ y $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \cap N(A)$. Como $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son subespacios ortogonales entonces toda proyección $Q_{\mathcal{S}}$ puede descomponerse como $Q_{\mathcal{S}_1} + Q_{\mathcal{S}_2}$ donde $Q_{\mathcal{S}_1} = P_{\mathcal{S}_1}Q_{\mathcal{S}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}_1}$ y $Q_{\mathcal{S}_2} = P_{\mathcal{S}_2}Q_{\mathcal{S}} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}_2}$. Además, ya que $\mathcal{S}_2 \subseteq N(A)$ entonces $P_{A,\mathcal{S}} = P_{A,\mathcal{S}_1} + P_{\mathcal{S}_2}$. Análogamente tenemos que $Q_{\mathcal{T}} = Q_{\mathcal{T}_1} + Q_{\mathcal{T}_2}$ y $P_{A,\mathcal{T}} = P_{A,\mathcal{T}_1} + P_{\mathcal{T}_2}$, donde $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T} \cap \overline{R(A)}$ y $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \cap N(A)$ Luego,

$$\begin{aligned}
\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|'_A &= \|P_{A,\mathcal{S}_1} - P_{A,\mathcal{T}_1}\|'_A \leq \|Q_{\mathcal{S}_1} - Q_{\mathcal{T}_1}\|'_A \\
&= \|Q_{\mathcal{S}_1} + Q_{\mathcal{S}_2} - (Q_{\mathcal{T}_1} + Q_{\mathcal{T}_2})\|'_A \\
&= \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|'_A.
\end{aligned}$$

□

En el siguiente ejemplo mostramos que una extensión directa del teorema de Kato a proyecciones en $L^A(\mathcal{H})$ es falsa. Nuestros resultados 4.4.8, 4.4.9 y 4.4.10 ofrecen diferentes hipótesis adicionales que garantizan la conclusión.

Ejemplo 4.4.11. Consideremos $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, los subespacios $\mathcal{S} = gen\{(1,1)\}$ y $\mathcal{T} = gen\{(-1,2)\}$ y el operador semidefinido positivo de $L(\mathbb{R}^2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Luego $R(A) = gen\{(2,1)\}$ y $N(A) = gen\{(-1,2)\}$. Observemos que el subespacio $\mathcal{S}$ no verifica la condición del Corolario 4.4.10. Por otro lado, es fácil verificar que

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} -\xi & \frac{-\xi-1}{2} \\ 2\xi & \xi+1 \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R} \right\} \text{ y } \mathcal{Q}_{\mathcal{S}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+\xi}{2} & \frac{1-\xi}{2} \\ \frac{1+\xi}{2} & \frac{1-\xi}{2} \end{pmatrix}, \xi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Más aún, simples cálculos nos indican que

$$P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ y } P_{A,\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora, si tomamos

$$Q_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } Q_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $Q_{\mathcal{S}} \in L^A(\mathcal{H}) \setminus L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$. Además vale que $\|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|'_A = 1$ y $\|Q_{\mathcal{S}}\|'_A = \|Q_{\mathcal{S}} - Q_{\mathcal{T}}\|'_A = 0{,}6$. Luego, la conclusión del Corolario 4.4.10 no se verifica.

El siguiente lema muestra que en la Proposición 4.4.3, en el Corolario 4.4.7, en el Teorema 4.4.8, en el Teorema 4.4.9 y en el Corolario 4.4.10, los elementos $P_{A,\mathcal{S}}$ y $P_{A,\mathcal{T}}$ pueden reemplazarse por cualquier otro elemento de los conjuntos $\mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ y $\mathcal{P}(A,\mathcal{T})$, respectivamente.

Lema 4.4.12. *Si $(A,\mathcal{S})$ y $(A,\mathcal{T})$ son pares compatibles entonces*

$$\|Q_1 - Q_2\|_A = \|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A$$

para todo $Q_1 \in \mathcal{P}(A,\mathcal{S})$ y $Q_2 \in \mathcal{P}(A,\mathcal{T})$.

Demostración. Por las Proposiciones 4.2.2 y 4.3.7 obtenemos que $\|Q_1 - Q_2\|_A = \|Q_1^\sharp - Q_2^\sharp\|_A = \|P_{\overline{R(A)}}P_{A,\mathcal{S}} - P_{\overline{R(A)}}P_{A,\mathcal{T}}\|_A = \|P_{A,\mathcal{S}} - P_{A,\mathcal{T}}\|_A$. □

Dada una proyección no trivial Q en $L(\mathcal{H})$, es decir, una proyección que es diferente de 0 y de I, vale: $\|Q\| = \|I-Q\|$. En [59] se reúnen diferentes demostraciones de este hecho. En la siguiente proposición generalizamos esta identidad para las seminormas inducidas por $A \in L(\mathcal{H})^+$. La demostración que presentamos aquí es similar a la demostración de Krainer presentada en [59].

Proposición 4.4.13. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$. Las siguientes afirmaciones valen:*

1. *Si $Q \in L^A(\mathcal{H})$, $R(Q) \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ y $R(I-Q) \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ entonces*
$$\|Q\|'_A = \|I-Q\|'_A.$$
2. *Si $Q \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ y Q y $I-Q$ son proyecciones no triviales para A entonces*
$$\|Q\|_A = \|I-Q\|_A.$$

Demostración.

1. Observemos que, por la Proposición 4.4.5, las condiciones $R(Q) \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ y $R(I-Q) \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ implican que $\|Q\|'_A \geq 1$ y $\|I-Q\|'_A \geq 1$. Sea $\xi \in \overline{R(A)}$ tal que $\|\xi\|_A = 1$. Definimos $\eta = Q\xi$ y $\mu = (I-Q)\xi$. Entonces $\xi = \eta + \mu$. Veamos que $\|Q\xi\|_A \leq \|I-Q\|'_A$. Si $\eta \in N(A)$ entonces $\|Q\xi\|_A = 0$ y así obtenemos la desigualdad. Si $\mu \in N(A)$ entonces $\|Q\xi\|_A = 1$ y la desigualdad vale también. Luego, consideramos $\eta, \mu \notin N(A)$ y definimos $\omega = \tilde{\eta} + \tilde{\mu}$, donde $\tilde{\eta} = \frac{\|\mu\|_A}{\|\eta\|_A}\,\eta$ y $\tilde{\mu} = \frac{\|\eta\|_A}{\|\mu\|_A}\,\mu$. Por lo tanto $\|\omega\|_A^2 = \|\tilde{\eta}\|_A^2 + \|\tilde{\mu}\|_A^2 + 2Re\,\langle \tilde{\eta}, \tilde{\mu}\rangle_A = \|\eta\|_A^2 + \|\mu\|_A^2 + 2Re\,\langle \eta, \mu\rangle_A = \|\xi\|_A^2 = 1$. Luego, $\|Q\xi\|_A = \|\eta\|_A = \|\tilde{\mu}\|_A = \|(I-Q)\omega\|_A \leq \|I-Q\|'_A$. Así, $\|Q\|'_A \leq \|I-Q\|'_A$. La otra desigualdad se obtiene por simetría.

