



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

**Estructura métrica y diferencial del conjunto de operadores  
autoadjuntos en un espacio de Hilbert**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires  
en el área Ciencias Matemáticas

**Guillermina Fongi**

Directora de tesis: Alejandra Maestripieri  
Consejero de estudios: Esteban Andruchow

Lugar de trabajo: Instituto Argentino de Matemática, CONICET.

Buenos Aires, Febrero 2010



---

## Estructura métrica y diferencial del conjunto de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert

**Resumen:** En este trabajo estudiamos aspectos métricos y geométricos del conjunto de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Extendemos la relación de equivalencia definida por A. C. Thompson en un cono convexo de un espacio de Banach, al conjunto de operadores autoadjuntos. Definimos una métrica completa en cada clase de equivalencia o *componente de Thompson*, que resulta compatible con la estructura diferencial de la componente. Estudiamos además la órbita de congruencia de un operador autoadjunto  $a$ . Describimos la órbita de  $a$  en términos de su descomposición polar y de su descomposición positiva ortogonal. Si  $a$  es de rango cerrado, dotamos a la órbita de  $a$  de una estructura de variedad diferencial.

Finalmente, estudiamos descomposiciones de operadores autoadjuntos como diferencia de dos operadores positivos de manera que el ángulo mínimo entre sus rangos sea positivo, que llamamos *descomposiciones positivas*. Mostramos que las descomposiciones positivas de un operador autoadjunto  $a$  están relacionadas con las descomposiciones canónicas del espacio  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  es una métrica indefinida asociada al operador  $a$ . Como aplicación, caracterizamos la órbita de congruencia de  $a$  en términos de sus descomposiciones positivas.

**Palabras claves:** operadores autoadjuntos, métrica de Thompson, geometría diferencial, congruencia de operadores, métrica indefinida.



---

# Metric and differential structure of the set of selfadjoint operators on a Hilbert space

**Abstract:** In this thesis, we study metrical and geometrical aspects of the set of selfadjoint operators on a Hilbert space  $\mathcal{H}$ . We extend the equivalence relation, defined by A.C. Thompson on a closed convex cone of a Banach space, to the set of selfadjoint operators. We define a complete metric on each equivalence class or *Thompson component*, compatible with the differential structure of the component. We also study the orbit of congruence of a selfadjoint operator  $a$ . We describe the orbit of  $a$  in terms of its polar decomposition and its positive orthogonal decomposition. If  $a$  is a closed range operator, we provide the orbit of  $a$  with a structure of differential manifold.

Finally, we study decompositions of selfadjoint operators as a difference of two positive operators such that the minimal angle of their ranges is positive, called *positive decompositions*. We show that the positive decompositions of a selfadjoint operator  $a$  are related to the canonical decompositions of the space  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ , where  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  is an indefinite metric associated to  $a$ . As an application, we characterize the orbit of congruence of  $a$  in terms of its positive decompositions.

**Keywords:** selfadjoint operators, Thompson part metric, differential geometry, congruence of operators, indefinite metric.



# Agradecimientos

Agradezco profundamente a todos los que acompañaron y facilitaron mi trabajo durante estos años, sin su ayuda este trabajo no hubiera sido posible. Quisiera destacar a algunos de ellos.

A Alejandra Maestripieri, por su excelente predisposición a lo largo de estos años, por toda su dedicación, su infinita paciencia, por su calidez y por su generosidad, no sólo al transmitirme sus conocimientos, sino al hacerme saber en todo momento que puedo contar con ella.

A Gustavo Corach, que en tantas oportunidades me brindó su valiosa ayuda.

A Esteban Andruchow, por la gentileza de haber sido mi consejero de estudios.

A los miembros del Instituto Argentino de Matemática, por facilitarme el trabajo y por hacerme sentir tan cómoda. En especial a mis compañeros de tantas horas de seminarios, por tantos mates, por tantas charlas, por su amistad.

A cada uno de mis amigos de la Facultad de Buenos Aires, por todos los momentos compartidos durante estos años, por dejarme ser parte sus vidas.

A mis amigos de Rosario: a los de toda la vida y a los que conocí en la Facultad, con ellos empecé hace tiempo este camino.

A mis primos, “sobrinos”, tíos y abuelos.

A mi mamá y a mi papá, por el apoyo y el amor incondicional, por transmitirme los valores que tengo en la vida.

A Santiago, porque me hace feliz cada día, porque con él todo es mejor, porque con él todo tiene sentido.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>17</b>
1.1. Operadores en espacios de Hilbert . . . . .	17
1.2. Inclusiones de rangos de operadores . . . . .	21
1.3. Pseudoinversa de Moore-Penrose . . . . .	23
1.4. Ángulos entre subespacios cerrados . . . . .	24
1.5. Variedades modeladas en espacios de Banach . . . . .	25
<b>2. Componentes de operadores autoadjuntos</b>	<b>27</b>
2.1. Sobre la estructura de $GL(\mathcal{H})^s$ . . . . .	27
2.2. Componentes de Thompson de operadores positivos . . . . .	30
2.3. Componentes de operadores autoadjuntos . . . . .	33
2.4. Componentes de operadores autoadjuntos de rango cerrado . . . . .	36
2.5. Componentes de Thompson de operadores autoadjuntos . . . . .	38
2.6. Métrica en las componentes de Thompson . . . . .	39
2.7. Estructura diferencial de las componentes de Thompson . . . . .	42
<b>3. La órbita de un operador autoadjunto</b>	<b>55</b>
3.1. Nociones preliminares sobre operadores de rango cerrado . . . . .	55
3.2. Equivalencia de rango de operadores . . . . .	57
3.3. La órbita de un operador autoadjunto . . . . .	58
3.4. La órbita de un operador autoadjunto de rango cerrado . . . . .	65
3.5. Estructura diferencial de la órbita . . . . .	68
3.6. El fibrado $(\mathcal{O}_a, \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha)$ . . . . .	76

---

<b>4. Descomposiciones positivas de operadores autoadjuntos</b>	<b>79</b>
4.1. Dimensión de espacios con producto interno . . . . .	79
4.2. Métrica indefinida asociada a un operador autoadjunto . . . . .	80
4.3. Descomposiciones Positivas . . . . .	83
4.4. Descomposiciones positivas vs. descomposiciones canónicas . . . . .	85
4.5. Congruencia de operadores autoadjuntos . . . . .	90
<b>Bibliografía</b>	<b>94</b>

# Introducción

En 1955, G.D. Mostow [Mos55] introdujo una estructura Riemanniana en el conjunto de matrices cuadradas positivas e inversibles. La métrica, en este caso, es construída a partir de la traza de matrices. A fines de la década del 80, G. Corach, H. Porta y L. Recht iniciaron el estudio de la estructura diferencial de distintas clases de operadores en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Como primer paso se estudiaron aspectos geométricos del conjunto de las proyecciones [PR87b], [PR87a], [CPR90], [CPR93b]. En esa misma dirección, podemos citar también los trabajos [Hol92] y [ACS99]. Varios autores continuaron el estudio de la teoría de operadores desde un punto de vista de la geometría diferencial. En [CPR93c], los autores describen al conjunto de operadores autoadjuntos inversibles, como un espacio homogéneo reductivo del grupo de operadores inversibles, con una conexión canónica y una métrica de Finsler. Probaron que dos operadores inversibles autoadjuntos con la misma parte unitaria en la descomposición polar, pueden ser unidos por una geodésica. Mostraron además que esas geodésicas son cortas con la métrica de Finsler.

En diversos problemas de Física Matemática, aparecen naturalmente los operadores positivos. En particular, A. Uhlman [Uhl93], L. Dabrowski y A. Jadczyk [DJ89], L. Dabrowski y H. Grosse [DG90] han destacado la importancia del estudio de la estructura geométrica de algunos subconjuntos de operadores positivos. Más precisamente, en [Uhl93], Uhlmann estudió la geometría de los operadores de densidad, es decir, operadores positivos en la esfera unitaria de los operadores de traza. El conjunto de operadores inversibles positivos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $GL(\mathcal{H})^+$ , tiene una rica estructura como variedad modelada en espacios de Banach y como espacio homogéneo reductivo de  $GL(\mathcal{H})$ , el grupo de elementos inversibles del álgebra, ver [CPR93a], [Cor94], [Rec99], [Cor98].

El estudio de la estructura geométrica de los operadores positivos continuó en los trabajos [CPR94], [CM99], [CM00], [AV07]. El conjunto de los operadores positivos es un cono cerrado convexo en el espacio de Banach (real) de los operadores autoadjuntos. En

esta clase de conos, se pueden definir distintas métricas, entre ellas la métrica proyectiva de Hilbert, introducida por D. Hilbert [Hil03] en espacios proyectivos y la definida por H. S. Bear [Bea65], para el estudio de partes de Gleason en álgebras uniformes. Esta última métrica coincide con la métrica que introdujo A. C. Thompson [Tho63] y es una modificación de la métrica de Hilbert.

Las métricas de Hilbert y de Thompson son una herramienta útil por ejemplo para probar la existencia de puntos fijos para operadores positivos en espacios de Banach, ver [Bus73], [Bus74], [Dan87], [Nus88], [Nus94] para distintas aplicaciones.

Dado un cono cerrado convexo  $K$  de un espacio de Banach, podemos considerar la siguiente relación de equivalencia: dos elementos de  $K$  son equivalentes si cada uno de ellos es menor o igual que un múltiplo del otro, considerando el orden parcial inducido por  $K$ . Si además el cono es normal, Thompson demostró que cada clase de equivalencia o *componente de Thompson* resulta un espacio métrico completo con la métrica

$$d_T(x, y) = \log \max\{\inf\{r > 0 : x < ry\}, \inf\{s > 0 : y < sx\}\}.$$

En [CM99] y [CM00], G. Corach y A. Maestripieri estudiaron las componentes de Thompson para el caso particular en que  $K$  es el cono de operadores positivos en un espacio de Hilbert. Probaron que cada componente admite una estructura de espacio homogéneo reductivo de un grupo adecuado y que se puede definir una conexión natural en el espacio tangente asociado. Mostraron además que dados dos puntos cualesquiera en la componente, existe una única geodésica que los une. Las estructuras métrica y diferencial de las componentes están relacionadas ya que la distancia geodésica coincide con la métrica de Thompson en cada componente.

Uno de los objetivos de este trabajo consiste en estudiar la estructura diferencial de ciertos subconjuntos de operadores, no necesariamente inversibles, del conjunto  $L(\mathcal{H})^s$  de operadores lineales acotados autoadjuntos de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Comenzamos extendiendo a  $L(\mathcal{H})^s$  la relación de equivalencia definida por Thompson en un cono cerrado convexo. Definimos para ello, tres relaciones de equivalencia en  $L(\mathcal{H})^s$  y estudiamos aspectos geométricos de sus respectivas clases de equivalencia o *componentes*. Una de estas componentes, que llamamos también *componente de Thompson*, resulta homeomorfa al producto de dos componentes de Thompson de operadores positivos. Esta caracterización nos permite dotar a la componente de Thompson de una métrica completa y de una estructura diferencial compatible con la estructura métrica.

En la segunda parte de la tesis, nos centramos en el estudio de la congruencia de operadores autoadjuntos. Dos operadores  $a, b \in L(\mathcal{H})$  son *congruentes* si existe  $g \in GL(\mathcal{H})$

tal que  $b = gag^*$ ; si  $g$  puede elegirse unitario,  $a$  y  $b$  se dicen *unitariamente equivalentes*.

La congruencia define una acción natural del grupo  $GL(\mathcal{H})$  de operadores acotados inversibles sobre  $L(\mathcal{H})^s$ , dada por

$$L : GL(\mathcal{H}) \times L(\mathcal{H})^s \rightarrow L(\mathcal{H})^s, \quad L(g, a) = gag^*.$$

Denotemos con  $\mathcal{O}_a$  a la órbita de  $a \in L(\mathcal{H})^s$  dada por la acción  $L$ , i.e.,

$$\mathcal{O}_a = \{gag^* : g \in GL(\mathcal{H})\}.$$

Observemos que  $L$  es también una acción sobre el cono de operadores positivos,  $L(\mathcal{H})^+$ . La órbita de la identidad es  $GL(\mathcal{H})^+$  y coincide con la componente de Thompson de la identidad. Mostramos que la órbita de congruencia de un operador autoadjunto contiene a su componente de Thompson. Si  $a$  es inversible, la órbita de  $a$  coincide con otra de las componentes definidas en  $L(\mathcal{H})^s$ .

La geometría diferencial de las órbitas fue estudiada por G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff en [CMS04], para el caso de operadores positivos de rango cerrado.

Estudiamos aquí la estructura diferencial de la órbita de un operador autoadjunto de rango cerrado. Probamos que existe una métrica con la cual la órbita resulta una variedad diferencial. Mostramos que el par  $(GL(\mathcal{H}), \mathcal{O}_a)$  es un espacio homogéneo con una conexión asociada. Estudiamos las geodésicas de este espacio y relacionaremos la componente de Thompson de  $a$  con su órbita.

Como antecedente en el estudio de congruencia podemos citar el paper de L.G. Brown, R.G. Douglas y P.A. Fillmore [BDF73], en el cual clasifican las órbitas unitarias y de similaridad en el álgebra de Calkin  $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ , donde  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  es el ideal de operadores compactos en  $\mathcal{H}$ , ver también [CP76]. Otros trabajos que podemos citar sobre congruencia y similaridad son [Pat83], [Cho73], [BM05], [Her90], [AS89], [Had77].

Si  $a$  y  $b$  son positivos, entonces son equivalentes (ver [FW71]):

- $a$  y  $b$  son congruentes,
- los rangos  $R(a)$ ,  $R(b)$  son unitariamente equivalentes (es decir, existe  $u$  unitario tal que  $R(b) = uR(a)$ ),
- $a$  y  $b$  son equivalentes (es decir, existen  $f, g$  inversibles tales que  $b = fag$ ).

Mostramos una extensión de esta caracterización para operadores autoadjuntos. Además obtenemos algunas descripciones de la órbita de un operador autoadjunto, en términos de su descomposición polar. Si  $a$  y  $b$  son operadores autoadjuntos inversibles, mostramos

que  $b$  es congruente con  $a$  si y sólo si las reflexiones de sus descomposiciones polares son unitariamente equivalentes. También probamos que si  $a$  y  $b$  son operadores autoadjuntos de rango cerrado, entonces son congruentes si y sólo si sus isometrías parciales son unitariamente equivalentes. Si  $a$  y  $b$  son operadores autoadjuntos congruentes resulta entonces que sus partes unitarias son unitariamente equivalentes y sus isometrías parciales también. La recíproca no es cierta en general.

Cada operador autoadjunto puede escribirse de manera única como una resta de dos operadores positivos con rangos ortogonales. Si  $a = a_1 - a_2$  es esa descomposición positiva ortogonal de  $a$  y un operador autoadjunto  $b$  es congruente con  $a$ , entonces  $b = ga_1g^* - ga_2g^*$ , para algún  $g \in GL(\mathcal{H})$ . Pero la diferencia de operadores positivos  $ga_1g^* - ga_2g^*$ , no es necesariamente la descomposición positiva ortogonal de  $b$ . Motivados por este hecho, estudiamos descomposiciones de operadores autoadjuntos como diferencia de dos operadores positivos cuyos rangos cumplen cierta condición de ángulo, pero no son necesariamente ortogonales. Llamamos a éstas, *descomposiciones positivas*. Caracterizamos la órbita de congruencia de un operador autoadjunto, en términos de sus descomposiciones positivas. Mostramos que cuando  $a$  es de rango cerrado, el conjunto de descomposiciones positivas de  $a$  está parametrizado por los elementos del grupo de isotropía de  $a$ , es decir, el conjunto  $I_a = \{g \in GL(\mathcal{H}) : gag^* = a\}$ .

Por otro lado, cada operador autoadjunto  $a$  determina el siguiente producto interno indefinido en  $\mathcal{H}$ :

$$\langle x, y \rangle_a = \langle ax, y \rangle, \quad \text{para } x, y \in \mathcal{H}.$$

Si  $a$  es además inversible, entonces  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  es un espacio de Krein. Los espacios de Krein se descomponen como una suma directa  $a$ -ortogonal de un subespacio  $a$ -positivo y un subespacio  $a$ -negativo. Los libros de J. Bognar [Bog74] y de T. Ya. Azizov y I.S. Iokhvidov [AI89] son una referencia clásica para el estudio de estos espacios.

Más generalmente, dado un operador autoadjunto  $a$ , es posible asociar a cada descomposición canónica de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  (en este caso, como una suma de tres subespacios, uno  $a$ -positivo, uno  $a$ -negativo y el núcleo de  $a$ ), una proyección oblicua  $a$ -autoadjunta de rango  $a$ -nonegativo y núcleo  $a$ -noperativo, o equivalentemente, una reflexión  $a$ -positiva.

Mostramos que las descomposiciones positivas de un operador autoadjunto  $a$  están relacionadas con las descomposiciones canónicas del espacio  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ . Probamos que hay una correspondencia biunívoca entre las descomposiciones positivas de  $a$  y las reflexiones  $a$ -positivas, cuando  $a$  es inyectivo.

## Organización de la tesis

Esta tesis se basa principalmente en los trabajos [FM08], [FM09a] y [FM09b]. A continuación damos un breve resumen de cada capítulo.

### Capítulo 1

El objetivo en este capítulo es presentar la notación y algunos resultados que se usarán a lo largo del trabajo. Recordamos algunas descomposiciones de operadores lineales acotados en espacios de Hilbert, el Teorema de factorización de Douglas, las definiciones de ángulo entre subespacios cerrados y de pseudoinversa de Moore-Penrose. También presentamos algunos resultados sobre variedades modeladas en un espacios de Banach.

### Capítulo 2

En este capítulo extendemos la noción de componente de Thompson al conjunto  $L(\mathcal{H})^s$  de operadores autoadjuntos.

Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposiciones polares  $a = |a|u_a = |a|v_a$  y  $b = |b|u_b = |b|v_b$ , donde  $|a| = (a^*a)^{1/2}$ ,  $u_a, u_b$  son reflexiones y  $v_a, v_b$  isometrías parciales. Definimos las siguientes relaciones:

- $a \sim b$ , si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $a \leq_{u_a} \alpha b$  y  $b \leq_{u_b} \beta a$ ; donde, si  $u$  es una reflexión,  $\leq_u$  es el orden inducido por la forma sesquilineal indefinida  $\langle x, y \rangle_u = \langle ux, y \rangle$ ,  $x, y \in \mathcal{H}$ ,
- $a \sim_1 b$ , si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $|a| \leq \alpha|b|$ ,  $|b| \leq \beta|a|$  y  $v_a$  es unitariamente equivalente a  $v_b$ ,
- $a \sim_2 b$ , si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $|a| \leq \alpha|b|$  y  $|b| \leq \beta|a|$ .

Las relaciones anteriores son relaciones de equivalencia que extienden la estudiada para operadores positivos en [CM99], [CM00]. Caracterizamos las respectivas clases de equivalencia,  $C_a, C_a^{(1)}, C_a^{(2)}$  y vemos que  $C_a \subseteq C_a^{(1)} \subseteq C_a^{(2)}$ . Si el rango de  $a$  es cerrado, entonces  $C_a^{(1)}$  resulta homeomorfa a la órbita de congruencia de un operador autoadjunto inversible y la componente  $C_a^{(2)}$  es homeomorfa al conjunto de operadores inversibles autoadjuntos que actúan en el rango de  $a$ . La componente  $C_a$  es homeomorfa a un producto de componentes de Thompson de operadores positivos, más precisamente a  $C_{a_1} \times C_{a_2}$ , donde  $a = a_1 - a_2$  es la descomposición positiva ortogonal de  $a$ ; es decir  $a_1 = \frac{|a|+a}{2}$  y  $a_2 = \frac{|a|-a}{2}$ . Esto permitió definir la siguiente métrica en cada componente  $C_a$ : dados  $b, c \in C_a$

$$d_T(b, c) = \max\{d(b_i, c_i), i = 1, 2\},$$

donde  $d$  es la métrica de Thompson definida en el cono de operadores positivos y  $b = b_1 - b_2$  y  $c = c_1 - c_2$  son las descomposiciones positivas ortogonales de  $b$  y  $c$  respectivamente. Además estudiamos la estructura diferencial de  $C_a$  para el caso en que  $a$  es un operador autoadjunto de rango cerrado. La componente  $C_a$  admite una estructura natural de espacio homogéneo y es posible definir una conexión natural en  $C_a$ , que induce el concepto de transporte paralelo a lo largo de una curva. Una curva  $\gamma \subset C_a$  es geodésica si  $\dot{\gamma}$  satisface  $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma}\dot{\gamma}^\dagger\dot{\gamma}$ . Se probó que dados  $b, c \in C_a$  hay una única geodésica  $\gamma_{b,c}$  en  $C_a$  que los une. Es posible definir en el fibrado tangente  $TC_a$  una estructura de Finsler y esto nos permite dar la noción de la longitud,  $L(\gamma)$ , de una curva  $\gamma$ . Resulta que la geodésica  $\gamma_{b,c}$  tiene longitud mínima entre todas las curvas que unen  $b$  con  $c$ . Además, la estructura métrica de  $(C_a, d_T)$  está relacionada con una estructura diferencial. Si

$$d(b, c) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ curva en } C_a \text{ que une } b \text{ con } c\}$$

es la distancia geodésica, vale que

$$d_T(b, c) = d(b, c) = L(\gamma_{b,c}).$$

### Capítulo 3

Este capítulo está dedicado a estudiar la órbita de congruencia de un operador autoadjunto. Comenzamos el capítulo con un breve resumen de congruencia y equivalencia de operadores. Dos operadores positivos son congruentes si y sólo si sus rangos son unitariamente equivalentes. Mostramos que la órbita de un operador positivo puede escribirse como una unión de algunas componentes de Thompson, más precisamente,  $\mathcal{O}_a = \bigcup_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})} C_{uau^*}$ , donde  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  es el subgrupo de  $GL(\mathcal{H})$  de operadores unitarios. Más aún, si  $a$  es un operador autoadjunto, resulta que  $C_a$  es un subconjunto de  $\mathcal{O}_a$ .