2. Como Q y $I-Q$ son proyecciones no triviales para A entonces, por la Proposición 4.4.5, vale que $\|Q\|_A \geq 1$ y $\|I-Q\|_A \geq 1$. Luego, la demostración sigue las mismas líneas que la prueba del ítem anterior. □

Observación 4.4.14. Las condiciones $R(Q) \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ y $R(I-Q) \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ en la proposición anterior son necesarias. En efecto, si $Q = P_{N(A)}$ entonces $I - Q = P_{\overline{R(A)}}$ y luego $\|Q\|'_A = 0$ y $\|I-Q\|'_A = 1$. △

4.5. Ángulos y seminormas de proyecciones

En [44], V. Ljance probó que si $\mathcal{H}$ se descompone en suma directa como $\mathcal{H} = \mathcal{S} \dot{+} \mathcal{T}$ entonces la norma de la proyección $Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}}$ es $1/\sin\theta$, donde $\theta \in [0, \pi/2]$ es el ángulo entre los subespacios $\mathcal{S}$

y $\mathcal{T}$ introducido por Dixmier. Demostraciones de este teorema pueden encontrarse en los trabajos de Ptak [54], Steinberg [58], Buckholtz [12] y Ipsen y Meyer [39] (para espacios de dimensión finita). Para finalizar esta sección, extendemos el teorema de Ljance para las A-seminormas, con una definición conveniente de ángulo entre subespacios dependiendo del semi-producto interno $\langle\ ,\ \rangle_A$.

Notemos que aunque los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ sean no cerrados, el ángulo de Dixmier entre ellos puede ser definido como en (1.1). Más aún, vale $\cos_0(\mathcal{S},\mathcal{T}) = \cos_0(\overline{\mathcal{S}},\overline{\mathcal{T}})$ y recordemos que $\cos_0(\mathcal{S},\mathcal{T}) = \|P_{\mathcal{S}}P_{\mathcal{T}}\|$ (Proposición 1.3.1).

Definición 4.5.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. El A-**ángulo** entre dos subespacios cerrados $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ es el ángulo $\theta_A(\mathcal{S},\mathcal{T}) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno se define por*

$$\cos_0(\theta_A(\mathcal{S},\mathcal{T})) = \sup\{|\langle \xi,\eta\rangle_A| : \xi \in \mathcal{S}, \eta \in \mathcal{T} \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1\ \|\eta\|_A \leq 1\}.$$

Notemos que $0 \leq \cos_0(\theta_A(\mathcal{S},\mathcal{T})) \leq 1$ y que, aunque $A^{1/2}(\mathcal{S})$ y $A^{1/2}(\mathcal{T})$ no sean subespacios cerrados, vale

$$\cos_0(\theta_A(\mathcal{S},\mathcal{T})) = \cos_0((A^{1/2}(\mathcal{S}), A^{1/2}(\mathcal{T}))) = \cos_0((\overline{A^{1/2}(\mathcal{S})}, \overline{A^{1/2}(\mathcal{T})})).$$

Proposición 4.5.2. *Si $(A,\mathcal{S})$ y $(A,\mathcal{T})$ son pares compatibles entonces*

$$\cos_0(\theta_A(\mathcal{S},\mathcal{T})) = \|P_{A,\mathcal{S}}P_{A,\mathcal{T}}\|_A.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\cos_0(\theta_A(\mathcal{S},\mathcal{T})) &= \sup\{|\langle \xi,\eta\rangle_A| : \xi \in \mathcal{S}, \eta \in \mathcal{T} \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1,\ \|\eta\|_A \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle P_{A,\mathcal{S}}\xi, P_{A,\mathcal{T}}\eta\rangle_A| : \xi,\eta \in \mathcal{H} \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1,\ \|\eta\|_A \leq 1\} \\
&= \sup\{|\langle \xi, P_{A,\mathcal{S}}P_{A,\mathcal{T}}\eta\rangle_A| : \xi,\eta \in \mathcal{H} \text{ y } \|\xi\|_A \leq 1,\ \|\eta\|_A \leq 1\} \\
&= \|P_{A,\mathcal{S}}P_{A,\mathcal{T}}\|_A,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por la Proposición 4.3.1. □

Proposición 4.5.3. *Sea $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{T} = \mathcal{H}$. Si $(A,\mathcal{S})$ y $(A,\mathcal{T})$ son pares compatibles, $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ y $Q = Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}} \in L^A(\mathcal{H})$ entonces*

$$\|Q\|'_A = (1 - \|P_{A,\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}\|_A^2)^{-1/2}.$$

Demostración. Como $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ entonces $\|Q\|'_A \geq 1$. Sea $\xi = P_{A,\mathcal{T}}\xi + (I - P_{A,\mathcal{T}})\xi \in \mathcal{H}$. Luego $Q\xi = Q(I - P_{A,\mathcal{T}})\xi$ y $\|(I - P_{A,\mathcal{T}})\xi\|_A \leq \|\xi\|_A$. Entonces, ya que $R(I - P_{A,\mathcal{T}}) = N(P_{A,\mathcal{T}}) = \mathcal{T}^{\perp_A} \ominus \mathcal{W}$, donde $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cap N(A)$, se obtiene $\|Q\|'_A = \|Q|_{\mathcal{T}^{\perp_A}\ominus\mathcal{W}}\|'_A$. Ahora, consideremos $\xi \in (\mathcal{T}^{\perp_A} \ominus \mathcal{W}) \cap \overline{R(A)}$ (notemos que $(\mathcal{T}^{\perp_A} \ominus \mathcal{W}) \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$, pues si $(\mathcal{T}^{\perp_A} \ominus \mathcal{W}) \cap \overline{R(A)} = \{0\}$ entonces $\|Q\|'_A = 0$). Así $P_{A,\mathcal{T}}Q\xi = P_{A,\mathcal{T}}\xi + P_{A,\mathcal{T}}(Q\xi - \xi) = Q\xi - \xi$ y en consecuencia $\|Q\xi\|_A^2 = \|\xi\|_A^2 + \|Q\xi - \xi\|_A^2 = \|\xi\|_A^2 + \|P_{A,\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}Q\xi\|_A^2$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $Q\xi \in \overline{R(A)}$. Entonces tenemos que $1 = \dfrac{\|\xi\|_A^2}{\|Q\xi\|_A^2} + \dfrac{\|P_{A,\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}Q\xi\|_A^2}{\|Q\xi\|_A^2}$ y en consecuencia

$$\left(1 - \frac{\|P_{A,\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}Q\xi\|_A^2}{\|Q\xi\|_A^2}\right)^{-1/2} = \frac{\|Q\xi\|_A}{\|\xi\|_A}.$$

Ahora, como $\|Q\|'_A = \|Q|_{\mathcal{T}^{\perp_A}\ominus\mathcal{W}}\|'_A$ y $\|P_{A,\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}\|_A = \|P_{A,\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}}\|_A$ obtenemos la afirmación. $\square$

Corolario 4.5.4. *Sean $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ subespacios cerrados tales que $\mathcal{S} \dot{+} \mathcal{T} = \mathcal{H}$. Si $(A, \mathcal{S})$ y $(A, \mathcal{T})$ son pares compatibles y $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ entonces para toda $Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}} \in L^A(\mathcal{H})$ vale*

$$\|Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}}\|_A = \frac{1}{\sin_0(\theta_A(\mathcal{T}, \mathcal{S}))}.$$

El siguiente ejemplo muestra que la condición $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ en la Proposición 4.5.3 es necesaria.

Ejemplo 4.5.5. Sea $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ y consideremos los operadores

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2)^+ \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}.$$

Entonces $\mathcal{S} = R(Q) = gen\{(1, 1)\}$ y $\mathcal{T} = N(Q) = gen\{(1, 0)\}$. Es fácil verificar que

$$P_{A,\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ y } P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $\|P_{A,\mathcal{T}}P_{A,\mathcal{S}}\|_A = 1$ y $\|Q\|'_A = \|A^{1/2}Q(A^{1/2})^\dagger\| = 0{,}6$.

Observación 4.5.6. Si en la Proposición 4.5.3 y en el Corolario 4.5.4 consideramos $Q = Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}} \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$, obtenemos los mismos resultados reemplazando la hipótesis $\mathcal{S} \cap \overline{R(A)} \neq \{0\}$ por la siguiente hipótesis más débil: $Q = Q_{\mathcal{S}//\mathcal{T}} \in L_{A^{1/2}}(\mathcal{H})$ es una proyección no trivial para A. $\triangle$

Capítulo 5

Aproximación de marcos por marcos de Parseval

En este capítulo nos dedicamos al estudio de aproximación de marcos por marcos de Parseval, en ideales simétricamente normados de operadores compactos. Este problema de aproximación tiene su origen en el proceso de ortonormalización simétrica, el cual surge en el área de química cuántica como necesidad de ortonormalizar un conjunto de vectores tratándolos de manera simultánea y no en forma sucesiva, como ocurre cuando se aplica el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. En la construcción de tal proceso de ortonormalización se busca que los vectores ortonormales obtenidos conserven las propiedades de simetría que existen en el conjunto de partida; esto significa que una transformación unitaria sobre los vectores de la base original se traduzca en la misma transformación sobre los vectores ortonormales. Landshoff [42] propuso tal proceso de ortonormalización y luego Löwdin [45] lo caracterizó mediante una propiedad de minimalidad. En la siguiente sección describimos el proceso de ortonormalización simétrica y sus características, la propiedad de minimalidad que satisface motiva el estudio de aproximación de marcos por marcos de Parseval.

5.1. Ortonormalización simétrica

Sea $\mathcal{B} = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ una base de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$ la base ortonormal canónica de $\mathbb{C}^n$ y $T \in Gl(\mathbb{C}^n)$ definido por $T\epsilon_i = \xi_i$, $i = 1, \cdots, n$, el operador asociado a la base $\mathcal{B}$. Cada operador unitario U en $L(\mathbb{C}^n)$ está asociado a una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, a saber, $\{U\epsilon_1, \cdots, U\epsilon_n\}$. En término de operadores, la construcción de una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$ partiendo de T, consiste en encontrar un operador $G \in Gl(\mathbb{C}^n)$ tal que GT resulte unitario, es decir, $(GT)^*GT = I$. Luego, los operadores $G \in Gl(\mathbb{C}^n)$ que verifican esta última ecuación son $G = W|T^*|^{-1}$, donde $W \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$. Cada elección de W determina un proceso de ortonomalización y la base ortonormal que resulta de este proceso tiene como operador asociado:

$$U = W|T^*|^{-1}T. \tag{5.1}$$

La elección $W = I$ conduce a la ortonormalización simétrica de $\mathcal{B}$. Este proceso de ortonormalización fue propuesto por Landshoff [42] como un modo de ortonormalizar bases conservando la simetría de los elementos de la base original (ver ítem (1) más abajo). Más tarde, Löwdin [45] caracterizó el sistema ortonormal de Landshoff como el único sistema ortonormal más cercano al sistema original cuando se miden distancias con respecto a la norma Frobenius (ver ítem (2) más abajo). Observemos que el operador unitario asociado a esta base ortonormal es el operador unitario de la descomposición polar de T. Sea U_T el operador unitario de la descomposición polar de T, las siguientes características distinguen al proceso de ortonormalización simétrica:

1. Si $V \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$ y $\tilde{T} = VT$ (es decir, $\tilde{T}$ es el operador asociado a la base $\tilde{\mathcal{B}}$ que se obtiene de perturbar los elementos de $\mathcal{B}$ por V) entonces $U_{\tilde{T}} = VU_T$. En efecto, notemos que $|\tilde{T}^*| = V|T^*|V^*$. Luego, $U_{\tilde{T}} = |\tilde{T}^*|^{-1}\tilde{T} = VU_T$.

2. Si $\| \,.\, \|_2$ denota la norma Frobenius en $L(\mathbb{C}^n)$ entonces

$$\|T - U_T\|_2 = \text{mín}\{\|T - W\|_2 : W \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)\}. \tag{5.2}$$

   Más aún, U_T es el único operador unitario que realiza el mínimo. En efecto, sea $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$ la base ortonormal canónica de $\mathbb{C}^n$ y consideremos la aplicación $tr : L(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ definida por $tr(C) = \sum_{i=1}^{n} \langle C\epsilon_i, \epsilon_i \rangle$ para todo $C \in L(\mathbb{C}^n)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|T - W\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{n} \|(T - W)\epsilon_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle (T - W)^*(T - W)\epsilon_k, \epsilon_k \rangle \\
&= tr((T - W)^*(T - W)) \\
&= tr(T^*T) + tr(W^*W) - tr(T^*W + W^*T) \\
&= tr(T^*T) + tr(W^*W) - 2tr(Re(W^*T)) \\
&\geq tr(T^*T) + n - 2tr(|W^*T|).
\end{aligned}$$

y la igualdad vale si y sólo si $W^*T = |W^*T| = |T|$ ([11], Proposition III.5.1), es decir, si y sólo si $W = U_T$. Para probar la unicidad, supongamos que existe $U_0 \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\|T - U_0\|_2 = \|T - U_T\|_2 = \text{mín}\{\|T - W\|_2 : W \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^n)\}$. Entonces $U_0^*T = |U_0^*T| = |T|$. Luego, $U_0^* = |T|T^{-1} = U_T^*$ y así $U_0 = U_T$.