Por otro lado, la órbita de un operador autoadjunto  $a$  está relacionada con las órbitas de su parte positiva y de su parte negativa: si  $a = a_1 - a_2$  y  $b = b_1 - b_2$  son las descomposiciones positivas ortogonales de  $a$  y  $b$  respectivamente, probamos que si  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ ,  $i = 1, 2$ , y los núcleos de  $a$  y  $b$  tienen la misma dimensión, entonces  $b \in \mathcal{O}_a$ . Recíprocamente, si  $a = v_a|a|$  y  $b = v_b|b|$  son las descomposiciones polares de  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$ , mostramos que si  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces existe un operador unitario  $u$  tal que  $v_b = uv_a u^*$ . Más aún, esta condición también es necesaria cuando  $a$  tiene rango cerrado. En efecto, en este caso, la órbita de  $a$  está caracterizada por la dimensión del núcleo de  $a$  y las dimensiones de los rangos de  $a_1$  y  $a_2$ .

Finalmente, estudiamos la estructura diferencial de la órbita de un operador autoadjunto  $a$  de rango cerrado. Consideremos las aplicaciones:

$$\pi_a : GL(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}_a, \quad \pi_a(g) = gag^* \quad \text{y} \quad \alpha : \mathcal{O}_a \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \quad \alpha(b) = v_b.$$

La fibra de  $v_a$  por la aplicación  $\alpha$  resulta ser la componente de Thompson de  $a$ ; i.e.  $\alpha^{-1}(\{v_a\}) = C_a$ . La aplicación  $\alpha$  no es necesariamente continua y que  $\pi_a$  no tiene necesariamente secciones locales, considerando la topología inducida por la norma de operadores. Trabajaremos entonces con la siguiente métrica en la órbita de  $a$ :

$$d(b, c) = (\|b - c\|^2 + \|p_b - p_c\|^2)^{1/2},$$

para  $b, c \in \mathcal{O}_a$ , donde  $p_b$  y  $p_c$  son la proyecciones ortogonales sobre los rangos de  $b$  y  $c$ , respectivamente. Esta métrica fue introducida en el conjunto de operadores de rango cerrado por Corach, Maestripieri y Mbekhta en [CMM09]. Entre otras cosas, probaron la continuidad de la aplicación  $a \rightarrow a^\dagger$ , si en el dominio se considera la topología dada por la métrica  $d$  y en el codominio la topología de la norma ( $a^\dagger$  denota la pseudoinversa de Moore-Penrose de  $a$ ).

Mostramos que  $\alpha : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \|\cdot\|)$ ,  $\alpha(b) = v_b$  es continua y que la aplicación  $\pi_a : (GL(\mathcal{H}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{O}_a, d)$ ,  $\pi_a(g) = gag^*$  es continua y admite secciones locales.

Con esta nueva topología,  $(\mathcal{O}_a, d)$  tiene una estructura de variedad diferencial; más aún  $(GL(\mathcal{H}), \mathcal{O}_a, \pi_a)$  es un fibrado principal con grupo estructural  $I_a$ , donde  $I_a$  es el grupo de *isotropía* de  $a$  por la acción  $L$ , i.e.  $I_a = \{g \in GL(\mathcal{H}) : gag^* = a\}$ . Esta estructura es compatible con la estructura de espacio homogéneo de las componentes de Thompson involucradas, pues la métrica  $d$  coincide con la métrica usual en cada componente.

Veremos también que  $(\mathcal{O}_a, \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha)$  es un fibrado, donde  $\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$  es la órbita unitaria de  $v_a$ .

## Capítulo 4

El objetivo del último capítulo de la tesis es estudiar descomposiciones de operadores autoadjuntos como diferencia de dos operadores positivos de manera que el ángulo mínimo entre sus rangos sea positivo. A estas descomposiciones las llamamos *descomposiciones positivas*. En particular, la descomposición positiva ortogonal es una de estas descomposiciones. Si  $a$  es un operador positivo, entonces  $a$  no tiene descomposiciones positivas no triviales.

Por otro lado, dado un operador autoadjunto  $a$ , consideramos en  $\mathcal{H}$  el siguiente producto interno indefinido:

$$\langle x, y \rangle_a = \langle ax, y \rangle, \quad \text{para } x, y \in \mathcal{H}.$$

Si  $a$  es positivo, denotamos con  $\mathcal{H}_a$  a la completación de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ . Caracterizamos los operadores en  $L(\mathcal{H})$  que admiten extensión acotada a  $\mathcal{H}_a$ . Se llama *descomposición canónica* de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  a

$$\mathcal{H} = \mathcal{S}^+ \oplus_a \mathcal{S}^- \oplus_a N(a),$$

donde  $\oplus_a$  denota que la suma es  $a$ -ortogonal,  $\mathcal{S}^+$  es un subespacio  $a$ -positivo,  $\mathcal{S}^-$  un subespacio  $a$ -negativo y  $N(a)$  es el núcleo de  $a$ .

Relacionamos las descomposiciones positivas de  $a$  con las descomposiciones canónicas del espacio con métrica indefinida  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ . Más precisamente, mostramos que, dada una descomposición positiva de  $a$ , hay una reflexión  $a$ -positiva asociada. Recíprocamente, una reflexión  $a$ -positiva determina una descomposición positiva de  $a$ . También probamos que, si  $a$  es inyectivo, hay una biyección entre las descomposiciones positivas de  $a$  y el conjunto de proyecciones  $a$ -autoadjuntas con rango  $a$ -positivo y núcleo  $a$ -negativo.

Además, probamos que cada descomposición positiva de  $a$  induce una “pseudo descomposición polar” de  $a$ , es decir, una factorización de  $a$  como  $a = \alpha w$ , donde  $\alpha$  es positivo y  $w$  es una reflexión  $a$ -positiva. Si  $w$  es una reflexión  $a$ -positiva, entonces  $w$  es de la forma  $w = u_a d$ , donde  $d$  es  $|a|$ -positivo y  $a = u_a |a|$  es la descomposición polar de  $a$ . En efecto, ésta resulta la descomposición polar de  $w$  en el espacio  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$ .

Finalmente, si  $a$  es inyectivo, mostramos que los subespacios  $a$ -positivos asociados a dos descomposiciones canónicas de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ , tienen igual dimensión. Lo mismo ocurre para los subespacios  $a$ -negativos. Como aplicación, caracterizamos la órbita de congruencia de un operador autoadjunto  $a$ . Recordemos que dos operadores positivos son congruentes si y sólo si sus rangos son unitariamente equivalentes. Generalizamos este hecho para operadores autoadjuntos, en término de sus descomposiciones positivas. Además, notemos que si  $a = a_1 - a_2$  es una descomposición positiva de  $a$  y  $g \in I_a$  (i.e.,  $gag^* = a$ ), entonces  $a = ga_1 g^* - ga_2 g^*$  es una descomposición positiva de  $a$ . Probamos que todas las descomposiciones positivas de  $a$  pueden escribirse de la forma  $a = ga_1 g^* - ga_2 g^*$ , para algún  $g \in I_a$ , cuando  $a$  tiene rango cerrado.

# Introduction

In 1955, G.D. Mostow [Mos55] endowed the set of positive invertible square matrices with a structure Riemannian manifold. The metric, in this case, is constructed from the matrix trace. At the end of the eighties, G. Corach, H. Porta and L. Recht initiated the study of the differential structure of different classes of operators on infinite dimensional Hilbert spaces. Firstly, they studied geometric aspects of the set of projections [PR87b], [PR87a], [CPR90], [CPR93b]. In the same direction, we should also mention the papers [Hol92] and [ACS99]. Several authors continued the study of the theory of operators from a differential viewpoint. In [CPR93c], the authors described the set of invertible selfadjoint operators as a homogeneous reductive space of the group of invertible operators, with a canonical connection and a Finsler metric. They proved that any pair of invertible selfadjoint operators with the same unitary part in the polar decomposition, can be joined by a geodesic. They also showed that these geodesics are short if measured with the Finsler metric.

Positive operators arise naturally in different problems of Mathematical Physics. In particular, A. Uhlman [Uhl93], L. Dabrowski and A. Jadczyk [DJ89], L. Dabrowski and H. Grosse [DG90] have emphasized the relevance of the study of the geometric structure of some parts of the set of positive operators. More precisely, in [Uhl93], Uhlmann studied the geometry of density operators, that is, positive operators in the unit sphere of the space of trace class operators. The set of positive invertible operators on a Hilbert space  $\mathcal{H}$ ,  $GL(\mathcal{H})^+$ , has a rich structure as a manifold modeled on a Banach space and as a reductive homogeneous space of  $GL(\mathcal{H})$ , the group of invertible elements of the algebra, see [CPR93a], [Cor94], [Rec99], [Cor98].

The study of the geometric structure of the set of positive operators continued with the papers [CPR94], [CM99], [CM00], [AV07]. The set of positive operators is a closed convex cone in the (real) Banach space of selfadjoint operators. Different metrics can be defined in closed convex cones, including the Hilbert's projective metric or part metric,

introduced by D. Hilbert [Hil03] on projective spaces and the one defined by H. S. Bear [Bea65], for the study of Gleason parts in uniform algebras. This last metric coincide with the metric introduced by A. C. Thompson [Tho63] and it is a modification of the Hilbert metric.

The Hilbert metric and the Thompson metric are useful tools, for example, to prove the existence of fixed points for positive operators on Banach spaces, see [Bus73], [Bus74], [Dan87], [Nus88], [Nus94] for several applications.

Given a closed convex cone  $K$  of a Banach space, the following equivalence relationship can be considered: two elements of  $K$  are equivalent if each one is less or equal than a multiple of the other, considering the partial order induced by the cone. Moreover, if  $K$  is a normal cone, Thompson proved that each equivalent class or *Thompson's component* is a complete metric space with the metric

$$d_T(x, y) = \log \max\{\inf\{r > 0 : x < ry\}, \inf\{s > 0 : y < sx\}\}.$$

In [CM99] and [CM00], G. Corach and A. Maestripieri studied the Thompson's components for the case  $K$  is the cone of positive operators on a Hilbert space. They showed that each component admits a homogeneous reductive structure of an adequate group and they proved that a natural connection can be defined on the associated tangent bundle. They also showed that for any two points on a component, there exists a unique geodesic joining them. The metric and differential structure of the components are related since the geodesic distance coincide with the Thompson metric on each component.

One of the purposes of this thesis is to study the differential structure of certain subsets of operators of the set  $L(\mathcal{H})^s$  of linear bounded selfadjoint, not necessarily invertible, operators on a Hilbert space  $\mathcal{H}$ .

We begin extending to  $L(\mathcal{H})^s$  the equivalence relationship which was defined by Thompson on a closed convex cone.

In order to do that, we define three equivalence relationships on  $L(\mathcal{H})^s$  and study the geometric aspects of their respective equivalence classes or *components*. One of these components, which we call *Thompson component*, turns to be homeomorphic to the product of two Thompson components of positive operators. This characterization allows us to provide the Thompson component with a complete metric and a differential structure compatible with this metric.

In the second part of the thesis, we focus on the study of the congruence of selfadjoint operators. Two operators  $a, b \in L(\mathcal{H})$  are *congruent* if there exists  $g \in GL(\mathcal{H})$  such that  $b = gag^*$ ; if  $g$  can be taken to be unitary, then  $a$  y  $b$  are called *unitarily equivalent*.

The congruence defines a natural action of the group  $GL(\mathcal{H})$  of bounded invertible operators over  $L(\mathcal{H})^s$ , given by

$$L : GL(\mathcal{H}) \times L(\mathcal{H})^s \rightarrow L(\mathcal{H})^s, \quad L(g, a) = gag^*.$$

Denote by  $\mathcal{O}_a$  the orbit of  $a \in L(\mathcal{H})^s$  given by the action  $L$ , i.e.,

$$\mathcal{O}_a = \{gag^* : g \in GL(\mathcal{H})\}.$$

Note that  $L$  is also an action over the cone of positive operators,  $L(\mathcal{H})^+$ . The orbit of the identity is  $GL(\mathcal{H})^+$  and coincide with the Thompson component of the identity. We show that the orbit of congruence of a selfadjoint operator contains its Thompson component. If  $a$  is invertible, the orbit of  $a$  coincides with one of the previously defined components on  $L(\mathcal{H})^s$ .

The differential geometry of the orbit has been studied by G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff in [CMS04], for the case of positive operators of closed range.

In this thesis we deal with the differential structure of the orbit of a closed range selfadjoint operator. We prove that the orbit of a closed range selfadjoint operator is a manifold with an adequate metric. Moreover, the pair  $(GL(\mathcal{H}), \mathcal{O}_a)$  is an homogeneous space with an associated connection. We study the geodesics in this space and relate the Thompson component of  $a$  with its orbit of congruence.

As a precedent in the study of congruence we can mention the paper of L.G. Brown, R.G. Douglas and P.A. Fillmore [BDF73], where they classify the unitary orbits and the similarity orbits of the Calkin algebra  $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ , where  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  is the ideal of compact operators on  $\mathcal{H}$ , see also [CP76]. Other papers we can cite about congruence and similarity are [Pat83], [Cho73], [BM05], [Her90], [AS89], [Had77].

If  $a$  and  $b$  are positive, then following statements are equivalent (see [FW71]):

- $a$  and  $b$  are congruent,
- the ranges  $R(a), R(b)$  are unitarily equivalent (that is, there exists a unitary operator  $u$  such that  $R(b) = uR(a)$ ),
- $a$  and  $b$  are equivalent (that is, there exist invertible operators  $f, g$  such that  $b = fag$ ).

We show an extension of this characterization for selfadjoint operators. Also we obtain descriptions of the orbit of a selfadjoint operator, in terms of its polar decomposition. If  $a$  and  $b$  are invertible selfadjoint operators, we prove that  $b$  is congruent with  $a$  if and only if the reflections of their polar decompositions are unitarily equivalent. Moreover, if  $a$  and  $b$

are selfadjoint closed range operators, then they are congruent if and only if their partial isometries are unitarily equivalent. If  $a$  and  $b$  are congruent selfadjoint operators then their unitary parts are unitarily equivalent and their partial isometries too. The converse is not true in general.

Each selfadjoint operator can be written in a unique way as a difference of two positive operators with orthogonal ranges. If  $a = a_1 - a_2$  is this positive orthogonal decomposition of  $a$  and  $b$  is a selfadjoint operator congruent to  $a$ , then  $b = ga_1g^* - ga_2g^*$ , for some  $g \in GL(\mathcal{H})$ . But the difference of positive operators  $ga_1g^* - ga_2g^*$ , is not necessarily the positive orthogonal decomposition of  $b$ . Motivated by this fact, we study decompositions of selfadjoint operators as a difference of two positive operators whose ranges satisfy an angle condition, but are not necessarily orthogonal. These decompositions will be called *positive decompositions*. We characterize the orbit of congruence of a selfadjoint operator, in terms of its positive decompositions. When  $a$  is a closed range operator, we show that the set of positive decompositions of  $a$  is parametrized by the elements of the isotropy group of  $a$ , that is, the set  $I_a = \{g \in GL(\mathcal{H}) : gag^* = a\}$ .

On the other hand, each selfadjoint operator  $a$  determines the following indefinite inner product on  $\mathcal{H}$ :

$$\langle x, y \rangle_a = \langle ax, y \rangle, \quad \text{for } x, y \in \mathcal{H}.$$

If  $a$  is also invertible, then  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  is a Krein space. Krein spaces can be decomposed as an  $a$ -orthogonal direct sum of an  $a$ -positive subspace and an  $a$ -negative subspace. The books by J. Bognar [Bog74] and by T. Ya. Azizov and I.S. Iokhvidov [AI89] are a classical references for the study of such spaces.

More generally, for any selfadjoint operator  $a \in L(\mathcal{H})$ , it is possible to associate to every canonical decomposition of  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  (in this case, as the sum of three subspaces, an  $a$ -positive, an  $a$ -negative and the nullspace of  $a$ ), an  $a$ -selfadjoint oblique projection with  $a$ -nonnegative range and  $a$ -nonpositive nullspace, or equivalently, an  $a$ -positive reflection. We study the relationship between the positive decompositions of  $a$  and the canonical decompositions of the indefinite inner product space  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ . We prove that there is a one to one correspondence between the positive decompositions of  $a$  and the  $a$ -positive reflections, when  $a$  is injective.

## Thesis organization

This thesis is mostly based on the papers [FM08], [FM09a] and [FM09b]. The outline of the thesis is as follows.

## Chapter 1

The aim of this chapter is to present the notation and some of the preliminary results that will be used along this thesis. We recall some decompositions of linear bounded operators on Hilbert spaces, the factorization theorem of Douglas, the definitions of angles between closed subspaces and the Moore-Penrose pseudoinverse. Also we present a brief summary of the theory of manifolds modeled on Banach spaces.

## Chapter 2

In this chapter we extend the notion of Thompson components to the set  $L(\mathcal{H})^s$  of selfadjoint operators.

Consider  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  with polar decomposition  $a = |a|u_a = |a|v_a$  and  $b = |b|u_b = |b|v_b$ , where  $|a| = (a^*a)^{1/2}$ ,  $u_a, u_b$  are reflections and  $v_a, v_b$  are partial isometries. We define the following relationships:

- $a \sim b$ , if there exist  $\alpha, \beta > 0$  such that  $a \leq_{u_a} \alpha b$  and  $b \leq_{u_b} \beta b$ ; where, if  $u$  is a reflection,  $\leq_u$  is the order induced by the sequilinear indefinite form  $\langle x, y \rangle_u = \langle ux, y \rangle$ ,  $x, y \in \mathcal{H}$ ,
- $a \sim_1 b$ , if there exist  $\alpha, \beta > 0$  such that  $|a| \leq \alpha|b|$ ,  $|b| \leq \beta|a|$  and  $v_a$  is unitarily equivalent to  $v_b$ ,
- $a \sim_2 b$ , if there exist  $\alpha, \beta > 0$  such that  $|a| \leq \alpha|b|$  and  $|b| \leq \beta|a|$ .

The above relationships are equivalence relations that extend the studied for positive operators in [CM99], [CM00]. We characterize their equivalence classes,  $C_a$ ,  $C_a^{(1)}$ ,  $C_a^{(2)}$  and we show that  $C_a \subseteq C_a^{(1)} \subseteq C_a^{(2)}$ . If  $a$  is a closed range operator, then  $C_a^{(1)}$  is homeomorphic to the orbit of congruence of a selfadjoint invertible operator and the component  $C_a^{(2)}$  is homeomorphic to the set of selfadjoint invertible operators acting on the range of  $a$ . The component  $C_a$  is homeomorphic to the product of Thompson components of positive operators, more precisely to  $C_{a_1} \times C_{a_2}$ , where  $a = a_1 - a_2$  is the positive orthogonal decomposition of  $a$ ; i.e.  $a_1 = \frac{|a|+a}{2}$  and  $a_2 = \frac{|a|-a}{2}$ . This fact allows us to define the following metric on each component  $C_a$ : given  $b, c \in C_a$

$$d_T(b, c) = \max\{d(b_i, c_i), i = 1, 2\},$$

where  $d$  is the Thompson metric defined in the cone of positive operators and  $b = b_1 - b_2$  and  $c = c_1 - c_2$  are the positive orthogonal decompositions of  $b$  and  $c$  respectively. Also we study the differential structure of  $C_a$ , when  $a$  is a closed range selfadjoint operator.