La propiedad de minimalidad (5.2) es el punto de partida de los resultados que presentamos en este capítulo, los cuales están dados en el contexto de marcos para un espacio de Hilbert. Tales sucesiones son una generalización del concepto de bases, como veremos en la siguiente sección.

5.2. Nociones básicas de marcos en espacios de Hilbert

Las bases cumplen una tarea fundamental en los espacios vectoriales; permiten representar a todos los elementos del espacio de una única manera como «combinación lineal» de los elementos de la base. En el caso de espacios de dimensión infinita la situación presenta la dificultad de trabajar con series infinitas, por lo tanto hay distintos conceptos de bases de acuerdo al modo en que converja la serie. Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach separable, una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ es una **base de Schauder** para $\mathcal{X}$ si para todo $\xi \in \mathcal{X}$ existen únicos escalares $\{c_n(\xi)\}$ tales que

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\xi)\xi_n.$$

Aquí, la convergencia depende del orden en que se disponen los elementos. Si la serie converge incondicionalmente entonces se dice que la base $\{\xi_n\}_{n\in N}$ es incondicional.

En un espacio de Hilbert se tiene el concepto adicional de base ortonormal el cual es muy utilizado por físicos y matemáticos en muchas áreas donde se necesita representar elementos en términos de la base, pues en los elementos de una base ortonormal se concentra la información de cada vector. Una sucesión $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{H}$ es una **base ortonormal** para $\mathcal{H}$ si $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $\mathcal{H}$ y $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$.

Es bien conocido que una sucesión ortonormal $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$ si y sólo si para todo $\xi \in \mathcal{H}$ vale que $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \xi_n \rangle \xi_n$. Además, si $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$ entonces todas las bases ortonormales para $\mathcal{H}$ están dadas por las sucesiones $\{U\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Si se debilita la condición sobre el operador U, requiriendo que éste sea inversible y acotado (es decir, $U \in Gl(\mathcal{H})$) entonces la sucesión $\{U\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **base de Riesz**. Si $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$ entonces para todo $\xi \in \mathcal{H}$ existe una única sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ tal que $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \mu_n \rangle \eta_n$. Las bases ortonormales y las bases de Riesz tienen la característica adicional de ser bases incondicionales. En muchos casos, la unicidad de los coeficientes en la expansión de un elemento en término de los elementos de la base no es útil y tener un conjunto de generadores del espacio con más elementos que los necesarios para una base da más libertad para elegir los coeficientes, lo cual es muy útil para algunas aplicaciones determinadas. Surge así la necesidad de definir el concepto de marcos para un espacio de Hilbert.

Los marcos para un espacio de Hilbert fueron definidos formalmente por Duffin y Schaeffer [27] en 1952. Desde ese momento se ha trabajado intensamente sobre este tema pues la teoría de marcos tiene un papel fundamental en procesamiento de señales, procesamiento de imágenes, compresión de datos, etc. El lector interesado en la teoría de marcos puede consultar el libro de O. Christensen [15]. En esta sección daremos las definiciones y resultados básicos con los cuales trabajaremos en este capítulo.

Definición 5.2.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. Una sucesión $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ es un* **marco** *para $\mathcal{H}$ si existen constantes $a, b > 0$ tal que*

$$a\|\xi\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \xi, \xi_n \rangle|^2 \leq b\|\xi\| \tag{5.3}$$

vale para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Las cotas óptimas a, b para (5.3) se llaman cotas del marco. Un marco se dice **ajustado** si $a = b$. Si además, $a = b = 1$, el marco se denomina **marco de Parseval**. Si $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco y $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denota la base ortonormal canónica de $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$, el operador

$$T : \ell^2 \to \mathcal{H}, \;\; T(\epsilon_n) = \xi_n,$$

es acotado y se denomina **operador de síntesis**. Su adjunto, definido por

$$T^* : \mathcal{H} \to \ell^2, \;\; T^*\xi = \{\langle \xi, \xi_n \rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$$

se denomina **operador de análisis**. El **operador de marco** es

$$S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \;\; S\xi = TT^*\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \xi_n \rangle \, \xi_n.$$

Proposición 5.2.2. *Sea $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para $\mathcal{H}$ y $T \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ el operador de síntesis de Ξ. Entonces:*

1. *$S = TT^*$ es inversible.*

2. *T^* es inyectivo y T es suryectivo.*

3. *Ξ es un marco de Parseval si y sólo si $S = TT^* = I$.*

Demostración.

1. Sea $\xi \in \mathcal{H}$. Luego $\langle S\xi, \xi \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \xi_n \rangle \xi_n, \xi \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \xi_n \rangle \overline{\langle \xi, \xi_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle \xi, \xi_n \rangle |^2$. Entonces, como Ξ es un marco, existen constantes $a, b > 0$ tales que $a \langle \xi, \xi \rangle \leq \langle S\xi, \xi \rangle \leq b \langle \xi, \xi \rangle$, es decir, $aI \leq S \leq bI$. Por lo tanto, $S = TT^*$ es inversible.

2. Por el ítem (1), el operador TT^* es inyectivo, es decir, $N(TT^*) = \{0\}$. Luego, la inyectividad de T^* sigue del hecho que $N(T^*) = N(TT^*)$. Por otro lado, TT^* es suryectivo. Entonces $\mathcal{H} = R(TT^*) \subseteq R(T)$ y así T resulta suryectivo.

3. La afirmación es consecuencia inmediata del hecho que $\langle S\xi, \xi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle \xi, \xi_n \rangle |^2$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$. $\square$

Por el ítem (3) de la Proposición anterior, el operador de síntesis de un marco de Parseval es una coisometría, es decir, el operador de síntesis verifica que $TT^* = I$. En particular, si T es el operador de síntesis de un marco Ξ y $T = U|T|$ su descomposición polar, donde U es una isometría parcial de $L(\ell^2, \mathcal{H})$ y $|T| = (T^*T)^{1/2}$ entonces U es una coisometría. El marco de Parseval que define la coisometría U se denomina **marco de Parseval canónico** asociado a Ξ.

La siguiente propiedad de descomposición es la característica más importante que poseen los marcos.

Proposición 5.2.3. *Sea $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para $\mathcal{H}$ con operador de marco S. Luego, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ vale*

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \xi, S^{-1}\xi_n \right\rangle \xi_n.$$

Demostración. Sea $\xi \in \mathcal{H}$. Por las propiedades del operador de marco vale que $\xi = SS^{-1}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle S^{-1}\xi, \xi_n \right\rangle \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \xi, S^{-1}\xi_n \right\rangle \xi_n$ y así se obtiene la afirmación. □

Por otro lado, también vale la siguiente igualdad:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi, \xi_n \rangle \, S^{-1}\xi_n.$$

Notemos que para reconstruir un elemento de $\mathcal{H}$ mediante el operador marco, necesitamos realizar el cálculo del inverso de S, lo cual, en muchos casos, plantea inconvenientes. Por esta razón es que los marcos de Parseval suelen ser los más utilizados para reconstruir vectores. En general, los coeficientes que intervienen en la fórmula de reconstrucción no son únicos.

5.3. Ideales simétricos de $L(\mathcal{H})$

A lo largo de este capítulo, $L_{00}(\mathcal{H})$ denota el ideal de operadores de rango finito de $L(\mathcal{H})$ y $L_0(\mathcal{H})$ el ideal de operadores compactos de $L(\mathcal{H})$. Dado $T \in L_0(\mathcal{H})$, los valores singulares de T ordenados de manera decreciente se denotan $s_i(T)$ con $i \in \mathbb{N}$ (es decir, $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \cdots$) y $s(T) = (s_i(T))_{i\in\mathbb{N}}$. El Teorema de Calkin ([33], Chapter III, Theorem 1.1) afirma que si $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero de $L(\mathcal{H})$ entonces $L_{00}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H}) \subseteq L_0(\mathcal{H})$. Un ideal bilátero $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ de $L(\mathcal{H})$ se dice **simétricamente normado** si sobre $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ se define una norma simétrica que lo convierte en un espacio de Banach. Por norma **norma simétrica** entendemos una funcional $\|\cdot\|_s : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ que satisface:

1. $\|\cdot\|_s$ es una norma;
2. $\|STR\|_s \leq \|S\| \, \|T\|_s \|R\|$, para todo $S, R \in L(\mathcal{H})$ y $T \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$;
3. $\|T\|_s = \|T\| = s_1(T)$ para todo $T \in L(\mathcal{H})$ con $dim(R(T)) = 1$.

Si la condición (2) se remplaza por

2′. $\|UT\|_s = \|TU\|_s = \|T\|_s$ para todo $T \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$ y $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$;

entonces $\|\cdot\|_s$ es una **norma unitariamente equivalente**.

Toda norma simétrica es unitariamente invariante. En efecto, de acuerdo a la propiedad (2), para todo $U, V \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ vale $\|UTV\|_s \leq \|T\|_s$. Además, como $T = U^{-1}UTVV^{-1}$ se tiene que $\|T\|_s \leq \|UTV\|_s$ y así $\|UTV\|_s = \|T\|_s$. Consideremos c_0, c_0^+ y $\hat{c}$ los espacios de sucesiones de números reales definidos por

$$\begin{aligned} c_0 &:= \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}; \\ c_0^+ &:= \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : \xi_n \geq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}; \\ \hat{c} &:= \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : \text{existe } M > 0 \text{ tal que } \xi_n = 0, n \geq M\}. \end{aligned}$$

Una función $\Phi : \hat{c} \to \mathbb{R}$ es una **función simétricamente normada** si

1. Φ es una norma;

2. $\Phi(1, 0, 0, \cdots) = 1$;

3. $\Phi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots) = \Phi(|\xi_{j1}|, |\xi_{j2}|, \cdots, |\xi_{jn}|, 0, 0, \cdots)$,

donde $j_1, \cdots, j_n$ es una permutación de los enteros $1, \cdots, n$.

Las funciones simétricamente normadas se vinculan con las normas simétricas sobre $L_0(\mathcal{H})$. Para describir esta relación es necesario extender el dominio de dichas funciones. Dado $\overline{\xi} = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ consideremos $\xi^{(n)} = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, 0, 0, \cdots\}$. Si $\Phi : \hat{c} \to \mathbb{C}$ es una función simétricamente normada entonces se define

$$c_\Phi = \{\overline{\xi} \in c_o : \sup_n \Phi(\xi^{(n)}) < \infty\}.$$

La sucesión $\{\Phi(\xi^{(n)})\}$ es no decreciente y acotada superiormente ([33], Chapter III, Lemma 3.2). Luego, para cada $\overline{\xi} \in c_\Phi$ se define

$$\Phi(\overline{\xi}) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\xi^{(n)}).$$

Dada una función $\Phi : c_\Phi \to \mathbb{C}$ simétricamente normada, denotamos

$$\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H}) = \{T \in L_0(\mathcal{H}) : s(T) \in c_\Phi\}$$

y sobre $\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ definimos la norma

$$\|T\|_\Phi = \Phi(s(T)).$$

El conjunto $\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ con la norma $\| \ . \ \|_\Phi$ es un **ideal simétricamente normado** ya que Φ induce una norma simétrica sobre $\mathcal{I}_\Phi$ ([33], Chapter III, Theorem 4.1).

A continuación introducimos algunas normas simétricas y clases de ideales simétricos con los que trabajaremos en este capítulo:

(I) Para cada $k \in \mathbb{N}$, la función $\Phi_{(k)} : c_\Phi \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi_{(k)}(\xi) = \sum_{j=i}^{k} \xi_i$$

es una función simétricamente normada. Si $T \in L_0(\mathcal{H})$, para cada $k \in \mathbb{N}$ se definen las **normas de Ky-Fan** como

$$\|T\|_{(k)} = \Phi_{(k)}(s(T)).$$

(II) Sea $T \in L_0(\mathcal{H})$. Para $1 \leq p < \infty$ la función $\Phi^p : c_\Phi \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi^p(s(T)) = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p \Big)^{1/p}$$

es una función simétricamente normada. Luego, el conjunto

$$L^p(\mathcal{H}) = \{T \in L_0(\mathcal{H}) : \Phi^p(s(T)) < \infty\}$$

es un ideal simétricamente normado con la norma

$$\|T\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)^p \Big)^{1/p}.$$

Los ideales $L^p(\mathcal{H})$ se llaman **ideales Schatten-p**.

Las normas de Ky-Fan jugarán un rol fundamental en los resultados que presentaremos en la sección 5.4. La principal importancia de dichas normas radica en la siguiente proposición; una demostración de la misma puede encontrarse en [33], página 82.

Proposición 5.3.1 (Propiedad de dominancia de Ky Fan)**.** *Sea $\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ un ideal simétricamente normado de $L_0(\mathcal{H})$. Si $T_2 \in \mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ y el operador $T_1 \in L_0(\mathcal{H})$ satisface*

$$\|T_1\|_{(k)} \leq \|T_2\|_{(k)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $T_1 \in \mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ y $\|T_1\|_\Phi \leq \|T_2\|_\Phi$.