The component  $C_a$  admits a natural structure of an homogeneous space of an adequate group and it is possible to define a natural connection on  $C_a$ , which induces the concept of parallel transport along a curve. A curve  $\gamma \subset C_a$  is a geodesic if  $\dot{\gamma} \ddot{\gamma} = \dot{\gamma} \gamma^\dagger \dot{\gamma}$ . Given  $b, c \in C_a$  there is a unique geodesic  $\gamma_{b,c}$  on  $C_a$  joining them. It is possible to define a Finsler structure on the tangent bundle  $TC_a$  and this allows us to give the notion of length,  $L(\gamma)$ , of a curve  $\gamma$ . It follows that the geodesic  $\gamma_{b,c}$  has minimal length between the curves joining  $b$  and  $c$ . Also, the metric structure of  $(C_a, d_T)$  is related with the differential structure. If

$$d(b, c) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ curve in } C_a \text{ joining } b \text{ with } c\}$$

is the geodesic distance, it holds that

$$d_T(b, c) = d(b, c) = L(\gamma_{b,c}).$$

### Chapter 3

This chapter is dedicated to the study of the orbit of congruence of a selfadjoint operator. We begin this chapter with a brief survey of congruence and equivalence of operators. Two positive operators are congruent if and only if their ranges are unitarily equivalent. We show that the orbit of a positive positive operator can be written as a union of certain Thompson components, more precisely,  $\mathcal{O}_a = \bigcup_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})} C_{uau^*}$ , where  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  is the subgroup of  $GL(\mathcal{H})$  of unitary operators. Moreover, if  $a$  is a selfadjoint operator, it holds that  $C_a$  is contained in  $\mathcal{O}_a$ .

On the other hand, the orbit of a selfadjoint operator  $a$  may be related to the orbits of its positive and negative parts: if  $a = a_1 - a_2$  and  $b = b_1 - b_2$  are the positive orthogonal decompositions of  $a$  and  $b$  respectively, we prove that if  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ ,  $i = 1, 2$ , and the nullspaces of  $a$  and  $b$  have the same dimension, then  $b \in \mathcal{O}_a$ . Conversely, if  $a = v_a|a|$  and  $b = v_b|b|$  are the polar decompositions of  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$ , we show that if  $b \in \mathcal{O}_a$  then there exists a unitary operator  $u$  such that  $v_b = uv_a u^*$ . Moreover, this condition is also necessary when  $a$  has closed range. In fact, in this case, the orbit of  $a$  is characterized by the dimension of the nullspace of  $a$  and the dimensions of the ranges of  $a_1$  and  $a_2$ .

Finally, we study the differential structure of the orbit of a closed range selfadjoint operator  $a$ . Consider the maps:

$$\pi_a : GL(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}_a, \pi_a(g) = gag^* \text{ and } \alpha : \mathcal{O}_a \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha(b) = v_b.$$

We show that the fiber of  $v_a$  by the map  $\alpha$  coincides with the Thompson component of  $a$ ; i.e.  $\alpha^{-1}(\{v_a\}) = C_a$ . The map  $\alpha$  is not necessarily continuous and the map  $\pi_a$  does

not necessarily has local cross sections, considering the topology induced by the operator norm. Therefore we will consider the following metric on the orbit of  $a$ :

$$d(b, c) = (\|b - c\|^2 + \|p_b - p_c\|^2)^{1/2},$$

for  $b, c \in \mathcal{O}_a$ , where  $p_b$  and  $p_c$  are the orthogonal projections onto the ranges of  $b$  and  $c$ , respectively. This metric was introduced on the set of closed range operators by Corach, Maestripieri and Mbekhta in [CMM09]. They showed, for example, the continuity of the map  $a \rightarrow a^\dagger$ , when the topology given by the metric  $d$  is considered in the domain and the operator norm topology is considered in the codomain ( $a^\dagger$  denotes the Moore-Penrose pseudoinverse of  $a$ ).

We show that  $\alpha : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \|\cdot\|)$ ,  $\alpha(b) = v_b$  is continuous and that  $\pi_a : (GL(\mathcal{H}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{O}_a, d)$ ,  $\pi_a(g) = gag^*$  is continuous and admits local cross sections. With the topology given by this metric,  $\mathcal{O}_a$  has a structure of differential manifold; moreover  $(GL(\mathcal{H}), \mathcal{O}_a, \pi_a)$  is a principal fiber bundle with structural group  $I_a$ , where  $I_a$  is the *isotropy* group of  $a$  given by the action  $L$ , i.e.  $I_a = \{g \in GL(\mathcal{H}) : gag^* = a\}$ . This structure is compatible with the structure of homogeneous space of the involved Thompson components, since the metric  $d$  coincide with the usual metric on each component. Also, we show that  $(\mathcal{O}_a, \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha)$  is a fiber bundle, where  $\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$  is the unitary orbit of  $v_a$ .

## Chapter 4

The last chapter of this thesis aims to explore decompositions of selfadjoint operators as a difference of two positive operators, such that the minimal angle between their ranges is positive. These decompositions will be called *positive decompositions*. In particular, the positive orthogonal decomposition is one of such decompositions. If  $a$  is a positive operator, then it has no non-trivial positive decompositions.

On the other hand, given a selfadjoint operator  $a$ , consider in  $\mathcal{H}$  the following indefinite inner product:

$$\langle x, y \rangle_a = \langle ax, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

If  $a$  is positive, denote by  $\mathcal{H}_a$  the completion of  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ . We give a characterization of the operators of  $L(\mathcal{H})$  that admit bounded extension to  $\mathcal{H}_a$ . A *canonical decomposition* of  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  is

$$\mathcal{H} = \mathcal{S}^+ \oplus_a \mathcal{S}^- \oplus_a N(a),$$

where  $\oplus_a$  denotes that the sum is  $a$ -orthogonal,  $\mathcal{S}^+$  is an  $a$ -positive subspace,  $\mathcal{S}^-$  an  $a$ -negative subspace and  $N(a)$  is the nullspace of  $a$ .

The positive decompositions of  $a$  are related to the canonical decompositions of the space with indefinite metric  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ . More precisely, we show that for each positive decomposition of  $a$ , there exists an associated  $a$ -positive reflection. Conversely, an  $a$ -positive reflection determines a positive decomposition of  $a$ . Also, if  $a$  is injective we show that there is a bijection between the positive decompositions of  $a$  and the set of  $a$ -selfadjoint projections with  $a$ -positive range and  $a$ -negative nullspace.

Moreover, we prove that each positive decomposition of  $a$  induces a “pseudo-polar decomposition” of  $a$ ; that is, a factorization of  $a$  as  $a = \alpha w$ , where  $\alpha$  is positive and  $w$  is an  $a$ -positive reflection. If  $w$  is an  $a$ -positive reflection, then  $w$  can be written as  $w = u_a d$ , where  $d$  is  $|a|$ -positive and  $a = u_a |a|$  is the polar decomposition of  $a$ . In fact, this decomposition is the polar decomposition of  $w$  in the space  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$ .

Finally, if  $a$  is injective, it can be proved that the  $a$ -positive subspaces associated to any two canonical decompositions of  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  have the same dimension. The same holds for the  $a$ -negative subspaces. As an application, we characterize the orbit of congruence of a selfadjoint operator  $a$ . Recall that two positive operators are congruent if and only if their ranges are unitarily equivalent. We prove an extension of this result for selfadjoint operators, in terms of their positive decompositions. Furthermore, note that if  $a = a_1 - a_2$  is a positive decomposition of  $a$  and  $g \in I_a$  (i.e.,  $gag^* = a$ ), then  $a = ga_1 g^* - ga_2 g^*$  is a positive decomposition of  $a$ . If  $a$  has closed range, we show that every positive decomposition of  $a$  can be written as  $a = ga_1 g^* - ga_2 g^*$ , for some  $g \in I_a$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Operadores en espacios de Hilbert

A continuación damos algunas notaciones que utilizaremos en este trabajo. A lo largo de esta tesis  $\mathcal{H}$  denotará un espacio de Hilbert complejo separable, con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sea  $L(\mathcal{H})$  el álgebra de operadores lineales acotados en  $\mathcal{H}$ .

Denotemos con  $L(\mathcal{H})^s$  al subespacio real de operadores autoadjuntos de  $L(\mathcal{H})$ , con  $L(\mathcal{H})^+$  al cono de operadores positivos de  $L(\mathcal{H})$  y con  $CR(\mathcal{H})$  al subconjunto de  $L(\mathcal{H})$  de operadores de rango cerrado.

Notamos con  $\mathcal{I}$  el subconjunto de  $CR(\mathcal{H})$  de isometrías parciales, i.e.,  $\mathcal{I} = \{v \in L(\mathcal{H}) : vv^* \text{ es una proyección ortogonal}\}$ . Si  $GL(\mathcal{H})$  es el grupo de operadores inversibles de  $L(\mathcal{H})$  y  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  el subgrupo de  $GL(\mathcal{H})$  de operadores unitarios. Si  $\mathcal{A} \subseteq L(\mathcal{H})$ , notaremos  $\mathcal{A}^s = \mathcal{A} \cap L(\mathcal{H})^s$ .

Un operador  $v \in L(\mathcal{H})$  es una *reflexión* si  $v = v^{-1}$  y  $v$  es una *simetría* si es una reflexión autoadjunta. El conjunto de simetrías será denotado con  $\mathcal{P}$ , i.e.,  $\mathcal{P} = \{v \in L(\mathcal{H}) : v = v^{-1} = v^*\}$ .

Dados dos subespacios cerrados  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{H}$ , entonces  $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{N}$  denotará la suma directa  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ , y  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$  la suma ortogonal. Si  $\mathcal{M} \dot{+} \mathcal{N} = \mathcal{H}$ , denotaremos con  $p_{\mathcal{M}/\mathcal{N}}$  a la proyección oblicua con rango  $\mathcal{M}$  y núcleo  $\mathcal{N}$  y  $p_{\mathcal{M}} = p_{\mathcal{M}/\mathcal{M}^\perp}$ . Sea  $\mathcal{Q} = \{q \in L(\mathcal{H}), q^2 = q\}$  el conjunto de proyecciones oblicuas.

Para todo  $a \in L(\mathcal{H})$ ,  $R(a)$  denotará el rango de  $a$ ,  $N(a)$  su núcleo y  $p_a = p_{\overline{R(a)}}$ .

El cono de operadores positivos induce en  $L(\mathcal{H})$  el siguiente orden: sean  $a, b \in L(\mathcal{H})$ , entonces  $a \leq b$  si y sólo si  $b - a \in L(\mathcal{H})^+$ .

## Descomposición matricial

Sean  $a \in L(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  y  $p = p_{\mathcal{S}}$  la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}$ . Entonces  $p$  induce la siguiente descomposición matricial de  $a$ :

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $a_{11} = pap|_{\mathcal{S}} \in L(\mathcal{S})$ ,  $a_{12} = pa(1-p)|_{\mathcal{S}^\perp} \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S})$ ,  $a_{21} = (1-p)ap|_{\mathcal{S}} \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$  y  $a_{22} = (1-p)a(1-p)|_{\mathcal{S}^\perp} \in L(\mathcal{S}^\perp)$ .

**Observación 1.1.1.** Consideremos  $a \in GL(\mathcal{S})^+$ ,  $b \in GL(\mathcal{S}^\perp)^+$ , entonces

$$\log \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log a & 0 \\ 0 & \log b \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,  $\log(ap + b(1-p)) = (\log a)p + (\log b)(1-p)$ . En efecto, ya que  $p$  y  $a$  conmutan entonces  $p$  conmuta con  $\log a$ . De manera análoga,  $\log b$  conmuta con  $1-p$ . Por lo tanto  $(\log a)p$  y  $\log b(1-p)$  conmutan. Luego  $e^{(\log a)p + (\log b)(1-p)} = e^{p \log a} e^{(1-p) \log b}$ .

Como  $\log a$  y  $p$  conmutan entonces

$$e^{p \log a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p \log a)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} p = e^{\log a} p + 1 - p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Análogamente, } e^{(1-p) \log b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \text{ Entonces, } e^{\begin{pmatrix} \log a & 0 \\ 0 & \log b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

**Observación 1.1.2.** Sean  $a \in L(\mathcal{S})$ ,  $b \in L(\mathcal{S}^\perp)$ , entonces

$$\left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}.$$

En efecto, consideremos  $x \in \mathcal{S}$  tal que  $\|x\| = 1$  entonces

$$\left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} x \right\| = \|(pap + (1-p)b(1-p))x\| = \|ax\|,$$

con lo cual  $\|ax\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\|$ . Por lo tanto  $\|a\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\|$ . Análogamente, se tiene que  $\|b\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\|$ . Entonces  $\left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\| \geq \max\{\|a\|, \|b\|\}$ . Por otro lado, consideremos

$x \in \mathcal{H}$  tal que  $\|x\| = 1$ . Luego

$$\left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} x \right\|^2 = \|apx + b(1-p)x\|^2 \leq \max\{\|a\|^2, \|b\|^2\}\|x\|^2,$$

con lo cual  $\left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\}$ .

### Descomposición polar

Recordemos que cada  $a \in L(\mathcal{H})$  puede escribirse como  $a = v_a|a|$  donde  $|a| = (a^*a)^{1/2}$  y  $v_a$  es una isometría parcial de  $N(a)^\perp$  sobre  $\overline{R(a)}$ . Observemos que, en general, esta descomposición no es única, ver [Rud73]. Para fijar la parte isométrica, definimos  $v_a$  como la isometría parcial tal que  $v_a : N(a)^\perp \rightarrow \overline{R(a)}$  es una isometría y  $N(v_a) = N(a)$ . Esta descomposición es llamada *descomposición polar de a*.

Si  $a$  es autoadjunto, la parte isométrica de la descomposición polar puede definirse de manera de obtener una reflexión: es este caso  $R(a)^\perp = N(a)$  con lo cual si  $u_a = v_a + p_{N(a)}$ , es fácil ver que  $u_a \in \mathcal{P}$  ( i.e.  $u_a = u_a^* = u_a^{-1}$ ) y  $a = u_a|a| = |a|u_a$ . Notemos que  $u_a|_{N(a)} = id|_{N(a)}$  y si  $p_a = p_{\overline{R(a)}}$ ,  $u_a p_a = v_a$ .

Si  $q_a = \frac{u_a+1}{2}$  entonces  $q_a$  es una proyección ortogonal y  $u_a q_a = q_a$ , pues  $u_a$  es una reflexión y  $p_a|_{N(a)} = id|_{N(a)}$ .

La representación matricial de  $u_a$ , inducida por  $p = p_{\overline{R(a)}}$  es

$$u_a = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u_{11}p + 1 - p,$$

donde  $u_{11} = pu_a p|_{\overline{R(a)}} \in GL(\overline{R(a)})$  y  $1 = p|_{\overline{R(a)}} \in GL(\overline{R(a)})^\perp$ .

De ahora en adelante, dado  $a \in L(\mathcal{H})^s$  denotaremos por  $a = u_a|a|$  a la descomposición polar de  $a$  con  $u_a \in \mathcal{P}$  y  $a = v_a|a|$  la descomposición polar de  $a$  con  $v_a$  la isometría parcial recién definida.

A continuación enunciaremos algunas conocidas propiedades sobre la descomposición polar de un operador.

#### Teorema 1.1.3.

1. Si  $a \in GL(\mathcal{H})$  entonces  $a$  tiene una única descomposición polar.

2. Si  $a$  es normal entonces  $a$  tiene una descomposición polar  $a = u\alpha$ , donde  $u$  y  $\alpha$  comutan.

**Lema 1.1.4.** Sea  $a \in L(\mathcal{H})^s$  inyectivo. Entonces  $a$  tiene una única descomposición polar.

*Demostración.* Sea  $a = u\alpha = v\beta$  donde  $u, v \in U$  y  $\alpha, \beta \geq 0$ . Entonces  $v^{-1}u\alpha = \beta$ . Como  $N(\alpha) = N(\alpha^2) = N(aa^*) = N(a)$ , si  $a$  es inyectivo, entonces  $\alpha$  es inyectivo. Consideremos  $\alpha^{-1} : R(\alpha) \rightarrow \mathcal{H}$  (que no es acotado si  $a$  no es sobreyectivo). Luego  $v^{-1}u = \beta\alpha^{-1}$  en  $R(\alpha) = R(a)$  (pues  $a = \alpha u$ , con  $u \in \mathcal{U}$ ). Por lo tanto  $\beta\alpha^{-1} = v^{-1}u : R(a) \rightarrow \mathcal{H}$  es acotado y puede extenderse de manera única a  $\overline{R(a)} = \mathcal{H}$ . Si  $\widetilde{\beta\alpha^{-1}}$  es la extensión de  $\beta\alpha^{-1}$  a todo  $\mathcal{H}$ , resulta  $\widetilde{\beta\alpha^{-1}} = v^{-1}u$  en  $\mathcal{H}$ . Como  $v^{-1}u \in U$ , tenemos que  $(\beta\alpha^{-1})^* = (\beta\alpha^{-1})^{-1}$  en  $R(a)$  y, por lo tanto,  $\alpha^{-1}\beta = \alpha\beta^{-1}$ , es decir  $\alpha^2 = \beta^2$ , con lo cual  $\alpha = \beta$ . Además resulta que  $v^{-1}u = 1$ , con lo cual  $u = v$ . ■

### Descomposición positiva ortogonal

Todo operador autoadjunto puede escribirse de manera única como resta de dos operadores positivos con rangos ortogonales. Recordaremos a continuación la demostración de este resultado y algunas propiedades.

**Lema 1.1.5.** Consideremos  $a \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposición polar  $a = u_a|a|$ . Entonces  $a$  admite una única descomposición  $a = a_1 - a_2$  tal que  $a_1, a_2$  son positivos y  $a_1a_2 = 0$ . Más aún,  $a_1 = \frac{|a|+a}{2} = ap_a$  y  $a_2 = \frac{|a|-a}{2} = -a(1-p_a)$ , donde  $p_a = \frac{u_a+1}{2}$ .

*Demostración.* Sean  $a_1 = \frac{|a|+a}{2}$  y  $a_2 = \frac{|a|-a}{2}$ . Tenemos entonces que  $a = a_1 - a_2$  y  $a_1, a_2 \in L(\mathcal{H})^+$ , pues  $a_1 = \frac{1}{2}|a|(1+u_a)$  y  $a_2 = \frac{1}{2}|a|(1-u_a)$  son productos de elementos positivos que comutan. Además,  $ap_a = |a|u_ap_a = |a|p_a = |a|\frac{1+u_a}{2} = \frac{|a|+a}{2} = a_1$ . Análogamente,  $a_2 = -a(1-p_a)$ . Entonces  $a_1 = ap_a = p_aa$  y  $a_2 = -a(1-p_a) = -(1-p_a)a$ , con lo cual  $a_1a_2 = 0$ . Para ver la unicidad de la descomposición, consideremos  $a = d_1 - d_2$ , donde  $d_1, d_2 \in L(\mathcal{H})^+$  y  $d_1d_2 = 0$ . Resulta entonces que  $a^2 = d_1^2 + d_2^2$  y  $|a| = (d_1^2 + d_2^2)^{1/2} = d_1 + d_2$ , con lo cual  $|a| = d_1 + d_2$ . Luego,  $|a| + a = 2d_1$  y  $|a| - a = 2d_2$ ; por lo tanto  $d_1 = a_1$  y  $d_2 = a_2$ . ■

Dado  $a \in L(\mathcal{H})^s$  llamaremos a la descomposición  $a = a_1 - a_2$  del Lema 1.1.5 como *descomposición positiva ortogonal* (d.p.o) de  $a$ . El operador  $a_1$  es la *parte positiva* de  $a$  y  $-a_2$ , la *parte negativa*.

Observemos que si  $a = a_1 - a_2$  es la descomposición positiva ortogonal de  $a \in L(\mathcal{H})^s$ , entonces  $|a| = a_1 + a_2$ ,  $v_a = p_{R(a_1)} - p_{R(a_2)}$ ,  $u_a = p_{R(a_1)} - p_{R(a_2)} + p_{N(a)}$  y  $p_{R(a)} = p_{R(a_1)} + p_{R(a_2)}$ .

Notemos también que  $R(a_1)$  y  $R(a_2)$  son cerrados si y sólo si  $R(a)$  es cerrado.

**Lema 1.1.6.** Consideremos  $a, a_1, a_2, p_a$  como en el Lema 1.1.5, entonces

$$1. \quad R(p_a) = \overline{R(a_1)} \oplus N(a),$$

$$2. \quad N(p_a) = \overline{R(a_2)}.$$

*Demostración.* 1: Por la definición de  $u_a$ ,  $p_a|_{N(a)} = id|_{N(a)}$ , con lo que  $N(a) \subseteq R(p_a)$ . Además,  $N(p_a) \subseteq N(|a|p_a) = N(a_1)$ , entonces  $\overline{R(a_1)} \subseteq N(p_a)^\perp = R(p_a)$ . Luego,  $N(a) + \overline{R(a_1)} \subseteq R(p_a)$ . Recíprocamente, sea  $y \in R(p_c)$ , existe entonces  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $y = p_c(x)$ ; si  $x = z + w$ , con  $z \in \overline{R(c)}$ ,  $w \in N(c)$  resulta  $y = p_c(z + w) = p_c(z) + w$ . Por el Lema 1.1.5,  $c_1 = p_c c$ , con lo cual  $p_c(R(c)) = R(c_1) \subseteq \overline{R(c_1)}$ ; y entonces  $p_c(z) \in \overline{R(c_1)}$ . Luego,  $R(p_c) = \overline{R(c_1)} \oplus N(c)$ .