Para enunciar el próximo resultado (ver [11], Theorem III.4.4) necesitamos especificar la notación que utilizaremos: dado $\overline{\xi} = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$, $|\overline{\xi}|$ denota el vector $(|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots)$ y $\overline{\xi}^{\downarrow}$ denota el vector obtenido al reordenar las coordenadas de $\overline{\xi}$ en orden decreciente.

Proposición 5.3.2 (Lidskii). *Si $T_1, T_2 \in L_0(\mathcal{H})$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ vale*

$$\|T_1 - T_2\|_{(k)} \geq \sum_{i=1}^{k} |s_i(T_1) - s_i(T_2)|^{\downarrow}.$$

5.4. Aproximación de marcos por marcos de Parseval

Durante esta sección $T \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ denotará el operador de síntesis asociado a un marco $\Xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Además, $U \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ denotará la coisometría de la descomposición polar de T, $T = U|T|$. Notemos que $R(T)$ es cerrado pues T es suryectivo; luego $R(T^*)$ es cerrado y denotaremos $P = P_{R(T^*)}$.

M. Frank, V. Paulsen y T. Tiballi [31] fueron los primeros en abordar el estudio de aproximación de marcos por marcos de Parseval. En [31] se prueba que si el operador de marco TT^* es de la forma $I + H$, donde $H \in L^2(\mathcal{H})$ entonces

$$\|\, |T - U|\, \|_2 = \min\{\|\, |T - W|\, \|_2 : W \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \ \text{ y } \ WW^* = I_{\mathcal{H}}\}. \tag{5.4}$$

Nuestro objetivo es extender este resultado al caso en que el operador de marco es de la forma $I + K$, donde K es un operador perteneciente a algún ideal simétricamente normado de $L_0(\mathcal{H})$. Esta condición puede manifestarse de diferentes maneras, todas ellas equivalentes, como veremos en el siguiente resultado.

Proposición 5.4.1. *Sea $P = P_{R(T^*)}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$I - TT^* \in L_0(\mathcal{H})$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$).*

2. *$P - |T| \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$).*

3. *$|U - T| \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$).*

4. *Existe una co-isometría $W \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ tal que $|W - T| \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$).*

5. *Existe una isometría parcial $V \in L(\ell^2)$ tal que $VV^* = P$ y $V - |T| \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$).*

Demostración.

1$\leftrightarrow$ 2. Afirmamos que $I - TT^* \in L_0(\mathcal{H})$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$) si y sólo si $I - (TT^*)^{1/2} \in L_0(\mathcal{H})$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$). En efecto, es suficiente notar que $I - TT^* = (I - (TT^*)^{1/2})(I + (TT^*)^{1/2})$ y que $I + (TT^*)^{1/2}$ es inversible. Luego, como $I - (TT^*)^{1/2} = U(P - |T|)U^*$ y $P - |T| = U^*(I - (TT^*)^{1/2})U$, la equivalencia queda probada.

2$\leftrightarrow$ 3. Como $U(P - |T|) = U - T$ entonces $|P - |T|| = |U - T|$. Luego, $P - |T| \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$) si y sólo si $|U - T| \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$).

3$\rightarrow$ 4. La demostración es inmediata.

4$\rightarrow$ 5. Definimos $V = U^*W$. Entonces $VV^* = P$. Además, $V - |T| = U^*(W - T)$ y $|\, V - |T|\, | = |\, W - T\,|$. Luego $V - |T| \in L_0(\ell^2)$.

5$\rightarrow$ 2. Si $|T| = V + K$ para algún $K \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$) entonces $|T|^2 = P + \widehat{K}$ donde $\widehat{K} \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$). Por otro lado, como T es sobreyectivo entonces su rango es cerrado. Luego $R(T^*T)$ es cerrado y por lo tanto $R(T^*) = R(|T|) = R(|T|^{1/2})$. Es claro que $P + |T|$ y $P + |T|^{1/2}$ son operadores positivos. Más aún, vale que $(P + |T|)^{1/2} = P + |T|^{1/2}$ y $(P + |T|^2)^{1/2} = P + |T|$. Además, $P + |T|$ tiene rango cerrado. En efecto, por las observaciones anteriores y [[30], Theorem 2.2], tenemos las siguientes igualdades

$$R(P) + R(|T|) = R(P) + R(|T|^{1/2}) = R((P + |T|)^{1/2}) = R(P + |T|^{1/2}); \tag{5.5}$$

$$R(P) + R(|T|) = R((P + |T|^2)^{1/2}) = R(P + |T|). \tag{5.6}$$

De (5.5) y (5.6) concluimos que $R(P + |T|) = R((P + |T|)^{1/2})$. En consecuencia, $P + |T|$ tiene rango cerrado. Luego $(P + |T|)^\dagger \in L(\ell^2)$. Ahora, como $P - |T|^2 = (P + |T|)(P - |T|)$ entonces $(P + |T|)^\dagger(P - |T|^2) = P_{R(P+|T|)}(P - |T|) = P - |T|$ pues, de la ecuación (5.6) se desprende que $R(P) \subseteq R(P + |T|)$ y $R(|T|) \subseteq R(P + |T|)$. Luego, ya que $L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$) es un ideal bilátero, se deduce que $P - |T| \in L_0(\ell^2)$ (respectivamente $\mathcal{I}_\Phi(\ell^2)$). $\square$

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.4.2. *Si $I - TT^* \in L_0(\mathcal{H})$ entonces*

$$\|\, |T - U|\, \|_{(k)} = \text{mín}\{\|\, |T - W|\, \|_{(k)} : W \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \ \text{ y } \ WW^* = I_\mathcal{H}\} < \infty,$$

donde $\|\cdot\|_{(k)}$ denota la k-ésima norma de Ky Fan.

Demostración. Si $I - TT^* \in L_0(\mathcal{H})$ entonces, por la Proposición 5.4.1, $|U - T| \in L_0(\ell^2)$. Luego, el mínimo es finito. Sea $W \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ una co-isometría y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $|W - T| \in L_0(\ell^2)$. Consideremos $V = U^*W$. Luego V es una isometría parcial tal que $VV^* = P$, donde $P = P_{R(T^*)}$. Como $U^*(U - T) = P - U^*T = P - |T|$ y $U^*(W - T) = V - |T|$ entonces $|U - T| = |\, P - |T|\,|$ y $|W - T| = |\, V - |T|\,|$. Así,

$$\|\, |U - T|\, \|_{(k)} = \|\, P - |T|\, \|_{(k)} \;\text{ y }\; \|\, |W - T|\, \|_{(k)} = \|\, V - |T|\, \|_{(k)},$$

para toda norma Ky Fan $\| \cdot \|_{(k)}$. Por lo tanto, es suficiente probar que

$$\|\, V - |T|\, \|_{(k)} \geq \|\, P - |T|\, \|_{(k)} \tag{5.7}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $P - |T|$ es un operador compacto, por el Teorema Espectral ([17], Chapter II, Theorem 5.1), existe una base ortonormal de $N(T)^{\perp}$, $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que

$$|T| = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(T)\, \langle\, .\,, \xi_i \rangle\, \xi_i.$$

Sea P_n la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Entonces, $s_i(P_nV) = s_i(P_n)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego, por la Proposición 5.3.2 se obtiene:

$$\begin{aligned} \|(V - |T|)\|_{(k)} &\geq \|P_n(V - |T|)\|_{(k)} \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \left| s_i(P_nV) - s_i(P_n|T|) \right|^{\downarrow} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left| s_i(P_n) - s_i(P_n|T|) \right|^{\downarrow} \\ &= \|P_n(P - |T|)\|_{(k)}. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando límite para $n \to \infty$, se obtiene (5.7). $\square$

Corolario 5.4.3. *Si $I - TT^* \in L^p(\mathcal{H})$ para algún $1 \leq p < \infty$ entonces*

$$\|\, |T - U|\, \|_p = \text{mín}\{\|\, |T - W|\, \|_p : W \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \;\text{ y }\; WW^* = I_{\mathcal{H}}\} < \infty.$$

Demostración. La afirmación es una consecuencia inmediata del Teorema 5.4.2 y de la Proposición 5.3.1. $\square$

Más generalmente obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.4.4. *Sea $\mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ un ideal simétricamente normado. Si $I - TT^* \in \mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ entonces*

$$\| \, |T - U| \, \|_\Phi = \text{mín}\{\| \, |T - W| \, \|_\Phi : W \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \ \text{ y } \ WW^* = I_\mathcal{H}\} < \infty. \tag{5.8}$$

Demostración. La afirmación es una consecuencia inmediata del Teorema 5.4.2 y de la Proposición 5.3.1. □

Nota. A partir del trabajo de Löwdin [45] el estudio de aproximación de bases por bases ortonormales y luego, su generalización natural, la aproximación de marcos por marcos de Parseval, ocupó a diferentes matemáticos, físicos y químicos. A continuación presentamos una breve reseña de los aportes hechos:

- En 1980, el Corolario 5.4.3 fue probado por Aiken, Erdos y Goldstein en el contexto de bases para un espacio de Hilbert de dimensión finita [1] y para espacios de Hilbert de dimensión infinita [2], en este último caso mediante el uso de derivadas Fréchet de $\| \, . \, \|_p$.

- En 1991 Goldstein y Levy ([34], §6) extendieron el Corolario 5.4.3 a toda norma unitariamente invariante sobre $L_{00}(\mathcal{H})$, en el contexto de bases para un espacio de Hilbert de dimensión finita.

- En 2002, el problema de aproximar marcos por marcos de Parseval fue estudiado por Frank, Paulsen y Tiballi ([31], Theorem 1.3, Theorem 2.3, Proposition 3.4) considerando $\| \, . \, \|_2$ sobre $L_{00}(\mathcal{H})$ y sobre $L_0(\mathcal{H})$.

- En 2007, Casazza y Kutyniok [14] presentaron un algoritmo que calcula el marco de Parseval más cercano a un marco dado, respecto a la norma $\| \, . \, \|_2$, en un espacio de Hilbert de dimensión finita.

- Con [31] como motivación, y utilizando leves variaciones de las ideas aplicadas en [34], obtuvimos el Teorema 5.4.2 que generaliza los resultados obtenidos en [31] y provee una extensión natural de los resultados de Goldstein-Levy a todo ideal simétricamente normado de $L_0(\mathcal{H})$ (Corolario 5.4.4).

Siguiendo exactamente los mismos pasos hechos en la demostración del Teorema 5.4.2, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 5.4.5. *Sea $A \in Gl(\mathcal{H})^+$ tal que A conmuta con TT^*. Entonces:*

1. *Si* $A - TT^* \in L_0(\mathcal{H})$ *entonces para todo* $k \in \mathbb{N}$ *vale*

$$\| \, |T - A^{1/2}U| \, \|_{(k)} = \text{mín}\{\| \, |T - \widehat{T}| \, \|_{(k)} : \widehat{T} \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \;\; y \;\; \widehat{T}\widehat{T}^* = A\} < \infty,$$

2. *Si* $\mathcal{I}_\phi(\mathcal{H})$ *es un ideal simétricamente normado de* $L_0(\mathcal{H})$ *y* $A - TT^* \in \mathcal{I}_\Phi(\mathcal{H})$ *entonces*

$$\| \, |T - A^{1/2}U| \, \|_{\Phi} = \text{mín}\{\| \, |T - \widehat{T}| \, \|_{\Phi} : \widehat{T} \in L(\ell^2, \mathcal{H}) \;\; y \;\; \widehat{T}\widehat{T}^* = A\} < \infty.$$

Bibliografía

[1] J. Aiken, J. Erdos and J. Goldstein; *On Löwdin orthogonalization*. Internat. J. Quantum Chem. Vol. 18 (1980), 1101-1108.

[2] J. Aiken, J. Erdos and J. Goldstein; *Unitary approximation of positive operators*. Illinois Journal of Mathematics. Vol. 24, Number 1, (1980), 61-72.

[3] N.I.Akhiezer and I.M.Glazman; *Theory of linear operators in Hilbert space.* Vol.1, Ungar, New York, 1961.

[4] M. L. Arias, G. Corach and M. C. Gonzalez; *Generalizad inverses and Douglas equations*. Proceedings of the American Mathematical Society 136 N^{o} 9, (2008) 3177-3184.

[5] M. L. Arias, G. Corach and M. C. Gonzalez; *Metric properties of projections in semi-Hilbertian spaces*. Integral Equations and Operator Theory 62 (2008), 11-28.

[6] M. L. Arias, G. Corach and M. C. Gonzalez; Partial isometries in semi-Hilbertian spaces, Linear Algebra and its Applications. 428, (2008) 1460-1475.

[7] M. L. Arias, G. Corach and M. C. Gonzalez; *Lifting properties in operator ranges*, Acta Sci. Math. (Szeged) aceptado.

[8] M. L. Arias, and M. C. Gonzalez; *Reduced solutions of Douglas type equations and angles between subspaces*, J. Math. Anal. Appl. (en prensa).

[9] B. A. Barnes; *The spectral properties of certain linear operators and their extensions.* Proc. Am. Math. Soc. 128 (2000), 1371–1375.