2: Vale que  $\overline{R(c)} = \overline{R(c_1)} \oplus \overline{R(c_2)}$ ; con lo cual  $\mathcal{H} = \overline{R(c_1)} \oplus \overline{R(c_2)} \oplus N(c)$ . Luego,  $\overline{R(c_2)} = (\overline{R(c_1)} \oplus N(c))^\perp$  y, por 1.,  $(\overline{R(c_1)} \oplus N(c))^\perp = N(p_c)$  entonces  $N(p_c) = \overline{R(c_2)}$ . ■

## 1.2. Inclusiones de rangos de operadores

El siguiente es un conocido resultado de R. G. Douglas [Dou66] que da un criterio para comparar rangos de operadores. Se recomienda el trabajo de P.A. Fillmore y J.P. Williams [FW71], para estudiar algunas aplicaciones.

Utilizaremos este resultado en muchas oportunidades a lo largo de esta tesis.

**Teorema 1.2.1.** (Douglas). Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})$ . Son equivalentes:

$$1. \quad R(a) \subseteq R(b),$$

$$2. \quad aa^* \leq \lambda^2 bb^* \quad \text{para algún } \lambda \geq 0,$$

$$3. \quad \text{existe } c \in L(\mathcal{H}) \text{ tal que } a = bc.$$

*Demostración.* 3 → 2 : Si  $a = bc$  entonces

$$aa^* = bcc^*b^* = \|c\|^2 bb^* - b(\|c\|^2 1 - cc^*)b^* \leq \|c\|^2 bb^*,$$

pues  $cc^* \leq \|c\|^2 1$ , con lo que vale 2.

3 → 1 : Es claro.

$1 \rightarrow 3$ : Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})$  tales que  $R(a) \subseteq R(b)$ , entonces podemos definir un operador  $c_1$  en  $\mathcal{H}$  de la siguiente manera: si  $f \in \mathcal{H}$ , tenemos que  $af \in R(a) \subseteq R(b)$ . Como  $b : N(b)^\perp \rightarrow R(b)$  es biyectivo, existe un único  $h \in N(b)^\perp$  tal que  $bh = af$ . Sea  $c_1 f = h$  entonces  $c_1$  está bien definido y  $a = bc_1$ . Falta ver que  $c_1$  es acotado. Ya que  $c_1$  está definido en todo  $\mathcal{H}$ , es suficiente probar que  $c_1$  tiene el gráfico cerrado. Sea  $\{(f_n, h_n)\}_n$ , con  $h_n = c_1 f_n$  tal que  $(f_n, h_n) \rightarrow (f, h)$ . Entonces por definición,  $bh_n = af_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} af_n = af$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} bh_n = bh$ , con lo cual  $af = bh$ . Además, ya que  $N(b)^\perp$  es cerrado, se tiene que  $h \in N(b)^\perp$ , por lo tanto  $c_1 f = h$ . Luego  $c_1$  es acotado.

$2 \rightarrow 3$ : Supongamos que  $aa^* \leq \lambda bb^*$  para algún  $\lambda \geq 0$ . Definimos la siguiente aplicación  $d : R(b^*) \rightarrow R(a^*)$ , si  $f \in R(b^*)$ ,  $D(b^*f) = a^*f$ . Entonces  $d$  está bien definida pues si  $b^*f = b^*f'$  entonces  $b^*(f - f') = 0$  y como  $aa^* \leq \lambda bb^*$  también  $f - f' \in N(a^*)$  o equivalentemente  $a^*f = a^*f'$  y  $d$  está bien definida. Veamos que  $d$  es acotada en  $R(b^*)$ :

$$\|d(b^*f)\|^2 = \|a^*f\|^2 = \langle aa^*f, f \rangle \leq \lambda^2 \langle bb^*f, f \rangle = \lambda^2 \|b^*f\|^2.$$

Por lo tanto,  $d$  puede ser extendido de manera única a  $\overline{R(b^*)}$  y si definimos a  $d$  como 0 en  $R(b^*)^\perp$ , entonces  $d \in L(\mathcal{H})$  y  $db^* = a^*$  o equivalentemente  $a = bd^*$ . ■

Además, si se cumplen las condiciones del Teorema de Douglas, se puede ver que existe un único operador  $c$ , solución de la ecuación  $a = bc$  tal que  $\|c\|^2 = \inf\{\mu : aa^* \leq \mu bb^*\}$  y  $R(c) \subseteq R(b^*)$ .

**Corolario 1.2.2.** *Si  $a, b \in L(\mathcal{H})$  entonces  $R(a) = R(b)$  y  $\dim N(a) = \dim N(b)$  si y sólo si existe  $c \in GL(\mathcal{H})$  tal que  $a = bc$ .*

### Propiedades de operadores positivos

Sea  $a \in L(\mathcal{H})^+$ , se tienen las siguientes inclusiones

$$R(a) \subset R(a^{1/2}) \subset \overline{R(a^{1/2})} = \overline{R(a)}.$$

La última igualdad es cierta pues  $N(a) = N(a^{1/2})$ , con lo cual

$$\overline{R(a)} = N(a)^\perp = N(a^{1/2})^\perp = \overline{R(a^{1/2})}.$$

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $a \in L(\mathcal{H})^+$ . Entonces  $R(a)$  es cerrado si y sólo si  $R(a^{1/2})$  es cerrado, y es ese caso  $R(a) = R(a^{1/2})$ .*

*Demostración.* Si  $R(a) = \overline{R(a)}$ , de las inclusiones anteriores, se tiene que  $R(a) \subset R(a^{1/2}) \subset R(a)$ . Luego  $R(a) = R(a^{1/2})$  y  $R(a^{1/2})$  cerrado. Recíprocamente, si  $R(a^{1/2}) = \overline{R(a^{1/2})}$ , entonces  $R(a^{1/2}) = \overline{R(a)}$ . Como  $R(a^{1/2}) = a^{1/2}(R(a^{1/2}))$  resulta que  $R(a) = a^{1/2}(R(a^{1/2})) = R(a^{1/2}) = \overline{R(a)}$ . Por lo tanto  $R(a)$  es cerrado y  $R(a) = R(a^{1/2})$ . ■

El siguiente resultado está demostrado en [CM00].

**Teorema 1.2.4.** *Para un operador  $a \in L(\mathcal{H})^+$ , se tienen las siguientes posibilidades:*

1.  $R(a)$  es cerrado y entonces  $R(a^t) = R(a)$  para todo  $t \in [0, 1]$
2. o  $R(a)$  no es cerrado y entonces  $R(a^t)$  es cerrado para  $t = 0$ , no cerrado para todo  $t \in (0, 1]$  y

$$R(a) \subset R(a^t) \subsetneq R(a^s) \subset \overline{R(a)}$$

para  $0 \leq s < t < 1$ .

### 1.3. Pseudoinversa de Moore-Penrose

En esta sección recordamos la definición de pseudoinversa de Moore-Penrose. Para más detalles y propiedades sobre inversas generalizadas recomendamos consultar el trabajo [Nas87] y los libros [BIG03], [Gro77].

Consideremos  $a \in L(\mathcal{H})$ . Como  $a|_{N(a)^\perp} : N(a)^\perp \rightarrow R(a)$  es biyectivo, podemos definir su inversa (algebraica):

$$(a|_{N(a)^\perp})^{-1} : R(a) \rightarrow N(a)^\perp.$$

Llamamos *pseudoinversa de Moore-Penrose*, y notamos  $a^\dagger$ , al operador densamente definido en  $\mathcal{D}_a = R(a) \oplus N(a)$  por

$$a^\dagger x = \begin{cases} (a|_{N(a)^\perp})^{-1}x, & x \in R(a) \\ 0, & x \in N(a) \end{cases}.$$

Un operador  $a \in L(\mathcal{H})$  se dice *acotado inferiormente* si existe un  $\alpha > 0$  tal que  $\|ax\| \geq \alpha\|x\|$  para todo  $x \in N(a)^\perp$ . Si  $a \in L(\mathcal{H})$ , entonces  $a$  es acotado inferiormente si y sólo si  $R(a)$  es cerrado.

**Proposición 1.3.1.** *Sea  $a \in L(\mathcal{H})$ , entonces  $a^\dagger$  es acotado si y sólo si  $R(a)$  es cerrado.*

Se puede probar también que  $a^\dagger$  es el único operador que verifica lo siguiente:

$$\begin{cases} aa^\dagger a = a \\ a^\dagger aa^\dagger = a^\dagger \\ (aa^\dagger)^* = aa^\dagger \\ (a^\dagger a)^* = a^\dagger a. \end{cases} \quad (1.1)$$

Además dados  $a$  de rango cerrado e  $y \in \mathcal{H}$ , resulta que  $a^\dagger y$  es el único elemento de  $\mathcal{H}$  que minimiza  $\{\|ax - y\| : x \in \mathcal{H}\}$ .

El concepto de módulo mínimo que definimos a continuación permite calcular la norma de  $a^\dagger$ , para un operador  $a$  de rango cerrado.

**Definición 1.3.2.** Sea  $a \in L(\mathcal{H})$ , llamamos *módulo mínimo* de  $a$  al número

$$\gamma(a) = \inf\{\|ax\| : x \in N(a)^\perp, \|x\| = 1\}.$$

Es claro que  $a$  está acotado inferiormente si y sólo si  $\gamma(a) > 0$ .

**Proposición 1.3.3.** Sea  $a \in L(\mathcal{H})$ , entonces  $a$  tiene rango cerrado si y sólo si  $\gamma(a) > 0$ . En este caso,  $\gamma(a) = \gamma(a^*) = \|a^\dagger\|^{-1}$ .

## 1.4. Ángulos entre subespacios cerrados

Veremos en esta sección algunos resultados básicos sobre ángulos entre subespacios cerrados. En el trabajo de F. Deutsch [Deu95] o en el clásico libro de T. Kato [Kat95], se pueden encontrar más detalles sobre este tema .

Dados dos subespacios cerrados  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{H}$ , el *ángulo mínimo* o *ángulo de Dixmier* entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  es el ángulo  $\alpha_0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \in [0, \pi/2]$  cuyo coseno está dado por

$$c_0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{M}, \|x\| \leq 1, x \in \mathcal{N}, \|y\| \leq 1\},$$

ver [Dix49].

Notemos que si la intersección de los subespacios  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  es no trivial el ángulo mínimo entre ellos es nulo. En [Fri37], K. Friedrichs da la siguiente definición de ángulo entre subespacios.

El *ángulo* o *ángulo de Friedrichs* entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  es el ángulo  $\alpha(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \in [0, \pi/2]$  cuyo coseno está dado por

$$c(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{M} \cap (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp, \|x\| \leq 1, y \in \mathcal{N} \cap (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp, \|y\| \leq 1\}.$$

Observemos que  $0 \leq c(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq c_0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq 1$  y si  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ , resulta  $c(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = c_0(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

El ángulo entre dos subespacios cerrados permite establecer si la suma de estos subespacios es cerrada.

**Teorema 1.4.1.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $c_0(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < 1$ ,
2.  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$  y  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  es cerrado.

**Teorema 1.4.2.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $c(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < 1$ ,
2.  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  es cerrado,
3.  $\mathcal{M}^\perp + \mathcal{N}^\perp$  es cerrado.

## 1.5. Variedades modeladas en espacios de Banach

En esta sección presentamos un breve resumen sobre algunos aspectos de geometría diferencial en dimensión infinita. Para detalles sobre estos temas, se sugiere consultar [Lan95], [Lar80], y [Rae77]. En [MLR92], se da un marco general de la teoría de espacios homogéneos reductivos de dimensión infinita.

Sea  $E$  un espacio de Banach y  $M$  un espacio topológico. Decimos que  $M$  es una variedad de clase  $C^k$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ) modelada sobre  $E$  o simplemente *variedad de Banach* si existe una colección de cartas  $(U, \phi)$  donde  $U$  son abiertos que cubren  $M$ ,  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset E$  es un homeomorfismo con  $\phi(U)$  abierto y además, si  $(\varphi, V)$  es otra carta de  $M$ , entonces  $\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subseteq E \rightarrow E$  es de clase  $C^k$ .

Sean  $E$  un espacio de Banach y  $N \subseteq E$ . Decimos que  $N$  es una *subvariedad* de  $E$ , si para cada  $x_0 \in M$  existen abiertos  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq E$ , con  $0 \in \mathcal{U}$ ,  $x_0 \in \mathcal{V}$ , un difeomorfismo  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , con  $\phi(0) = x_0$  y subespacios  $E_1, E_2$  de  $E$  tales que

- $E_1 \oplus E_2 = E$ ,
- $\phi|_{\mathcal{U} \cap E_1} : \mathcal{U} \cap E_1 \rightarrow \mathcal{V} \cap N$  es un homeomorfismo, (en  $N$  consideramos la topología inducida por  $E$ ).

Las variedades de Banach con las que trabajaremos son subconjuntos de espacios de Banach.

**Definición 1.5.1.** Sean  $M, N$  variedades de Banach. Una función  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) es una *sumersión* si, para cada  $x \in M$ , la aplicación tangente a  $f$  en  $x$ ,  $(Tf)_x$ , es suryectiva y su núcleo está complementado en  $(TM)_x$ .

Observemos que en variedades de dimensión finita el núcleo de la aplicación tangente está siempre complementado.

**Proposición 1.5.2.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una función de clase  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) entre variedades de Banach. Entonces  $f$  es una sumersión en  $x \in M$  si y sólo si  $f$  admite secciones locales, es decir existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $f(x) \in N$  y una función  $s : \mathcal{U} \rightarrow M$  de clase  $C^k$  tal que  $f \circ s = id_{\mathcal{U}}$ .*

**Proposición 1.5.3.** *Sea  $f : M \rightarrow N$  una sumersión entre variedades de Banach. Dado  $y \in N$ , entonces  $f^{-1}(y)$  es una subvariedad cerrada de  $M$ , con espacio tangente dado por  $(Tf^{-1}(y))_x = N((Tf)_x)$ , para cada  $x \in M$ .*

Un grupo topológico  $G$  es un *grupo de Lie-Banach*, si es una variedad de Banach, tal que las estructuras de grupo y de variedad son compatibles, es decir que la aplicación

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \rightarrow gh^{-1},$$

es diferenciable.

**Definición 1.5.4.** Dado un grupo de Lie-Banach  $G$ , un subgrupo  $H$  de  $G$  es *regular* si es un grupo de Lie-Banach y si  $(TH)_1$  es un subespacio cerrado y complementado de  $(TG)_1$ .

**Teorema 1.5.5.** *Sea  $G$  un grupo de Lie-Banach,  $H \subseteq G$  un subgrupo regular. Entonces*

1.  *$G/H$  tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que  $G \rightarrow G/H$  es una sumersión,*
2.  *$G \rightarrow G/H$  es un fibrado principal con grupo estructural  $H$ ,*
3. *la acción  $G \times G/H \rightarrow G/H$  es suave.*

## Capítulo 2

# Componentes de operadores autoadjuntos

En 1963, A. C. Thompson definió en un cono convexo de un espacio de Banach, la siguiente relación de equivalencia: dos elementos  $a, b$  del cono están relacionados si y sólo si existen números positivos  $\alpha, \beta$  tales que  $a \leq \alpha b$  y  $b \leq \beta a$  (donde  $\leq$  es el orden inducido por el cono). Thompson probó que cada clase de equivalencia o *componente* es un espacio métrico completo con cierta métrica, hoy conocida como la métrica de Thompson, ver [Tho63].

En [CM99] y [CM00], G. Corach y A. Maestripieri, estudiaron la estructura de la componente de esta relación en el cono de operadores positivos de  $L(\mathcal{H})$  y probaron que cada componente tiene una estructura de espacio homogéneo reductivo. En este capítulo definiremos tres relaciones de equivalencia en el conjunto  $L(\mathcal{H})^s$  de operadores autoadjuntos, con el objetivo de extender la relación definida en el cono de operadores positivos. Estudiaremos la estructura geométrica de las clases de equivalencias de una de estas relaciones y veremos que si  $a$  es un operador autodual de rango cerrado, su componente  $C_a$  admite una estructura de variedad diferencial. Mostraremos además que esta estructura es compatible con la estructura métrica de  $C_a$ , dada por una métrica completa en  $C_a$ .

### 2.1. Sobre la estructura de $GL(\mathcal{H})^s$

En los primeros párrafos de esta sección daremos una breve descripción de algunas propiedades ya conocidas del conjunto,  $GL(\mathcal{H})^s$ , de operadores inversibles autoadjuntos. Al

final de la sección hay una caracterización nueva del conjunto de operadores congruentes con un operador inversible autoadjunto.

La estructura homogénea de  $GL(\mathcal{H})^s$  fue estudiada por G. Corach, H. Porta, L. Recht, en [CPR93c]. Como  $L(\mathcal{H})^s$  es un espacio de Banach real, entonces resulta una variedad diferencial real. Resulta entonces que  $GL(\mathcal{H})^s$  es también una variedad diferencial real, ya que es abierto en  $L(\mathcal{H})^s$ .

Dado  $a \in GL(\mathcal{H})^s$  consideremos en  $\mathcal{H}$  la siguiente forma sesquilineal indefinida

$$\langle x, y \rangle_a = \langle ax, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

El adjunto de  $u \in L(\mathcal{H})$  respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  o el *a-adjunto* de  $u$  es  $u^{*a} = a^{-1}u^*a$ . Es fácil ver que el grupo  $\mathcal{U}_a$  de operadores *a-unitarios* consiste en los operadores  $u \in GL(\mathcal{H})$  tales que  $u^{-1} = a^{-1}u^*a$ .

El grupo  $GL(\mathcal{H})$  actúa de la siguiente forma sobre  $L(\mathcal{H})^s$ :

$$L : GL(\mathcal{H}) \times L(\mathcal{H})^s \rightarrow L(\mathcal{H})^s, \quad L_g a = gag^*, \quad \text{para } a \in L(\mathcal{H})^s \text{ y } g \in GL(\mathcal{H}).$$

Dado  $a \in L(\mathcal{H})^s$ , la *órbita* de  $a$  correspondiente a la acción  $L$  es el conjunto

$$\mathcal{O}_a = \{gag^* : g \in GL(\mathcal{H})\}.$$

Observemos que si  $a$  es inversible entonces  $\mathcal{O}_a \subseteq GL(\mathcal{H})^s$ , con lo cual  $L : GL(\mathcal{H}) \times GL(\mathcal{H})^s \rightarrow GL(\mathcal{H})^s$ .

El *grupo de isotropía* de  $a \in GL(\mathcal{H})^s$ ,  $I_a$ , es el grupo de operadores  $g \in GL(\mathcal{H})$  tales que  $L_g a = a$ , i.e.

$$I_a = \{g \in GL(\mathcal{H}) : gag^* = a\}.$$

Resulta entonces que el grupo de isotropía es el grupo de operadores  $a^{-1}$ -unitarios, i.e.,  $I_a = \mathcal{U}_{a^{-1}}$ .

**Proposición 2.1.1.** *Dado  $a \in GL(\mathcal{H})^s$ , consideremos la aplicación*

$$f_a : GL(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}_a, \quad f_a(g) = L_g a = gag^*.$$

*La órbita  $\mathcal{O}_a = \{gag^* ; g \in GL(\mathcal{H})\}$  es abierta y cerrada en  $GL(\mathcal{H})^s$ . Además resulta que  $(GL(\mathcal{H}), \mathcal{O}_a, f_a)$  es un fibrado principal con grupo estructural  $I_a$ .*

*Demostración.* Ver [CPR93c, Proposition 1.1]. ■

La acción  $L$  es entonces localmente transitiva.

El siguiente resultado muestra que la órbita de un operador autoadjunto inversible es la órbita de su parte unitaria.

**Lema 2.1.2.** Consideremos  $a \in GL(\mathcal{H})^s$  con descomposición polar  $a = u_a|a|$ ,  $u_a \in \mathcal{P}$ , entonces  $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_{u_a}$ .

*Demostración.* Como  $a$  es autoadjunto,  $a = u_a|a| = |a|^{1/2}u_a|a|^{1/2}$ . Por lo tanto,  $a \in \mathcal{O}_{u_a}$  con lo cual  $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_{u_a}$ . ■

Dado  $w \in \mathcal{U}$  la órbita unitaria de  $w$  es el conjunto

$$\mathcal{U}\mathcal{O}_w = \{uwu^* : u \in \mathcal{U}\}.$$

En el siguiente teorema damos una caracterización de la órbita de un operador invertible autoadjunto en términos de su descomposición polar y de su descomposición positiva ortogonal.

**Teorema 2.1.3.** Consideremos  $a, b \in GL(\mathcal{H})^s$  con descomposiciones polares  $a = u_a|a|$ ,  $b = u_b|b|$  y descomposiciones positivas ortogonales  $a = a_1 - a_2$ ,  $b = b_1 - b_2$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $b \in \mathcal{O}_a$ ,
2.  $u_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{u_a}$ ,
3.  $\dim R(a_i) = \dim R(b_i)$ , para  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* (1)  $\rightarrow$  (2): Consideremos  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces, por el Lema 2.1.2,  $u_b \in \mathcal{O}_{u_a}$ , con lo cual existe  $g \in GL(\mathcal{H})$  tal que  $u_b = gu_ag^*$ . Como  $u_b, u_a \in \mathcal{P}$ , entonces  $u_b = u_b^{-1} = (g^*)^{-1}u_ag^{-1}$ . Por lo tanto,  $u_b = gu_ag^* = (g^*)^{-1}u_ag^{-1}$ , o  $g^*gu_ag^*g = u_a$ . Consideremos  $\lambda = g^*g$ ; entonces  $\lambda u_a \lambda = u_a$  o  $\lambda^{-1} = u_a \lambda u_a$ . Como  $\lambda > 0$  y  $u_a \in \mathcal{P}$ , se sigue que  $\lambda^{-1/2} = u_a \lambda^{1/2} u_a$ , o  $\lambda^{-1/2} u_a = u_a \lambda^{1/2}$ . Si  $g = w\lambda^{1/2}$  es la descomposición polar de  $g$  con  $w \in \mathcal{U}$ , se tiene que  $u_b = w\lambda^{1/2}u_a\lambda^{1/2}w^* = wu_aw^*$ , con lo que  $u_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{u_a}$ .

(2)  $\rightarrow$  (3): Consideremos  $u_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{u_a}$ , entonces existe  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $u_b = uu_a u^*$ . Por lo tanto  $p_{b_1} - p_{b_2} = u_b = uu_a u^* = up_{a_1} u^* - up_{a_2} u^*$ . Se sigue del Lema 1.1.5 que  $p_{b_i} = up_{a_i} u^*$ , con lo cual  $\dim R(a_i) = \dim R(b_i)$ , para  $i = 1, 2$ .

(3)  $\rightarrow$  (1): Como  $\dim R(b_i) = \dim R(a_i)$  para  $i = 1, 2$ , existe una isometría parcial  $u_i$  de  $\mathcal{H}$  sobre  $R(b_i)$  with  $N(u_i) = R(a_i)^\perp$ . Consideremos  $u = u_1 + u_2$  entonces  $u \in \mathcal{U}$  ya que  $R(a_1) \oplus R(a_2) = \mathcal{H}$  y  $R(a_1)^\perp = R(a_2)$ . Además  $uu_a u^* = u(p_{a_1} - p_{a_2})u^* = p_{b_1} - p_{b_2} = u_b$ , con lo cual  $u_b \in \mathcal{O}_{u_a}$ , o equivalentemente  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Consideremos ahora la siguiente aplicación natural:

$$\pi : GL(\mathcal{H})^s \rightarrow \mathcal{P}, \quad \pi(a) = u_a, \quad \text{donde } a \in GL(\mathcal{H})^s, a = u_a|a|.$$

Se sigue de la definición de  $\pi$  que la *fibra* de  $u \in \mathcal{P}$ ,  $\pi^{-1}(\{u\})$ , es el subconjunto de  $GL(\mathcal{H})^s$  de operadores  $a = u_a|a|$  tales que  $u_a = u$ , i.e.:

$$\pi^{-1}(\{u\}) = \{a \in GL(\mathcal{H})^s : a = u\alpha, \alpha > 0\}.$$

En particular, la fibra de 1 es  $GL(\mathcal{H})^+$ .

Además  $\pi^{-1}(\{u\}) \subseteq \mathcal{O}_u$ . En efecto, si  $a \in \pi^{-1}(\{u\})$  entonces  $a = |a|u$  es la descomposición polar de  $a$  y, como  $a$  es autoadjunto, se tiene que  $a = |a|^{1/2}u|a|^{1/2}$ . Luego  $a \in \mathcal{O}_u$ .

El siguiente lema es similar a [CPR93c, Proposition 4.1].

**Lema 2.1.4.** *Sea  $u \in \mathcal{P}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $a \in \pi^{-1}(\{u\})$ ,
2.  $a = a^*$ ,  $au > 0$ ,
3.  $au = ua$ ,  $au > 0$ .

*Demostración.* 1.  $\rightarrow$  2.: Consideremos  $a \in \pi^{-1}(\{u\})$ , entonces  $a = u|a|$  y  $a \in GL(\mathcal{H})^s$ .

Por lo tanto,  $au = |a|u > 0$ , ya que  $u|a| = |a|u$ .

2.  $\rightarrow$  3.: Consideremos  $a = a^*$  tal que  $au > 0$ . Entonces  $au = (au)^* = ua$ .

3.  $\rightarrow$  1.: Si  $au = ua > 0$ , entonces  $a = (au)u = u(au)$  es la descomposición polar de  $a$  con lo cual  $a \in \pi^{-1}(\{u\})$ . ■

## 2.2. Componentes de Thompson de operadores positivos

En esta sección resumimos algunos resultados sobre las componentes de Thompson de operadores positivos. Éstas son un caso particular de las componentes o clases de equivalencia correspondientes a una relación que definió A. C. Thompson en un cono cerrado convexo de un espacio de Banach.

Sea  $\mathcal{C}$  un cono convexo cerrado de un espacio de Banach  $X$ , i.e.  $\mathcal{C}$  es un subconjunto no vacío cerrado de  $X$  tal que

1.  $x + y \in \mathcal{C}$ , si  $x, y \in \mathcal{C}$ ,
2.  $\alpha x \in \mathcal{K}$ , si  $x \in \mathcal{C}, \alpha \geq 0$ ,
3. si  $x \in \mathcal{C}$  y  $-x \in \mathcal{C}$  entonces  $x = 0$ .

Notaremos con  $\leq$  al orden parcial en  $X$  inducido por el cono  $\mathcal{C}$ ; es decir,  $x \leq y$  si y sólo si  $y - x \in \mathcal{C}$ .

Se dice que el cono  $\mathcal{C}$  es *normal* si existe  $\lambda > 0$ , tal que si  $0 \leq x \leq y$  entonces  $\|x\| \leq \lambda \|y\|$ .

En [Tho63], Thompson definió la siguiente relación de equivalencia en un cono convexo  $\mathcal{C}$ .

**Definición 2.2.1.** Sean  $a, b \in \mathcal{C}$ , diremos que  $a$  y  $b$  son equivalentes si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $a \leq \alpha b$  y  $b \leq \beta a$ . En este caso, notaremos  $a \sim b$ .

Esta relación divide al cono  $\mathcal{C}$  en clases de equivalencia que Thompson llamó *componentes*, en [Tho63]. Para cada  $u \in \mathcal{C}$ ,  $u \neq 0$ , notaremos con  $C_u$  a la componente de  $u$ .

En ese trabajo, Thompson definió además en cada componente del cono la siguiente métrica

$$d_T(x, y) = \log \max\{\inf\{r > 0 : x \leq ry\}, \inf\{s > 0 : y \leq sx\}\},$$

ahora conocida como *métrica de Thompson*.

Si  $\mathcal{C}$  es un cono normal, Thompson mostró que cada componente resulta un espacio métrico completo con la métrica  $d_T$ .

La métrica de Thompson es una variante de la *métrica de Hilbert* o *métrica proyectiva de Hilbert* en  $\mathcal{C} - \{0\}$ , que se define como

$$d_H(x, y) = \log(\inf\{r > 0 : x \leq ry\} \cdot \inf\{s > 0 : y \leq sx\}).$$

La métrica proyectiva es en realidad una pseudo métrica, pues  $d_H(x, y) = 0$  si  $x = \lambda y$ ,  $\lambda > 0$ . Esta métrica fue introducida en 1903 por D. Hilbert en el espacio proyectivo, ver [Hil03]. En 1957, G. Birkhoff usó la métrica de Hilbert para probar generalizaciones del Teorema de Jentzsch. En particular, mostró que el Teorema de Jentzsch se reduce al Teorema del punto fijo de Picard, respecto a la métrica proyectiva, ver [Bir57].

Las aplicaciones de la métrica de Hilbert se extendieron a diversos problemas, como por ejemplo a encontrar soluciones de ecuaciones integrales y diferenciales.

La métrica de Thompson se aplica también al estudio de problemas de programación dinámica cuadrática, ver [Mon98]. Para distintas aplicaciones de estas métricas ver, por ejemplo, [Bus73], [Bus74], [HHT06], [Nus88], [Nus07], [Nus94].

G. Gorach y A. Maestripieri estudiaron las componentes para el caso particular del cono de operadores positivos. A continuación daremos un resumen de algunos de los resultados que obtuvieron, ver [CM99] y [CM00] para más detalles.

Notaremos con  $C_a$  a la clase de equivalencia o *componente de Thompson* de  $a \in L(\mathcal{H})^+$ , i.e.,  $C_a = \{b \in L(\mathcal{H})^+ : a \sim b\}$ .

Como consecuencia del Teorema de Douglas (Teorema 1.2.1), se tiene que las componentes de Thompson de operadores positivos están parametrizadas por los rangos de sus raíces. Más precisamente,

**Proposición 2.2.2.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$ , entonces*

$$C_a = \{b \in L(\mathcal{H})^+ : R(b^{1/2}) = R(a^{1/2})\}.$$

*Demostración.* Ver [CM00, Corolario 3.3]. ■

Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^+$ , tenemos entonces que  $R(a^{1/2}) = R(a)$  y

$$C_a = \{b \in L(\mathcal{H})^+ : R(b) = R(a)\}.$$

Se probó también que la componente de Thompson de un operador positivo de rango cerrado tiene estructura de espacio homogéneo reductivo. Sea  $G_a$  al subgrupo de  $GL(\mathcal{H})$  de todos los operadores inversibles  $g \in GL(\mathcal{H})$  tales que  $R(g|_{R(a)}) = R(a)$  y  $gx = x$ , para todo  $x \in R(a)^\perp$ . El grupo  $G_a$  actúa sobre  $C_a$  de la siguiente manera:

$$L : G_a \times C_a \rightarrow C_a, \quad L_g b = gbg^*,$$

donde  $b \in C_a$ ,  $g \in G_a$ .

La acción  $L$  es diferenciable y transitiva, e induce una estructura de espacio homogéneo en  $C_a$ .

Hay una conexión natural en  $TC_a$ , el espacio tangente asociado. Una curva  $\gamma$  es una geodésica en  $C_a$  si  $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma}\gamma^\dagger\dot{\gamma}$ .

Dado  $b \in C_a$  la única geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = b$  y  $\dot{\gamma} = X \in (TC_a)_b$  es

$$\gamma(t) = b^{1/2}e^{t(b^{1/2})^\dagger X(b^{1/2})^\dagger}(b^{1/2})^\dagger, \quad t \in [0, 1],$$

donde  $(b^{1/2})^\dagger$  denota la pseudo inversa de *Moore-Penrose* de  $b^{1/2}$ .

Más aún, dados  $b, c \in C_a$  existe una única geodésica  $C_a$  que une  $b$  con  $c$ , dada por:

$$\gamma_{b,c}(t) = b^{1/2}((b^{1/2})^\dagger c(b^{1/2})^\dagger)^t(b^{1/2})^\dagger, \quad t \in [0, 1],$$

donde notamos  $((b^{1/2})^\dagger c(b^{1/2})^\dagger)^t = e^{t \log((b^{1/2})^\dagger c(b^{1/2})^\dagger|_{R(a)})}$ .

Además se puede definir una métrica de Finsler en  $TC_a$ , con la cual es posible dar la noción de longitud de una curva. Si consideramos la distancia geodésica definida como

$$d(b, c) = \inf\{\text{longitud de } \gamma : \gamma \text{ curva suave que une } b \text{ con } c\},$$

entonces  $d$  coincide con la métrica de Thompson,  $d_T$ , en cada componente.

Además, si  $b, c \in C_a$  vale que  $d_T(b, c) = \|\log((b^{1/2})^\dagger c (b^{1/2})^\dagger|_{R(a)})\|$ . Más aún, se tiene que la distancia de Thompson entre  $b$  y  $c$  es la longitud de la geodésica que los une.

Por lo observado por E. Vesentini en [Ves76], para el caso particular del grupo  $G^+ = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , la distancia geodésica entre dos puntos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , viene dada por la medida de Haar  $\nu$  en  $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  del intervalo  $(\alpha, \beta)$ , ya que:

$$\nu(\alpha, \beta) = |\log(\beta) - \log(\alpha)| = \left| \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right| = |\log(\alpha^{-1/2} \beta \alpha^{-1/2})|.$$

En [CM00], también se probó que la componente de cualquier operador positivo inyectivo tiene una estructura de espacio homogéneo con una estructura de Finsler.

## 2.3. Componentes de operadores autoadjuntos

En esta sección vamos a extender el concepto de componente de Thompson, definida para operadores positivos, al caso autoadjunto. Lo haremos de tres maneras diferentes. Definiremos tres relaciones de equivalencia que extienden la relación definida para operadores positivos, y estudiaremos las correspondientes clases de equivalencia.

Dado  $c \in L(\mathcal{H})^s$ , recordemos que  $c = u_c|c| = v_c|c|$  denota la descomposición polar de  $c$ , donde  $u_c$  es una reflexión,  $v_c$  es la isometría parcial con núcleo  $N(c)$  y  $p_c = p_{\overline{R(c)}}$ .

Dada  $w \in \mathcal{P}$  (i.e.  $w$  es una reflexión) consideremos la forma sesquilineal asociada a  $w$ , i.e.,

$$\langle x, y \rangle_w = \langle wx, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

A partir de esta forma, definimos la siguiente relación de orden en  $L(\mathcal{H})$ : dados  $a, b \in L(\mathcal{H})$ ,

$$a \leq_w b \text{ si y sólo si } \langle (b - a)x, x \rangle_w \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Observemos que  $a \leq_w b$  si y sólo si  $w(b - a) \geq 0$ .

Para extender a  $L(\mathcal{H})^s$  la relación de equivalencia  $\sim$  definida en  $L(\mathcal{H})^+$  en la Sección 2.2.1, consideremos las siguientes relaciones:

1.  $a \sim b$  si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $a \leq_{u_a} \alpha b$  y  $b \leq_{u_b} \beta a$ ,
2.  $a \sim_1 b$  si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $|a| \leq \alpha|b|$ ,  $|b| \leq \beta|a|$  y  $v_a$  es unitariamente equivalente a  $v_b$ ,

3.  $a \sim_2 b$  si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $|a| \leq \alpha|b|$  y  $|b| \leq \beta|a|$ .

**Observación 2.3.1.** Una extensión natural al conjunto de operadores autoadjuntos de la relación de equivalencia definida en los operadores positivos es la siguiente:  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  están relacionados si y sólo si existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $a \leq \alpha b$  y  $b \leq \beta a$ . No consideramos esta relación pues carece de interés para nosotros, ya que si  $a$  y  $b$  son operadores autoadjuntos inyectivos no positivos, se puede ver que  $a$  y  $b$  resultan múltiplos.

No es difícil ver que  $\sim_1$  y  $\sim_2$  son relaciones de equivalencia. Para probar que  $\sim$  es una relación de equivalencia, usaremos el siguiente resultado.

**Lema 2.3.2.** Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposiciones polares  $a = u_a|a|$  y  $b = u_b|b|$ . Si  $a \sim b$ , entonces  $u_a = u_b$ .

*Demostración.* Si  $a \sim b$ , entonces existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $u_a(\alpha b - a) \geq 0$  y  $u_b(\beta a - b) \geq 0$ . Por lo tanto,  $c = \alpha u_a b \geq |a| \geq 0$  y  $b = \alpha^{-1} u_a c$ . Como la descomposición polar de  $b$  es única en  $\overline{R(b)}$ , se sigue que  $u_a = u_b$  en  $\overline{R(b)}$ . Resta probar que  $u_a = u_b$  en  $N(b)$ . Veamos que  $N(a) = N(b)$ : si  $x \in N(b)$ , entonces  $0 \leq \langle (c - |a|)x, x \rangle = -\langle |a|x, x \rangle$  con lo cual  $|a|x = 0$ . Luego,  $x \in N(|a|) = N(a)$  y  $N(b) \subseteq N(a)$ . De la misma forma, usando que  $u_b(\beta a - b) \geq 0$  se sigue que  $N(a) \subseteq N(b)$ . Entonces  $u_a = u_b$  en  $N(a)$  por definición (ver los Preliminares). ■

**Corolario 2.3.3.** La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $L(\mathcal{H})^s$ .

*Demostración.* Es fácil ver que  $\sim$  es reflexiva y simétrica. Para probar que  $\sim$  es transitiva, consideremos  $a, b, c \in L(\mathcal{H})^s$  tales que  $a \sim b$  y  $b \sim c$ . Por el Lema 2.3.2 tenemos que,  $u_a = u_b = u_c$ , y además, existen  $\alpha, \alpha' > 0$  tales que  $u_a(\alpha b - a) \geq 0$  y  $u_a(\alpha' c - b) \geq 0$ . Por lo tanto,  $u_a(\alpha \alpha' c - a) = u_a(\alpha \alpha' c - \alpha b + \alpha b - a) = \alpha u_a(\alpha' c - b) + u_a(\alpha b - a) \geq 0$ , con lo cual  $a \leq_{u_a} \alpha \alpha' c$ . Análogamente, existe  $\gamma > 0$  tal que  $c \leq_{u_c} \gamma a$ . Luego,  $a$  y  $c$  son equivalentes. ■

Denotemos con  $C_a$ ,  $C_a^{(1)}$  y  $C_a^{(2)}$  las clases de equivalencia o *componentes* de  $\sim$ ,  $\sim_1$  y  $\sim_2$  respectivamente.

Como consecuencia del Lema 2.3.2 y la Proposición 2.2.2, se obtiene la siguiente caracterización de la componente  $C_a$  de un operador autoadjunto  $a$  en términos de su descomposición polar.

**Proposición 2.3.4.** Dado  $a \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposición polar  $a = u_a|a|$ , entonces

$$C_a = \{b \in L(\mathcal{H})^s : R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2}) \text{ y } u_a = u_b\}.$$

*Demostración.* Consideremos  $b \in C_a$  con descomposición polar  $b = |b|u_b$ . Por el Lema 2.3.2, resulta que  $u_a = u_b$ . Además existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $u_a(\alpha b - a) \geq 0$  y  $u_b(\beta a - b) \geq 0$ . Pero  $u_a(\alpha b - a) = \alpha u_b b - |a| = \alpha|b| - |a|$  y  $u_b(\beta a - b) = \beta|a| - |b|$ , con lo cual  $|a| \leq \alpha|b|$  y  $|b| \leq \beta|a|$ . Entonces  $|a| \sim |b|$  y, por la Proposición 2.2.2, esto es equivalente a  $R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2})$ .

Recíprocamente, sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  tales  $u_a = u_b$  y  $|a| \sim |b|$ . Por lo tanto, existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $|a| \leq \alpha|b|$  y  $|b| \leq \beta|a|$ . Luego,  $u_a(\alpha b - a) = u_a(\alpha|b|u_b - |a|u_a) = \alpha|b| - |a| \geq 0$ ; con lo cual  $a \leq_{u_a} \alpha b$ . Análogamente,  $b \leq_{u_b} \beta a$ . ■

**Observación 2.3.5.** Si  $a \in L(\mathcal{H})^s$  tiene descomposición polar  $a = |a|u_a$ , entonces  $C_a = \{b \in L(\mathcal{H})^s : |b| \in C_{|a|}, u_b = u_a\}$ .

Además, como consecuencia de la Proposición 2.2.2, que caracteriza las componentes de operadores positivos, tenemos que:

$$C_a^{(1)} = \{b \in L(\mathcal{H})^s : R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2}), v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}\},$$

$$C_a^{(2)} = \{b \in L(\mathcal{H})^s : R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2})\},$$

donde  $\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a} = \{uv_a u^* : u \in \mathcal{U}\}$  es la órbita unitaria de  $v_a$ .

Luego,

$$C_a \subseteq C_a^{(1)} \subseteq C_a^{(2)}.$$

**Observación 2.3.6.** Si  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  son tales que sus isometrías parciales son unitariamente equivalentes, entonces sus partes unitarias también lo son. Para ver esto, sea  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $v_b = uv_a u^*$ , por lo tanto

$$uu_a u^* = uv_a u^* + u(1-p_a)u^* = v_b + u(1-p_a)u^*p_b + u(1-p_a)u^*(1-p_b) = u_b.$$

La recíproca no es cierta. En efecto, sean  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ ,  $a = p_{\mathcal{S}}$  y  $b = 1$ . Observemos que  $u_a = u_b = 1$ ; pero que  $v_a = a$  y  $v_b = 1$ . Tenemos entonces que  $v_a$  no es unitariamente equivalente a  $v_b$ , pues  $a$  no es inversible y  $v_b$  si lo es.