[10] A. Ben-Israel and T. N. E.Greville; *Generalized inverses. Theory and applications.* 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 2003.

[11] R. Bhatia; *Matrix Analysis*. Berlin-Heildelberg-New York, Springer 1997.

[12] D. Buckholtz; *Hilbert space idempotents and involutions.* Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), no. 5, 1415-1418.

[13] S. L. Campbell and C. D. Meyer; *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Dover Publications, Inc., New York, 19991.

[14] P. Casazza and G. Kutyniok; *A generalization of Gram-Schmidt orthogonalization generating all Parseval frames.* Adv. Comput. Math. 27 (2007), 65-78.

[15] O. Christensen; *An introduction to frames and Riesz bases.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[16] P. Cojuhari and A. Gheondea; *On lifting of operators to Hilbert spaces induced by positive seladjoint operators.* J. Math. Anal. Appl. 304 (2005), 584–598.

[17] J.B. Conway; *A course in functional analysis.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[18] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff; *Schur complements and oblique projections.* Acta Sci. Math 67 (2001), 439–459.

[19] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff; *Generalized Schur complements and oblique projections.* Linear Algebra and its Applications 341 (2002), 259–272.

[20] G. Corach, A. L. Maestripieri and D. Stojanoff; *Oblique projections and abstract splines.* Journal of Aproximation Theory, 117, 2 (2002), 189-206

[21] G. Corach, A. Maestripieri and D. Stojanoff; *A classification of projectors.* Topological algebras, their applications and related topics, Banach Center Publications 67, Polish Acad. Sci., Warsaw, (2005), 145–160.

[22] A. Dajic and J. Koliha; *Positive solutions to the equations $AX = C$ and $XB = D$ for Hilbert space operators*. J. Math. Anal. Appl. 333 (2007), 567-576.

[23] F. Deutsch; *The angle between subspaces of a Hilbert space*. Approximation theory, wavelets and applications (S. P. Singh, editor), Kluwer, Netherlands, (1995), 107-130.

[24] J. Dieudonné; *Quasi-hermitian operators.* Proc. Inter. Symp. Linear Algebra, Jerusalem (1961), 115–122.

[25] J. Dixmier; *Étude sur less variétés et le opératerus de Julia avec quelques applications.*Bull. Soc. Math. France, 77 (1949) 11-101.

[26] R. G. Douglas; *On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert spaces.* Proc. Am. Math. Soc. 17 (1966) 413–416.

[27] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer; *A class of non harmonic Fourier series.* Trans. Amer Math. Soc 72 (1952), 341-366.

[28] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer; *Regularization of Inverse Problems.* Kluwer, Dordrecht, 1996.

[29] H. W. Engl and M. Z. Nashed; *New extremal characterizations of generalized inverses of linear operators.* J. Math. Anal. Appl. 82 (1981), 566-586.

[30] P. A. Fillmore and J. P. Williams; *On operator ranges.* Advances in Mathemathics 7 (1971), 254–281.

[31] M. Frank, V. Paulsen and T. Tiballi; *Symmetric Approximation of frames and bases in Hilbert Spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 777-793.

[32] K. Friedrichs; *On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables.* Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 321-364.

[33] I.C. Gohberg and M.G. Krein; *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18 American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969

[34] J. Goldstein and M. Levy; *Linear Algebra and Quantum Chemistry*. The American Mathematical Monthly, Vol.98, (1991), 710-718.

[35] C.W. Groetsch; *Generalized Inverses of Linear Operators: Representation and Approximation*. Dekker, New York, 1977.

[36] F. Hansen and G. K. Pedersen; *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*. Math.Ann. 258 (1981/82), 229-241.

[37] F. Hansen and G. K. Pedersen; *Jensen's operator inequality*. Bull. London Math. Soc. 35 (2003), 553-564.

[38] S. Hassi, Z. Sebestyén and H. S. V. De Snoo; *On the nonnegative of operator products.* Acta Math. Hungar. 109 (2005), 1–14.

[39] I. Ipsen and C. Meyer; *The angle between complementary subspaces*. Amer. Math. Monthly 102 (1995), no. 10, 904-911

[40] T. Kato; *Perturbation theory of linear operators.* Springer, New York, (First edition), 1966.

[41] M. G. Krein; *Compact linear operators on functional spaces with two norms.* Integr. equ. oper. theory 30 (1998), 140-162 (translation from the Ukranian of a paper published in 1937).

[42] R. Landshoff; Z. Phys. 102 (1936), 201.

[43] P. D. Lax; *Symmetrizable linear transformations.* Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 633–647.

[44] V. È. Ljance; *Certain properties of idempotent operators.* (Russian) Teoret. Prikl. Mat. Vyp. 1 1958 16-22.

[45] P. O. Löwdin; *On the nonorthogonality problem*. Adv. Quantum Chem. 5 (1970), 185-199.

[46] A. Maestripieri and F. Martínez Pería; *Decomposition of selfadjoint projections in Krein spaces.* Acta Math (Szeged) 72 (2006) no. 3-4,611-638.

[47] M. Mbekhta; *Résolvant généralisé et théorie spectrale.* Journal of Operator Theory 21, (1989), 69–105.

[48] E. H. Moore; *On the reciprocal of the general algebraic matrix*. Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920), 394-395.

[49] M. Z. Nashed; *Generalized Inverses and Applications*. Academic, New York, 1976.

[50] M. Z. Nashed; *On generalized inverses and operator ranges.* Funct. Anal. and Approx (1980). 85-96.

[51] M. Z. Nashed; *Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces.* Numer. Funct. Anal. Optim. 9 (1987), 261–325.

[52] R. A. Penrose; *A generalized inverse for matrices*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), 406-413.

[53] R. A. Penrose; *On best approximate solutions of linear matrix equations*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956), 17-19.

[54] V. Pták; *Extremal operators and oblique projections.* Casopis P est. Mat. 110 (1985), no. 4, 343-350, 413.

[55] W. T. Reid; *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space.* Duke Math. J. 18, (1951). 41–56

[56] Z. Sebestyén; *On ranges of adjoint operators in Hilbert space.* Acta Sci. Math. 46 (1983), 295–298.

[57] Z. Sebestyén; *Restrictions of positive operators*. Acta Sci. Math. (Szeged) 46 (1983), 299-301.

[58] J. Steinberg; *Oblique projections in Hilbert spaces*. Integral Equations Operator Theory 38 (2000), no. 1, 81–119

[59] D. Szyld; *The many proofs of an identity on the Norm of oblique projections.* Numerical Algorithms 42 (2006), 309–323.

[60] A.C. Zaanen; *Normalisable transformations in Hilbert space and systems of linear equations.* Acta Math. 83 (1950) 197-248.