Veamos ahora que estas clases de equivalencia extienden a la componente de Thompson de operadores positivos. Si  $a \in L(\mathcal{H})^+$  y  $b \in L(\mathcal{H})^s$  es tal que  $b \in C_a$ , entonces  $1 = u_a = u_b$  con lo cual  $b \in L(\mathcal{H})^+$  y existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $a \leq ab$  and  $b \leq \beta a$ . Es decir, si  $a$  es positivo,  $C_a$  coincide con la componente de Thompson de  $a$ . Luego, las relaciones  $\sim, \sim_1, \sim_2$  extienden la relación definida en  $L(\mathcal{H})^+$ .

En particular, si  $a = 1$ , tenemos que

$$C_1 = C_1^{(1)} = GL(\mathcal{H})^+, \quad C_1^{(2)} = GL(\mathcal{H})^s.$$

## 2.4. Componentes de operadores autoadjuntos de rango cerrado

Cuando tenemos un operador autoadjunto de rango cerrado, se pueden dar otras descripciones de las distintas componentes de ese operador. Veremos en esta sección algunas de ellas.

A lo largo de esta sección  $a$  será un operador autoadjunto de rango cerrado. Denotemos por  $\tilde{a} = a|_{\overline{R(a)}}$ , con lo cual  $\tilde{a} \in GL(R(a))^s$ . Sea  $\mathcal{O}_{\tilde{a}}$  la órbita de  $\tilde{a}$  en  $R(a)$ , es decir,

$$\mathcal{O}_{\tilde{a}} = \{g\tilde{a}g^* : g \in GL(R(a))\}.$$

Si  $a$  es un operador inversible autoadjunto, del Teorema 2.1.3, resulta que  $\mathcal{O}_a = C_a^{(1)}$ . Más en general,

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  y  $b \in L(\mathcal{H})^s$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $b \in C_a^{(1)}$ ,
2.  $R(b) = R(a)$  y  $\dim R(b_i) = \dim R(a_i)$ , para  $i = 1, 2$ ,
3.  $\tilde{b} \in \mathcal{O}_{\tilde{a}}$ .

*Demostración.* 1  $\rightarrow$  2: Si  $b \in C_a^{(1)}$ , entonces  $R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2})$ . Como  $a$  tiene rango cerrado  $R(a) = R(|a|^{1/2})$ , con lo cual  $R(|b|^{1/2})$  es cerrado. Entonces  $R(|b|^{1/2}) = |b|^{1/2}(N(b)^\perp) = |b|^{1/2}(R(|b|^{1/2})) = R(b)$ ; y, por lo tanto,  $R(b) = R(a)$ . Además  $v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ , entonces  $v_b = uv_a u^*$  para  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ . De la misma forma que en la prueba de 2  $\rightarrow$  3 del Teorema 2.1.3 se puede probar que  $\dim R(b_i) = \dim R(a_i)$  for  $i = 1, 2$ .

2  $\rightarrow$  3: Notar que  $\tilde{b} = b|_{R(b)} \in GL(R(a))$  pues  $R(b) = R(a)$ . Aplicando el Teorema 2.1.3 en  $GL(R(a))^s$ , resulta 3.

3  $\rightarrow$  1: Consideremos  $b \in L(\mathcal{H})^s$  tal que  $\tilde{b} = g\tilde{a}g^*$  con  $g \in GL(R(a))$ . Como  $g \in GL(R(a))$ , entonces  $R(b) = R(\tilde{b}) = R(a)$ , con lo cual  $\tilde{b} \in GL(R(a))$ . Por el Teorema 2.1.3,  $u_{\tilde{b}} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{u_{\tilde{a}}}$ . Si  $c \in L(\mathcal{H})^s$ , se tiene que  $u_{\tilde{c}} = \tilde{v}_c$ , con lo cual  $\tilde{v}_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{\tilde{v}_a}$ , i.e. existe  $u \in \mathcal{U}(R(a))$  tal que  $\tilde{v}_b = u\tilde{v}_a u^*$ . Si  $w = up_{R(a)} + p_{N(a)}$ , resulta que  $w \in \mathcal{U}$ , con  $w^{-1} = u^{-1}p_{R(a)} + p_{N(a)}$  y además  $v_b = wv_a w^*$ . Luego  $b \in C_a^{(1)}$ . ■

Con el resultado anterior describimos la componente  $C_a^{(1)}$  en términos de los rangos de  $a$ ,  $a_1$  y  $a_2$ .

Consideremos ahora la aplicación

$$\pi : GL(\mathcal{H})^s \rightarrow \mathcal{P}, \quad \pi(c) = u_c,$$

donde  $c \in GL(\mathcal{H})^s$ ,  $c = |c|u_c$ .

Si  $u \in \mathcal{P}$ , resulta que la fibra de  $u$  de la aplicación  $\pi$  es la componente de  $u$ , i.e.

$$C_u = \pi^{-1}(\{u\}).$$

En efecto, observemos que  $b \in C_u$  si y sólo si  $b \in L(\mathcal{H})^s$ ,  $R(b) = R(u)$  y  $u_b = u$ , o equivalentemente  $b \in GL(\mathcal{H})^s$  y  $u_b = u$ . Pero esto ocurre si y sólo si  $b \in \pi^{-1}(\{u\})$ .

Por la Proposición 2.4.1,

$$C_u^{(1)} = \mathcal{O}_u.$$

Además,

$$C_u^{(2)} = GL(\mathcal{H})^s.$$

Más en general, consideremos

$$\pi_a : GL(R(a))^s \rightarrow \mathcal{P}(R(a)), \quad \pi_a(b) = u_b,$$

donde  $GL(R(a))^s$  es el conjunto de operadores autoadjuntos inversibles en  $R(a)$ ,  $\mathcal{P}(R(a))$  el conjunto de reflexiones en  $R(a)$  y  $b = |b|u_b$  es la descomposición polar de  $b$  en  $b \in GL(R(a))^s$ .

Por las proposiciones 2.3.4 y 2.4.1, tenemos las siguientes identificaciones

$$C_a \approx \pi_a^{-1}(\{\tilde{u}_a\}), \quad C_a^{(1)} \approx \mathcal{O}_{\tilde{a}}, \quad C_a^{(2)} \approx GL(R(a))^s,$$

donde  $\tilde{u}_a = u_{\tilde{a}}$

Como  $GL(R(a))^s$  es una variedad diferencial y además tiene una estructura de espacio homogéneo reductivo (ver [CPR93c]), resulta entonces que  $C_a^{(2)}$  también. Por otro lado, como  $\tilde{a} \in GL(R(a))^s$ , entonces  $\mathcal{O}_{\tilde{a}}$  es una variedad diferencial considerando el álgebra  $L(R(a))$ , también estudiada por Corach, Porta y Recht [CPR93c]. Luego,  $C_a^{(1)}$  tiene una estructura de variedad diferencial. Como  $\mathcal{O}_{\tilde{a}}$  es abierto en  $GL(R(a))$ , resulta además que  $C_a^{(1)}$  es una subvariedad de  $C_a^{(2)}$ .

Conocemos entonces la estructura diferencial de las componentes correspondientes a las relaciones  $\sim_1$  y  $\sim_2$ , para operadores de rango cerrado. En la Sección 2.7 estudiaremos la estructura diferencial de la componente  $C_a$ , que llamaremos *componente de Thompon*.

## 2.5. Componentes de Thompson de operadores autoadjuntos

Analizamos ahora con más detalle una de las tres relaciones de equivalencia en  $L(\mathcal{H})^s$  definidas en la sección anterior. Recordemos que estas clases de equivalencia extienden la ya definida en  $L(\mathcal{H})^+$ .

De ahora en adelante llamamos a  $C_a$  componente de Thompson de  $a$ . En principio, este nombre está justificado pues si  $a$  es un operador positivo,  $C_a$  coincide con la componente de Thompson de operadores positivos.

Definiremos en cada componente de Thompson una métrica completa y probaremos, en la Sección 2.7, que la componente de Thompson de un operador autoadjunto de rango cerrado tiene estructura de espacio homogéneo reductivo. Mostraremos también que estas estructuras son compatibles.

A continuación veremos que la componente de Thompson de un operador autoadjunto es homeomorfa al producto de dos componentes de Thompson de operadores positivos.

**Teorema 2.5.1.** Consideremos  $a \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposición positiva ortogonal  $a = a_1 - a_2$ . Entonces  $C_a$  es homeomorfa a  $C_{a_1} \times C_{a_2}$ .

*Demostración.* Dado  $b \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposición positiva ortogonal  $b = b_1 - b_2$ , definimos

$$\psi : L(\mathcal{H})^s \rightarrow L(\mathcal{H})^+ \times L(\mathcal{H})^+, \quad \psi(b) = (b_1, b_2).$$

La aplicación  $\psi$  está bien definida pues, por el Lema 1.1.5, la descomposición positiva ortogonal es única. Se observa fácilmente que  $\psi$  es continua e inyectiva.

Veamos ahora que  $Im(\psi) = C_{a_1} \times C_{a_2}$ . Si  $b \in C_a$ , entonces  $u_a = u_b$  y existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que  $(\alpha b - a)u_a \geq 0$  y  $(\beta a - b)u_a \geq 0$ , con lo cual  $q_a(\alpha b - a)u_a q_a = q_a(\alpha b - a)q_a \geq 0$ , donde  $q_a = \frac{u_a + 1}{2}$ . Como  $bq_a = bq_b = \frac{|b| + b}{2} = b_1$  y  $aq_a = a_1$ , entonces se sigue que  $q_a b q_a = q_a b_1 = q_b b_1 = b_1$  y  $q_a a q_a = a_1$ , con lo cual  $\alpha b_1 - a_1 \geq 0$ . Análogamente,  $\beta a_1 \geq b_1$ . Luego,  $b_1 \in C_{a_1}$ . De la misma forma, resulta que  $b_2 \in C_{a_2}$ .

Recíprocamente, sea  $(b_1, b_2) \in C_{a_1} \times C_{a_2}$ , entonces  $b_1, b_2 \in L(\mathcal{H})^+$  y  $R(b_i^{1/2}) = R(a_i^{1/2})$ , para  $i = 1, 2$ . Como  $\overline{R(b_1)} = \overline{R(b_1^{1/2})} = \overline{R(a_1^{1/2})} = \overline{R(a_1)}$  y  $\overline{R(b_2)} = \overline{R(b_2^{1/2})} = \overline{R(a_2^{1/2})} = \overline{R(a_2)}$ , resulta que  $\overline{R(b_1)}$  y  $\overline{R(b_2)}$  son ortogonales, ya que  $\overline{R(a_1)}$  es ortogonal a  $\overline{R(a_2)}$ . Luego,  $b = b_1 - b_2$  es la descomposición positiva ortogonal de  $b$ , con lo cual  $|b| = b_1 + b_2$ . Además  $b \in C_a$ . En efecto, como  $b_i \in C_{a_i}$  entonces existen  $\alpha_i > 0$  tales que  $a_i \leq \alpha_i b_i$  para  $i = 1, 2$ . Luego,

$$|a| \leq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \leq \alpha'(b_1 + b_2) \leq \alpha' |b|,$$

donde  $\alpha' = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ . De manera similar, existe  $\beta' > 0$  tal que  $|b| \leq \beta'|a|$ . Por lo tanto,  $|b| \in C_{|a|}$ . Falta probar que  $u_a = u_b$ , o equivalentemente que  $q_a = q_b$ . Como  $|b| \in C_{|a|}$ , entonces  $N(a) = N(b)$ . Además  $R(a_1^{1/2}) = R(b_1^{1/2})$  pues  $b_1 \in C_{a_1}$ ; y, por lo tanto,  $\overline{R(a_1)} = \overline{R(a_1^{1/2})} = \overline{R(b_1^{1/2})} = \overline{R(b_1)}$ . Entonces  $R(q_a) = \overline{R(a_1)} \oplus N(a)$  (ver los Preliminares). Luego  $R(q_a) = R(q_b)$  con lo cual  $q_a = q_b$ , ya que  $q_a$  y  $q_b$  son proyectores ortogonales. ■

**Corolario 2.5.2.** *Si  $a = a_1 - a_2$  es la descomposición positiva ortogonal de  $a \in L(\mathcal{H})^s$ , entonces*

$$C_a = \{b_1 - b_2 \in L(\mathcal{H})^s : b_1 \in C_{a_1}, b_2 \in C_{a_2}\}.$$

En el caso en que  $a$  tiene rango cerrado, podemos dar además las siguientes descripciones de la componente de Thompson de  $a$ .

**Proposición 2.5.3.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ , entonces*

$$C_a = \{b \in L(\mathcal{H})^s : R(b) = R(a), u_b = u_a\},$$

o equivalentemente  $C_a = \{b \in CR(\mathcal{H})^s : v_b = v_a\}$ .

*Demostración.* Sabemos que,  $b \in C_a$  si y sólo si  $|b| \in C_{|a|}$  y  $u_b = u_a$ . Si  $b \in C_a$  entonces  $R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2})$ , con lo cual  $R(|b|^{1/2})$  es cerrado. Luego  $R(b) = R(|b|) = |b|^{1/2}(R(|b|^{1/2})) = |b|^{1/2}(\overline{R(|b|^{1/2})}) = R(|b|^{1/2})$ . Por lo tanto,  $R(a) = R(b)$ . Recíprocamente, sea  $b \in L(\mathcal{H})^s$  tal que  $R(b) = R(a)$  y  $u_b = u_a$ . Entonces  $R(b) = R(|b|)$  es cerrado pues  $a$  tiene rango cerrado. Luego,  $R(|b|^{1/2}) = R(|b|) = R(b) = R(a) = R(|a|^{1/2})$ . ■

**Corolario 2.5.4.** *Consideremos  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  con descomposición polar  $a = v_a|a|$ , entonces  $C_a = C_{v_a}$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $R(v_a) = R(a)$ . Como además la isometría parcial correspondiente a  $v_a$  es  $v_a$ , de la Proposición anterior resulta que  $v_a \in C_a$ , con lo cual  $C_a = C_{v_a}$ . ■

## 2.6. Métrica en las componentes de Thompson

Definimos ahora una métrica en la componente de Thompson de un operador autoadjunto, que sea compatible con la métrica de Thompson definida para la componente de operadores positivos.

Sea  $a = a_1 - a_2$  la descomposición positiva ortogonal de  $a \in L(\mathcal{H})^s$ . Como  $C_a$  es homeomorfa a  $C_{a_1} \times C_{a_2}$ , ver Teorema 2.5.1, es natural definir la siguiente métrica en las componentes en  $L(\mathcal{H})^s$ : dados  $b, c \in C_a$ , llamamos *métrica de Thompson* a

$$d_T(b, c) = \max\{d_T(b_1, c_1), d_T(b_2, c_2)\},$$

donde  $d_T$  para  $i = 1, 2$  del lado derecho es la métrica de Thompson ya definida en  $L(\mathcal{H})^+$ , es decir:

$$d_T(b_i, c_i) = \log \max\{\inf\{\alpha > 0 : b_i \leq \alpha c_i\}, \inf\{\beta > 0 : c_i \leq \beta b_i\}\},$$

para  $i = 1, 2$ .

Notemos que  $d_T$  está bien definida por la unicidad de la descomposición positiva ortogonal de un operador autoadjunto y el hecho que  $b_i, c_i \in C_{a_i}$ ,  $i = 1, 2$ , donde  $d_T$  está definida.

También observemos que la métrica  $d_T$  coincide con la métrica de Thompson en componentes de operadores positivos.

**Proposición 2.6.1.**  $(C_a, d_T)$  es un espacio métrico completo.

*Demostración.* Sea  $\{b^n\}$  una sucesión de Cauchy en  $(C_a, d_T)$  y sea  $b^n = b_1^n - b_2^n$  la descomposición positiva ortogonal de  $b^n$ . Resulta entonces que  $\{b_i^n\}$  es de Cauchy en  $(C_{a_i}, d_T)$ , con  $i = 1, 2$ . Como  $(C_{a_i}, d_T)$  es completo, sea  $b_i \in C_{a_i}$  tal que  $\{b_i^n\}$  converge a  $b_i$  en  $(C_{a_i}, d_T)$ , con  $i = 1, 2$ . Luego, si  $b = b_1 - b_2$  entonces  $\{b^n\}$  converge a  $b$  y, por el Corolario 2.5.2 se tiene que  $b \in C_a$ . Por lo tanto  $C_a$  es completo con la métrica  $d_T$ . ■

Sea  $c \in L(\mathcal{H})^s$  entonces  $R(c) = R(|c|)$ . Por lo tanto, si  $c$  es de rango cerrado resulta que  $c|_{R(c)}, |c||_{R(c)} \in G(R(c))$  y además, en este caso,  $c^{-1} = (c|_{R(c)})^{-1} = c^\dagger|_{R(c)}$ , donde  $c^\dagger$  es la pseudoinversa de Moore-Penrose  $c$ . Observemos que  $c^{-1} \in GL(R(c))$ . Recordemos también que si  $c = c_1 - c_2 \in L(\mathcal{H})^s$  es la descomposición positiva ortogonal de  $c$ , entonces  $c \in CR(\mathcal{H})^s$  si y sólo  $c_i \in CR(\mathcal{H})^+$ , con  $i = 1, 2$ .

**Proposición 2.6.2.** Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ . Consideremos  $b, c \in C_a$  con descomposiciones positivas ortogonales  $b = b_1 - b_2$  y  $c = c_1 - c_2$ ; entonces

$$d_T(b, c) = \|\log\{(b_1^{1/2})^\dagger c_1 (b_1^{1/2})^\dagger + (b_2^{1/2})^\dagger c_2 (b_2^{1/2})^\dagger\}|_{R(b)}\|.$$

*Demostración.* Tenemos que  $b_i, c_i \in C_{a_i}$  para  $i = 1, 2$ , pues  $b, c \in C_a$  y  $a = a_1 - a_2$  es la descomposición positiva ortogonal de  $a$ . Como  $b_i^{-1/2} c_i b_i^{-1/2} \in GL(R(b_i))^+$ , entonces

$d_T(b_i, c_i) = \|\log(((b_i^{1/2})^\dagger c_i (b_i^{1/2})^\dagger))|_{R(b_i)}\|$  para  $i = 1, 2$ , ver Sección 2.2 o [CM99, Teorema 3.11]. Luego,

$$\begin{aligned} d_T(b, c) &= \max\{\|\log((b_1^{1/2})^\dagger c_1 (b_1^{1/2})^\dagger)\|, \|\log((b_2^{1/2})^\dagger c_2 (b_2^{1/2})^\dagger)\|\} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \log b_1^{-1/2} c_1 b_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & \log b_2^{-1/2} c_2 b_2^{-1/2} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \log \begin{pmatrix} b_1^{-1/2} c_1 b_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & b_2^{-1/2} c_2 b_2^{-1/2} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \|\log[(b_1^{1/2})^\dagger c_1 (b_1^{1/2})^\dagger + (b_2^{1/2})^\dagger c_2 (b_2^{1/2})^\dagger]|_{R(b)}\|, \end{aligned}$$

ya que  $\left\| \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \right\| = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$  si  $v_i \in L(R(a_i))$ ,  $i = 1, 2$ . ■

**Corolario 2.6.3.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ . Entonces si  $b, c \in C_a$  se tiene que*

$$d_T(b, c) = \|\log([(b|^{1/2})^\dagger |c| (b|^{1/2})^\dagger]|_{R(b)}\|.$$

*Demostración.* Como  $R(a)$  es cerrado,  $a_1$  y  $a_2$  son operadores de rango cerrado. Entonces  $R(b_i^{1/2})$  y  $R(c_i^{1/2})$  son también cerrados. Por lo tanto,  $(b_i^{1/2})^\dagger c_i (b_i^{1/2})^\dagger = b_i^{-1/2} c_i b_i^{-1/2}$  en  $R(b_i^{1/2}) = R(a_i)$  (ya que es cerrado) y

$$d_T(b, c) = \left\| \log \begin{pmatrix} b_1^{-1/2} c_1 b_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & b_2^{-1/2} c_2 b_2^{-1/2} \end{pmatrix} \right\|.$$

Por otro lado, si  $b, c \in C_a$  entonces  $|b|^{-1/2} |c| |b|^{-1/2} \in G^+(R(a))$ , con lo cual

$$\begin{aligned} \|\log(|b|^{-1/2} |c| |b|^{-1/2})\| &= \|\log((b_1 + b_2)^{-1/2} (c_1 + c_2) (b_1 + b_2)^{-1/2})\| \\ &= \left\| \log \left( \begin{pmatrix} b_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & b_2^{-1/2} \end{pmatrix} (c_1 + c_2) \begin{pmatrix} b_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & b_2^{-1/2} \end{pmatrix} \right) \right\| \\ &= \left\| \log \begin{pmatrix} b_1^{-1/2} c_1 b_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & b_2^{-1/2} c_2 b_2^{-1/2} \end{pmatrix} \right\| = d_T(b, c), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

**Corolario 2.6.4.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ . Si  $b, c \in C_a$  entonces*

$$d_T(b, c) = d_T(|b|, |c|).$$

Las caracterizaciones de la métrica de Thompson que obtuvimos para un operador autoadjunto de rango cerrado, se pueden extender al caso general. Para ello usaremos el siguiente resultado.

**Lema 2.6.5.** Si  $\mathcal{M}$  es un subespacio de  $\mathcal{H}$  y  $b, c \in L(\mathcal{H})^+$  son tales que  $R(b^{1/2}) = R(c^{1/2}) = \mathcal{M}$ , entonces  $(b^{1/2}|_{\mathcal{M}})^{-1}c(b^{1/2}|_{\mathcal{M}})^{-1}$  admite una extensión a un elemento de  $GL(\overline{\mathcal{M}})^+$ .

*Demostración.* Ver [CM99, Corolario 3.10, pag. 310]. ■

Sea  $a \in L(\mathcal{H})^s$  y  $b, c \in C_a$ , con descomposiciones positivas ortogonales  $a = a_1 - a_2, b = b_1 - b_2, c = c_1 - c_2$ , respectivamente. Entonces, por el Corolario 2.5.2),  $b_i, c_i \in C_{a_i}$ , o equivalentemente,  $R(b^{1/2}) = R(c^{1/2}) = R(a^{1/2})$ . Por el lema anterior,

$$(b_1^{1/2})^\dagger c_1 (b_1^{1/2})^\dagger|_{R(a_1^{1/2})} + (b_2^{1/2})^\dagger c_2 (b_2^{1/2})^\dagger|_{R(a_2^{1/2})}$$

admite una extensión acotada e inversible en  $\overline{R(a)} = \overline{R(a_1)} + \overline{R(a_2)}$ , con lo cual la fórmula de la Proposición 2.6.2 se generaliza al caso autoadjunto general. Análogamente se extienden los corolarios 2.6.3 y 2.6.4 (ver [CM99, Teorema 3.11]).

## 2.7. Estructura diferencial de las componentes de Thompson

En esta sección estudiamos la estructura diferencial de la componente de Thompson de un operador autoadjunto de rango cerrado. Veremos que, como en el caso positivo, la estructura métrica de  $(C_a, d_T)$  para  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  está relacionada con la estructura diferencial.

A lo largo de esta sección  $a$  será un operador autoadjunto de rango cerrado y  $a = a_1 - a_2$  su descomposición positiva ortogonal. Sabemos que  $C_{a_i}$  se identifica con  $GL(R(a_i))^+$  para  $i = 1, 2$  y que  $C_{a_i}$  es un espacio homogéneo de  $GL(R(a_i))$ ,  $i = 1, 2$ . Como además  $C_a$  es homeomorfa a  $C_{a_1} \times C_{a_2}$ , veremos que  $C_a$  admite una estructura natural de espacio homogéneo de  $GL(R(a_1)) \times GL(R(a_2))$ . Damos los detalles a continuación.

Sean  $\mathcal{M} = R(a)$ ,  $\mathcal{M}_1 = R(a_1)$ ,  $\mathcal{M}_2 = R(a_2)$ . Como  $\mathcal{M}, \mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  son subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ , consideremos los proyectores ortogonales  $p = p_{\mathcal{M}}, p_1 = p_{\mathcal{M}_1}$  y  $p_2 = p_{\mathcal{M}_2}$ . Observemos que  $p = p_1 + p_2$ .

Dado  $b \in C_a$ , sabemos que la descomposición polar de  $b$  es  $b = v_a|b|$  donde  $v_a$  es la isometría parcial de  $a$ ,  $v_a = p_1 - p_2$  (ver Preliminares).

Notaremos  $G_a$  al subgrupo de  $GL(\mathcal{H})$  de elementos inversibles  $g$  que fijan el rango de  $a_1$  y de  $a_2$ , y tales que  $g(x) = x$ ,  $x \in N(a)$ ; i.e.

$$G_a = \{g \in GL(\mathcal{H}) : g(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_1, g(\mathcal{M}_2) = \mathcal{M}_2, g|_{N(a)} = id|_{N(a)}\}.$$

Observemos que la descomposición matricial de  $g \in G_a$  inducida por la proyección  $p = p_1 + p_2$  es:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $g_1 = p_1 g p_1|_{\mathcal{M}_1}$ ,  $g_2 = p_2 g p_2|_{\mathcal{M}_2}$  y  $g = g_1 p_1 + g_2 p_2 + 1 - p$ . Notemos que el grupo  $G_a$  es homeomorfo a  $GL(\mathcal{M}_1) \times GL(\mathcal{M}_2)$ .

Hay una acción natural de  $G_a$  sobre  $C_a$ , definida por

$$L : G_a \times C_a \rightarrow C_a, \quad L_g b = gbg^*, \quad b \in C_a, g \in G_a.$$

Equivalentemente,  $L_g b = \begin{pmatrix} g_1 b_1 g_1^* & 0 & 0 \\ 0 & g_2 b_2 g_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  donde  $b = b_1 - b_2$  es la descomposición positiva ortogonal de  $b$ .

**Lema 2.7.1.** *L es diferenciable y transitiva.*

*Demostración.* Es claro que  $L$  es diferenciable. Para ver que  $L$  es transitiva, sean  $b, c \in C_a$  con descomposiciones positivas ortogonales  $b = b_1 - b_2$ ,  $c = c_1 - c_2$ . Consideremos  $g = c_1^{1/2}(b_1^{1/2})^\dagger - c_2^{1/2}(b_2^{1/2})^\dagger + (1-p)$ , con lo cual  $g \in G_a$  pues  $g^{-1} = b_1^{1/2}(c_1^{1/2})^\dagger - b_2^{1/2}(c_2^{1/2})^\dagger + (1-p)$ . Finalmente,  $L_g b = c_1^{1/2}(b_1^{1/2})^\dagger b_1(b_1^{1/2})^\dagger c_1^{1/2} - c_2^{1/2}(b_2^{1/2})^\dagger b_2(b_2^{1/2})^\dagger c_2^{1/2} = c_1 - c_2 = c$ . ■

El grupo de isotropía  $I_b$  de  $b \in C_a$  es el grupo de los operadores  $g \in G_a$  tales que  $L_g b = b$ , i.e.

$$I_b = \{g \in G_a : gbg^* = b\}.$$

En particular,

$$I_{v_a} = \{g = g_1 p_1 + g_2 p_2 + 1 - p \in G_a : g_1 g_1^* = id|_{R(a_1)}, g_2 g_2^* = id|_{R(a_2)}\}.$$

Para cada  $b \in C_a$ , la acción  $L$  determina la siguiente función diferenciable

$$\pi_b : G_a \rightarrow C_a, \quad \pi_b(g) = L_g b = gbg^*.$$

Tenemos entonces que la aplicación  $\pi_b$  es suryectiva, pues, por Lema 2.7.1,  $L$  es transitiva. Además,  $\pi_b$  admite secciones locales. En efecto,

$$s_b : C_a \rightarrow G_a, \quad s_b(c) = |c|^{1/2}(|b|^{1/2})^\dagger v_a + (1-p),$$

define una sección local de  $\pi_b$ , i.e.,  $\pi_b \circ s_b = id_{C_a}$ . Como  $|c|^{1/2} = c_1^{1/2} + c_2^{1/2}$  y  $(|b|^{1/2})^\dagger = (b_1^{1/2})^\dagger + (b_2^{1/2})^\dagger$ , resulta que

$$s_b(c) = (c_1^{1/2} + c_2^{1/2})((b_1^{1/2})^\dagger + (b_2^{1/2})^\dagger)(p_1 - p_2) + 1 - p = c_1^{1/2}(b_1^{1/2})^\dagger - c_2^{1/2}b_2^{1/2})^\dagger + 1 - p,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \pi_b \circ s_b(c) &= (c_1^{1/2}(b_1^{1/2})^\dagger - c_2^{1/2}(b_2^{1/2})^\dagger + 1 - p)(b_1 - b_2)(c_1^{1/2}(b_1^{1/2})^\dagger - c_2^{1/2}(b_2^{1/2})^\dagger \\ &\quad + 1 - p \\ &= c_1 - c_2 = c. \end{aligned}$$

**Lema 2.7.2.** *Dado  $c \in C_a$ , entonces  $\pi_b^{-1}(c)$  es homeomorfa al grupo de isotropía  $I_b$ .*

*Demuestra*ón. Sea  $c = c_1 - c_2$  la descomposición positiva ortogonal de  $c$ . Como  $c \in C_a$ , tenemos que  $c_i \in C_{a_i}$ , para  $i = 1, 2$ . Mostraremos que  $\pi_b^{-1}(c) = (|c|^{1/2}(|b|^{1/2})^\dagger p_a + (1 - p_a))I_b$ . Consideremos  $g \in \pi_b^{-1}(c)$ , entonces existe  $g = g_1 p_1 + g_2 p_2 + (1 - p_a) \in G_a$  tal que  $gbg^* = c$ . Como  $g_i \in GL(R(a_i))$ , entonces  $g_i b_i g_i^* = c_i$  para  $i = 1, 2$ . Sea  $h_i = b_i^{1/2} c_i^{-1/2} g_i$ , donde  $c_i^{-1/2} = (c_i^{1/2})^\dagger|_{R(a_i)}$ , con  $i = 1, 2$ . Entonces, para  $i = 1, 2$ ; resulta que  $h_i b_i h_i^* p_i = b_i^{1/2} c_i^{-1/2} g_i b_i g_i^* c_i^{-1/2} b_i^{1/2} p_i = b_i$ . Luego, si  $h = h_1 p_1 + h_2 p_2 + (1 - p)$  se tiene que  $h \in G_a$  y  $hbh^* = b$ , con lo cual  $h \in I_b$ . Además  $(|c|^{1/2}(|b|^{1/2})^\dagger p_a + (1 - p_a))h = c_1^{1/2} b_1^{-1/2} h_1 p_1 + c_2^{1/2} b_2^{-1/2} h_2 p_2 + (1 - p_a) = g_1 p_1 + g_2 p_2 + (1 - p_a) = g$ . Recíprocamente, sea  $g = (|c|^{1/2}(|b|^{1/2})^\dagger p_a + (1 - p_a))h$ , con  $h \in I_b$ . Tenemos entonces que  $g \in G_a$  y además  $gbg^* = |c|^{1/2}(|b|^{1/2})^\dagger h b h^* (|b|^{1/2})^\dagger |c|^{1/2} = |c|^{1/2} v_b |c|^{1/2} = c$ , pues  $v_c = v_b$ . Por lo tanto  $g \in \pi_b^{-1}(c)$ . ■

Estas propiedades muestran que  $C_a$  es un espacio homogéneo de  $GL(\mathcal{H})$  y que  $\pi_b$  es un fibrado principal con grupo estructural  $I_b$ .

A continuación veremos que, además,  $C_a$  tiene estructura de espacio homogéneo reductivo, es decir mostraremos que existe una distribución de subespacios cerrados  $\mathcal{H}_g^{(b)}$  de  $(TG_a)_g$  con las siguientes propiedades:

1.  $(TG_a)_g = N(T\pi_b)_g \oplus \mathcal{H}_g^{(b)}$ ,  $g \in G_a$ ,
2.  $\mathcal{H}_1^{(b)} = h \mathcal{H}_1^{(b)} h^{-1}$ , para todo  $h \in I_b$ ,
3. la aplicación  $g \rightarrow \mathcal{H}_g^{(b)}$  es suave.

Para un tratamiento general de la geometría de los espacios homogéneos reductivos se sugiere ver, por ejemplo, el trabajo [MLR92].

Consideremos  $g \in G_a$ . El siguiente resultado da una caracterización de  $(TG_a)_g$ , el espacio tangente a  $G_a$  en  $g$ .

**Proposición 2.7.3.** *Dado  $g \in G_a$ , entonces*

$$(TG_a)_g = \{X \in L(\mathcal{H}) : X = X_1 p_1 + X_2 p_2, X_1 \in L(\mathcal{M}_1), X_2 \in L(\mathcal{M}_2)\}.$$

*Demuestração.* Consideremos  $g = g_1 p_1 + g_2 p_2 + 1 - p \in G_a$ . Dado  $X \in (TG_a)_g$ , existe una curva  $g(t) \subseteq G_a$  tal que  $g(t) = g_1(t)p_1 + g_2(t)p_2 + 1 - p$ ,  $= \begin{pmatrix} g_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & g_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $g(0) = g$  y  $\dot{g}(0) = X$ . Por lo tanto,  $\dot{g}(t) = \dot{g}_1(t)p_1 + \dot{g}_2(t)p_2, = \begin{pmatrix} \dot{g}_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{g}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , con lo cual

$$\dot{g}(0) = \dot{g}_1(0)p_1 + \dot{g}_2(0)p_2 = \begin{pmatrix} \dot{g}_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{g}_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X.$$

Luego,  $X = X_1 p_1 + X_2 p_2$ , donde  $X_1 = \dot{g}_1(0) \in L(\mathcal{M}_1)$ ,  $X_2 = \dot{g}_2(0) \in L(\mathcal{M}_2)$ . O bien,  $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $X_1 \in L(\mathcal{M}_1)$ ,  $X_2 \in L(\mathcal{M}_2)$ .

Recíprocamente, sea  $X \in L(\mathcal{H})$  tal que  $X = X_1 p_1 + X_2 p_2$ ,  $X_1 \in L(\mathcal{M}_1)$ ,  $X_2 \in L(\mathcal{M}_2)$ . Si  $g(t) = ge^{g^{-1}Xt}$  entonces es fácil ver que  $g(t) \subseteq G_a$ , y  $\dot{g}(t) = e^{g^{-1}Xt}X$ , con lo cual  $g(0) = g$  y  $\dot{g}(0) = X$ . ■

Observemos que, en forma matricial

$$(TG_a)_g = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : X_1 \in L(\mathcal{M}_1), X_2 \in L(\mathcal{M}_2) \right\}.$$

Dado  $c \in C_a$ , notamos con  $(TC_a)_c$  al espacio tangente a  $C_a$  en  $c$ . De la siguiente proposición se puede concluir que este espacio se identifica con  $L(\mathcal{M}_1)^s \times L(\mathcal{M}_2)^s$ .

**Proposición 2.7.4.** *Consideremos  $c \in C_a$ , entonces*

$$(TC_a)_c = \{X \in L(\mathcal{H}) : X = X_1 p_1 + X_2 p_2, X_1 \in L(\mathcal{M}_1)^s, X_2 \in L(\mathcal{M}_2)^s\}.$$

*Demostración.* Sea  $X \in (TC_a)_c$ , entonces existe  $\gamma(t) \subseteq C_a$  tal que  $\gamma(0) = c$  y  $\dot{\gamma}(0) = X$ . Sea  $\gamma(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$  la descomposición positiva ortogonal de  $\gamma(t)$ . Observemos que, para cada  $t$ , se tiene que  $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in L(\mathcal{H})^+$ ,  $R(\gamma_1(t)) = R(a_1)$  y  $R(\gamma_2(t)) = R(a_2)$ . Si  $X_1 = \dot{\gamma}_1(0)|_{R(\gamma_1)}$  y  $X_2 = -\dot{\gamma}_2(0)|_{R(\gamma_2)}$ , resulta que  $\dot{\gamma}_1(0) = X_1 p_1$  y  $\dot{\gamma}_2(0) = -X_2 p_2$ , con lo cual  $X = \dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0) = X_1 p_1 + X_2 p_2$ . Además  $X_1^* = (\dot{\gamma}_1(0)|_{R(\gamma_1)})^* = \dot{\gamma}_1(0)^*|_{R(\gamma_1)} = \dot{\gamma}_1(0)|_{R(\gamma_1)} = X_1$ , pues  $\dot{\gamma}_1(0)^* = (\gamma_1(t)^*)_{t=0} = (\gamma_1(t))_{t=0}$ . Análogamente,  $X_2^* = X_2$ . Luego,  $X = X_1 p_1 + X_2 p_2$ , donde  $X_i \in L(R(a_i))^s$ , con  $i = 1, 2$ .

Recíprocamente, sea  $X = X_1 p_1 + X_2 p_2$ , donde  $X_i \in L(R(a_i))^s$ , con  $i = 1, 2$ . Sea  $c = c_1 - c_2$  la descomposición positiva ortogonal de  $c$  y sean  $c_1(t) = c_1 e^{c_1^\dagger X_1 t} p_1$  y  $c_2(t) = c_2 e^{-c_2^\dagger X_2 t} p_2$ . Es fácil ver que  $c(t) = c_1(t) - c_2(t)$  es la descomposición ortogonal de  $c(t)$ . Como además  $R(c_i(t)) = R(c_i)$ , para  $i = 1, 2$ , resulta que  $c_i(t) \in C_{a_i}$ . Por lo tanto,  $c(t) \in C_a$  para todo  $t$ . Veamos también que  $c(0) = c_1 p_1 - c_2 p_2 = c$ , pues  $R(c_i) = R(a_i)$ , para  $i = 1, 2$ . Además  $\dot{c}(t) = X_1 e^{c_1^\dagger X_1 t} p_1 + X_2 e^{-c_2^\dagger X_2 t} p_2$ , con lo cual  $\dot{c}(0) = X_1 p_1 + X_2 p_2 = X$ . ■

Calculemos ahora la aplicación tangente,  $(T\pi_b)_g$ , de  $\pi_b$  en  $g \in G_a$ .

**Proposición 2.7.5.** *Para cada  $g \in G_a$ , resulta*

$$(T\pi_b)_g : (TG_a)_g \rightarrow (TC_a)_{gbg^*}, \quad (T\pi_b)_g(X) = Xbg^* + gbX^*.$$

*Demostración.* Sea  $X \in (TG_a)_g$ , entonces existe una curva  $g(t) \subseteq G_a$  tal que  $g(0) = g$  y  $\dot{g}(0) = X$ . Consideremos  $\gamma(t) = \pi_b(g(t)) = g(t)bg(t)^*$ . Resulta que  $\gamma(0) = gbg^*$  y  $\dot{\gamma}(t) = \dot{g}(t)bg(t)^* + g(t)b\dot{g}(t)^*$ , con lo cual  $\dot{\gamma}(0) = Xbg^* + gbX^*$ , como queríamos. ■

En particular, la aplicación tangente de  $\pi_b$  en  $g = 1$  se identifica con

$$(T\pi_b)_1 : (TG_a)_1 \rightarrow (TC_a)_b, \quad (T\pi_b)_1(X) = Xb + bX^*.$$

Veamos ahora que

$$\begin{aligned} N(T\pi_b)_1 &= \{X \in (TG_a)_1 : Xb = -bX^*\} \\ &= \{X \in (TG_a)_1 : X = X_1 p_1 + X_2 p_2, X_i b_i = -b_i X_i^*, i = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Observemos ahora lo siguiente, como  $b_i|_{\mathcal{M}_i} \in GL(\mathcal{M}_i)^+$  para  $i = 1, 2$ , definimos en  $\mathcal{M}_i$  el siguiente producto interno

$$\langle x, y \rangle_{b_i} = \langle b_i x, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{M}_i.$$

Recordemos que el  $b_i$ -adjunto de  $u \in L(\mathcal{M}_i)$  es  $u^{*b_i} = b_i^{-1} u^* b_i$ .

Notemos entonces que  $N(T\pi_b)_1 = \{X \in (TG_a)_1 : X_i^{*_{b_i^{-1}}} = -X_i, i = 1, 2\}$ . Es decir,  $N(T\pi_b)_1$  se identifica con los  $b_i^{-1}$ -antiadjuntos.

Es natural entonces elegir  $\mathcal{H}_1^{(b)}$  como el conjunto de los  $b_i^{-1}$ -adjuntos, i.e.:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^{(b)} &= \{X \in (TG_a)_1 : X_i^{*_{b_i^{-1}}} = X_i, i = 1, 2\} \\ &= \{X \in (TG_a)_1 : X = X_1p_1 + X_2p_2, X_ib_i = b_iX_i^*p_i, i = 1, 2\},\end{aligned}$$

y para cada  $g \in G_a$ ,

$$\mathcal{H}_g^{(b)} = g\mathcal{H}_1^{(b)}.$$

El espacio  $\mathcal{H}_g^{(b)}$  se llama *espacio horizontal* en  $g \in G_a$  y  $\mathcal{V}_g^{(b)} = N(T\pi_b)_g$  se llama *espacio vertical* en  $g \in G_a$ .

Notemos que  $N(T\pi_b)_g = g\mathcal{V}_1^{(b)}$ . En efecto, sea  $Y = gX$  con  $X \in \mathcal{V}_1^{(b)}$ , entonces  $Ybg^* + gbY^* = gXbg^* + gbX^*g^* = g(Xb + bX^*)g^* = 0$  pues  $X \in \mathcal{V}_1^{(b)}$ . Recíprocamente, sea  $Y \in N(\pi_b)_g$  y sea  $X = g^{-1}Y$ . Entonces  $Xb + bX^* = g^{-1}Yb + bY^*g^{-1*} = g^{-1}(Ybg^* + gbY^*)g^{-1*} = 0$ , con lo cual  $X \in \mathcal{V}_1^{(b)}$ .

Observemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_g^{(b)} &= N(T\pi_b)_g = \{X \in (TG_a)_g : Xbg^* + gbX^* = 0\} \\ &= \{X \in (TG_a)_g : X = X_1p_1 + X_2p_2, X_ib_ig_i^* + g_ib_1X_i^* = 0, i = 1, 2\}.\end{aligned}$$

**Proposición 2.7.6.** Para  $g \in G_a$ , tenemos que  $\mathcal{H}_g^{(b)}$  satisface

1.  $(TG_a)_g = \mathcal{H}_g^{(b)} \oplus \mathcal{V}_g^{(b)}$ ,
2.  $h\mathcal{H}_1^{(b)}h^{-1} = \mathcal{H}_1^{(b)}$  si  $h \in I_b$ .

*Demostración.* 1. Consideremos  $X \in (TG_a)_g$ . Sean

$$Y = \frac{1}{2}(X + gbX^*(g^*)^{-1}(b^\dagger + (1 - p_a))) \text{ y } Z = \frac{1}{2}(X - gbX^*(g^*)^{-1}(b^\dagger + (1 - p_a))).$$

No es difícil ver que  $X = Y + Z$ ,  $Y \in \mathcal{H}_g^{(b)}$  y  $Z \in \mathcal{V}_g^{(b)}$ . La otra contención es inmediata.

2. Sea  $Y = hXh^{-1}$  con  $X \in \mathcal{H}_1^{(b)}$ ,  $h \in I_b$ . Veamos que  $bY^* = bh^{-1*}X^*h^* = hbX^*h^* = hXbh^* = hXh^{-1}b = Yb$ , pues  $Xb = bX^*$  y  $hbh^* = b$ . Luego  $Y \in \mathcal{H}_1^{(b)}$ . Recíprocamente, dados  $X \in \mathcal{H}_1^{(b)}$  y  $h \in I_b$ , consideremos  $Y = h^{-1}Xh$ . Entonces  $bY^* = bh^*X^*h^{-1*} = h^{-1}Xbh^{-1*} = h^{-1}Xhb = Yb$ , con lo cual  $Y \in \mathcal{H}_1^{(b)}$ . Como además  $hYh^{-1} = X$ , resulta que  $X \in h\mathcal{H}_1^{(b)}h^{-1}$ . ■

La aplicación  $g \rightarrow \mathcal{H}_g^{(b)}$  es suave en el siguiente sentido: la aplicación que asigna a cada  $g \in G_a$  la proyección  $\phi_g^{(b)}$ , en  $(TG_a)_g$  con núcleo  $\mathcal{V}_g^{(b)}$  y rango  $\mathcal{H}_g^{(b)}$ , es una aplicación diferenciable de  $G_a$  en  $L((TG_a)_g)$ . La proyección  $\phi_g^{(b)}$  puede darse explícitamente como sigue: si  $X \in (TG_a)_g$  entonces  $\phi_g^{(b)}(X) = \frac{1}{2}(X + gbX^*g^{*-1}b^\dagger)$ ; o equivalentemente, si  $X = X_1p_1 + X_2p_2$ ,

$$\phi_g^{(b)}(X) = \frac{1}{2}(X_1p_1 + g_1b_1X_1^*g_1^{*-1}b_1^\dagger + X_2p_2 + g_2b_2X_2^*g_2^{*-1}b_2^\dagger).$$

o bien,

$$\phi_g^{(b)}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(X_1 + g_1b_1X_1^*g_1^{*-1}b_1^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(X_2 + g_2b_2X_2^*g_2^{*-1}b_2^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La estructura homogénea reductiva de  $C_a$  nos permite entonces definir una conexión en el fibrado  $\pi_b : G_a \rightarrow C_a$ .

Como  $(TG_a)_1 = \mathcal{H}_1^{(b)} \oplus \mathcal{V}_1^{(b)}$  y  $\mathcal{V}_1^{(b)} = N(T\pi_b)_1$ , resulta que la restricción

$$(T\pi_b)_1|_{\mathcal{H}_1^{(b)}} : \mathcal{H}_1^{(b)} \rightarrow (TC_a)_b, \quad (T\pi_b)_1(X) = 2Xb, \quad X \in \mathcal{H}_1^{(b)}$$

es un isomorfismo. Observemos que si  $X = X_1p_1 + X_2p_2$ , donde  $X_i \in L(M_i)^s$ ,  $i = 1, 2$  entonces

$$(T\pi_b)_1(X) = 2(X_1b_1 - X_2b_2).$$

Denotemos por

$$K_b = [(T\pi_b)_1|_{\mathcal{H}_1^{(b)}}]^{-1} : (TC_a)_b \rightarrow \mathcal{H}_1^{(b)}$$

al isomorfismo inverso. Para cada  $Z \in (TC_a)_b$ , resulta

$$K_b(Z) = \frac{1}{2}Z|b|^\dagger v_a = \frac{1}{2}Z(b_1^\dagger - b_2^\dagger). \quad (2.1)$$

Dado un fibrado principal localmente trivial  $(S, B, G)$  de proyección  $p : S \rightarrow B$  y una curva  $C^\infty \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow B$ , entonces una curva  $C^\infty$  a trozos  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  es una *levantada* de  $\gamma$  si  $p \circ \Gamma = \gamma$ . Si el fibrado principal tiene una conexión,  $\Gamma$  se dice *levantada horizontal* de una curva suave  $\gamma$  si  $\Gamma$  es una levantada y cada vector tangente  $\dot{\Gamma}(t)$  es horizontal; es decir:

$$\dot{\Gamma}(t) \in \mathcal{H}_{\Gamma(t)}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

La existencia de levantadas de curvas está garantizada si la proyección  $p$  admite secciones locales.

Dada una curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow B$   $C^\infty$  y dado  $d \in p^{-1}(\gamma(0))$ , se demuestra que existe una única levantada horizontal de  $\gamma$ ,  $\Gamma$ , tal que  $\Gamma(0) = d$ . Los clásicos libros [KN63], [Ste51] son una referencia general de estos temas.

La demostración del siguiente resultado puede verse en [CM99].

**Proposición 2.7.7.**  $\Gamma$  es una levantada horizontal de  $\gamma$  si y sólo si  $\Gamma$  satisface

$$\dot{\Gamma} = K_\gamma(\dot{\gamma})\Gamma.$$

Llamamos *ecuación de transporte* para  $\pi_b$  de una curva suave  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C_a$  a

$$\dot{\Gamma}(t) = K_{\gamma(t)}\dot{\gamma}(t)\Gamma(t),$$

Se sigue entonces de (2.1) y de la proposición anterior que, dada una curva  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C_a$ , la levantada horizontal  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G_a$  de  $\gamma$  con  $\Gamma(0) = 1$  es la única solución de

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}|\gamma|^\dagger v_a \Gamma, \\ \Gamma(0) = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Si  $\gamma(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$  es la descomposición positiva ortogonal de  $\gamma(t)$ , entonces

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_2)(\gamma_1^\dagger - \gamma_2^\dagger)\Gamma.$$

Notemos que  $\gamma_i$  resulta diferenciable a trozos pues  $\gamma$  los es y  $\gamma_i(t) = \gamma(t)|_{R(a_i)}p_i$  para todo  $t$ , con  $i = 1, 2$ .

Observemos que (2.2) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}_1 = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_1(\gamma_1^\dagger)|_{\mathcal{M}_1}\Gamma_1, \\ \dot{\Gamma}_2 = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_2(\gamma_2^\dagger)|_{\mathcal{M}_2}\Gamma_2, \\ \Gamma_1(0) = 1, \quad \Gamma_2(0) = 1. \end{cases}$$

donde  $\gamma_i^{-1} = \gamma_i^\dagger|_{R(\gamma_i)} \in GL(R(\gamma_i))^+$  y las soluciones  $\Gamma_i \in L(\mathcal{M}_i)$  para  $i = 1, 2$  (en efecto,  $\Gamma_i \in GL(\mathcal{M}_i)$ ) y  $\Gamma = \Gamma_1p_1 + \Gamma_2p_2$ . Observemos que las ecuaciones anteriores son independientes.

La ecuación de transporte, induce la siguiente *derivada covariante* de un campo tangente  $X$  a lo largo de una curva  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{DX}{dt} &= \Gamma(t)\left(\frac{d}{dt}(TL_{\Gamma(t)^{-1}})_{\gamma(t)}X(t)\right)\Gamma(t)^* \\ &= \dot{X} - (X\gamma^\dagger\dot{\gamma} + \dot{\gamma}\gamma^\dagger X). \end{aligned}$$

Se dice que el campo  $X$  es *paralelo* si  $\frac{DX}{dt} = 0$ .

Una curva  $\gamma \subseteq C_a$  es una *geodésica* si  $\dot{\gamma}$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$  y, en este caso,  $\gamma$  satisface

$$\ddot{\gamma} = \dot{\gamma}\gamma^\dagger\dot{\gamma}.$$

Equivalentemente, si  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  es la descomposición positiva ortogonal de  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  es una geodésica si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  satisfacen

$$\ddot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_1\gamma_1^\dagger\dot{\gamma}_1, \quad \ddot{\gamma}_2 = \dot{\gamma}_2\gamma_2^\dagger\dot{\gamma}_2.$$

Es fácil ver que la conexión es invariante por  $GL(\mathcal{H})$ ; esto es que si  $\gamma$  una geodésica en  $C_a$ , entonces  $g\gamma g^*$  también es una geodésica para todo  $g \in GL(\mathcal{H})$ .

La única geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = b$  y  $\dot{\gamma} = X \in (TC_a)_b$  es

$$\gamma(t) = L_{e^{tK_b(X)}}b, \quad t \in [0, 1],$$

equivalentemente,

$$\gamma(t) = e^{\frac{t}{2}Xb^\dagger}be^{\frac{t}{2}b^\dagger X}, \quad t \in [0, 1].$$

Se sigue fácilmente que si  $\gamma(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$  es la descomposición positiva ortogonal de  $\gamma(t)$ , para  $t \in [0, 1]$ , entonces  $\gamma_i(t) = b_i^{1/2}e^{tb_i^{-1/2}X_i b_i^{-1/2}}b_i^{1/2}$  es la geodésica en  $C_{a_i}$  tal que  $\gamma_i(0) = b_i$  y  $\dot{\gamma}_i(0) = X_i p_i \in (TC_{a_i})_{b_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

Es decir,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= e^{\frac{t}{2}Xb^\dagger}be^{\frac{t}{2}b^\dagger X} = e^{\frac{t}{2}Xb_1^\dagger}b_1e^{\frac{t}{2}b_1^\dagger X} - e^{\frac{t}{2}Xb_2^\dagger}b_2e^{\frac{t}{2}b_2^\dagger X} \\ &= b_1^{1/2}e^{t(b_1^{1/2})^\dagger X(b_1^{1/2})^\dagger}b_1^{1/2} - b_2^{1/2}e^{t(b_2^{1/2})^\dagger X(b_2^{1/2})^\dagger}b_2^{1/2}, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

La aplicación exponencial de la conexión en  $b \in C_a$ ,

$$\exp_b : (TC_a)_b \rightarrow C_a,$$

está dada por

$$\exp_b X = |b|^{1/2}e^{(|b|^{1/2})^\dagger X(|b|^{1/2})^\dagger}|b|^{1/2}v_a.$$

Notemos que  $\exp_b$  es un difeomorfismo y su inversa es

$$\log_b : C_a \rightarrow (TC_a)_b, \quad \log_b(c) = |b|^{1/2} \log\{((|b|^{1/2})^\dagger c (|b|^{1/2})^\dagger)|_{R(a)}\}|b|^{1/2}v_a.$$

Dados  $b, c \in C_a$  existe una única geodésica  $\gamma_{b,c}$  en  $C_a$  tal que  $\gamma_{b,c}(0) = b$  y  $\gamma_{b,c}(1) = c$ ,

$$\gamma_{b,c}(t) = |b|^{1/2}((|b|^{1/2})^\dagger c (|b|^{1/2})^\dagger)|_{R(a)})^t|b|^{1/2}v_a = \gamma_{|b|,|c|}(t)v_a. \quad (2.3)$$

Vale observar que en variedades completas de dimensión infinita no necesariamente dos puntos están unidos por una geodésica, ver [Atk75].

No es difícil mostrar que

$$\gamma_{b,c}(t) = b_1^{1/2}((b_1^{1/2})^\dagger c_1(b_1^{1/2})^\dagger|_{R(a_1)})^t b_1^\dagger - b_2^{1/2}((b_2^{1/2})^\dagger c_2(b_2^{1/2})^\dagger|_{R(a_2)})^t b_2^\dagger, \quad t \in [0, 1], \quad (2.4)$$

donde  $\gamma_{b_i,c_i} = (b_i^{1/2}((b_i^{1/2})^\dagger c_i(b_i^{1/2})^\dagger)^t b_i^\dagger) p_{a_i}$  es la geodésica en  $C_{a_i}$  que une  $b_i$  y  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Observemos que la existencia de una geodésica que une  $b, c \in C_a$  es una generalización del resultado obtenido por Corach, Porta y Recht en [CPR93c]. En ese trabajo, mostraron que dos operadores autoadjuntos inversibles con la misma parte unitaria en la descomposición polar están unidos por una geodésica. Notemos que si  $a \in GL(\mathcal{H})^s$ , resulta que  $C_a = \{b \in GL(\mathcal{H})^s, u_b = u_a\}$ .

A continuación, dotamos a  $C_a$  de una estructura de Finsler:

La norma

$$\|X\|_b = \|(|b|^{1/2})^\dagger X (|b|^{1/2})^\dagger\|, \quad X \in (TC_a)_b,$$

define una *estructura de Finsler* en el fibrado tangente  $TC_a$ , i.e. es una asignación continua de una norma completa en cada espacio tangente  $(TC_a)_b$ ,  $b \in C_a$ . Además esta estructura es invariante por la acción de  $GL(\mathcal{H})$ .

Un caso particular de esta situación ocurre en las variedades Riemannianas, en las que hay un producto escalar completo en cada espacio tangente que varía en forma suave.

Como  $(|b|^{1/2})^\dagger = (b_1^{1/2})^\dagger + (b_2^{1/2})^\dagger$  y  $X = X_1 p_1 + X_2 p_2$ , con  $X_i \in L(R(a_i))^s$  para  $i = 1, 2$ ; entonces

$$\begin{aligned} \|X\|_b &= \|(b_1^{1/2})^\dagger X_1 (b_1^{1/2})^\dagger + (b_2^{1/2})^\dagger X_2 (b_2^{1/2})^\dagger\| \\ &= \max\{\|(b_1^{1/2})^\dagger X_1 (b_1^{1/2})^\dagger\|, \|(b_2^{1/2})^\dagger X_2 (b_2^{1/2})^\dagger\|\} \\ &= \max\{\|X_i\|_{b_i}, i = 1, 2\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dada una curva  $C^\infty$ ,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C_a$  podemos ahora definir la *longitud* de  $\gamma$  como

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

Consideremos una curva  $\gamma \subseteq C_a$  con descomposición positiva ortogonal  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ . Por (2.5), sabemos que  $\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} = \max\{\|\dot{\gamma}_i(t)\|_{\gamma_i(t)}, i = 1, 2\}$ , con lo cual

$$L(\gamma) = \max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\}.$$

**Lema 2.7.8.** Consideremos  $b, c \in C_a$ . Si  $\gamma_{b,c}$  es la única geodésica que une  $b$  con  $c$ , entonces

$$L(\gamma_{b,c}) = L(\gamma_{|b|,|c|}) = \max\{L(\gamma_{b_i,c_i}), i = 1, 2\}.$$

*Demostración.* Por (2.3), tenemos que  $|\gamma_{b,c}(t)| = \gamma_{|b|,|c|}(t)$ , con lo cual

$$\|\dot{\gamma}_{b,c}(t)\|_{\gamma_{b,c}} = \|(\gamma_{|b|,|c|}^{1/2})^\dagger \dot{\gamma}_{b,c} (\gamma_{|b|,|c|}^{1/2})^\dagger(t)\| = \|\dot{\gamma}_{|b|,|c|}(t)\|_{\gamma_{|b|,|c|}}.$$

Por lo tanto,  $L(\gamma_{b,c}) = L(\gamma_{|b|,|c|})$ . La última igualdad sigue de (2.4). ■

**Lema 2.7.9.** Sean  $b, c \in C_a$ . Si  $\gamma_{b,c}$  es la única geodésica que une  $b$  con  $c$ , entonces

$$L(\gamma_{b,c}) = \|\log((|b|^{1/2})^\dagger |c|(|b|^{1/2})^\dagger|_{R(b)})\|.$$

*Demostración.* Sean  $b = b_1 - b_2$  y  $c = c_1 - c_2$  las descomposiciones positivas ortogonales de  $b$  y  $c$  respectivamente. Entonces la geodésica que une  $b$  con  $c$  es  $\gamma_{b,c} = \gamma_{b_1,c_1} - \gamma_{b_2,c_2}$  donde  $\gamma_{b_i,c_i} = b_i^{1/2}((b_i^{1/2})^\dagger c_i (b_i^{1/2})^\dagger)^t b_i^{1/2}$  es la geodésica que une  $b_i$  con  $c_i$ , para  $i = 1, 2$ . Como  $L(\gamma_i) = L(\gamma_i|_{\mathcal{M}_i})$  y  $\gamma_i|_{\mathcal{M}_i}(t) = b_i^{1/2}(b_i^{-1/2} c_i b_i^{-1/2})^t b_i^{1/2} \in GL(\mathcal{M}_i)^+$ , resulta que

$$L(\gamma_i) = \|\log((b_i^{1/2})^\dagger c_i (b_i^{1/2})^\dagger|_{R(b)})\|, \text{ para } i = 1, 2$$

ver Sección 2.2. Luego,

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\} = \max\{\|\log((b_i^{1/2})^\dagger c_i (b_i^{1/2})^\dagger|_{R(b)})\|, i = 1, 2\} \\ &= \|\log[((b_1^{1/2})^\dagger c_1 (b_1^{1/2})^\dagger + (b_2^{1/2})^\dagger c_2 (b_2^{1/2})^\dagger)|_{R(b)}]\| \\ &= \|\log((|b|^{1/2})^\dagger |c|(|b|^{1/2})^\dagger|_{R(b)})\|. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

En espacios de dimensión infinita, no pasa necesariamente que una curva geodésica que une dos puntos tiene longitud mínima entre todas las curvas que unen esos puntos. Sin embargo, veremos ahora que entre todas las curvas en  $C_a$  que unen  $b$  con  $c$ , la geodésica  $\gamma_{b,c}$  tiene longitud mínima.

**Proposición 2.7.10.** Sean  $b, c \in C_a$ . Si  $\delta : [0, 1] \rightarrow C_a$  es una curva  $C^\infty$  tal que  $\delta(0) = b$  y  $\delta(1) = c$ , entonces

$$L(\gamma_{b,c}) \leq L(\delta),$$

donde  $\gamma_{b,c}$  es la geodésica que une  $b$  con  $c$ .

*Demostración.* Sea  $\delta(t) = \delta_1(t) - \delta_2(t)$  la descomposición positiva ortogonal de  $\delta(t)$ . Entonces  $\delta_1 : [0, 1] \rightarrow C_{a_1}$  es una curva  $C^\infty$  tal que  $\delta_1(0) = b_1$  y  $\delta_1(1) = c_1$ ; y  $\delta_2 : [0, 1] \rightarrow C_{a_2}$  es una curva  $C^\infty$  tal que  $\delta_2(0) = b_2$  y  $\delta_2(1) = c_2$ . Como  $L(\delta_i) = L(\delta_i|_{\mathcal{M}_i})$  y

$\delta_i|_{\mathcal{M}_i} \in G^+(\mathcal{M}_i)$ , entonces (ver [CM99])  $L(\gamma_{b_i, c_i}) \leq L(\delta_i)$ , donde  $\gamma_{b_i, c_i}$  es la geodésica en  $C_{a_i}$  que une  $b_i$  con  $c_i$  para  $i = 1, 2$ . Luego,

$$L(\gamma_{b,c}) = \max\{L(\gamma_{b_1, c_1}), L(\gamma_{b_2, c_2})\} \leq \max\{L(\delta_1), L(\delta_2)\} \leq L(\delta). \quad \blacksquare$$

Sean  $b, c \in C_a$ , la *distancia geodésica* en  $C_a$  se define como

$$d(b, c) = \inf\{L(\gamma), \gamma : [0, 1] \rightarrow C_a, C^\infty, \gamma(0) = b, \gamma(1) = c\}.$$

El resultado anterior muestra que la única geodésica que une dos operadores  $b$  y  $c$  en la componente de Thompson de  $a$  es una curva corta. Sin embargo, puede haber infinitas curvas que unen dos puntos que sean curvas cortas (ver [Nus94, pág. 1659]).

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que la distancia geodésica entre dos operadores en la componente de  $a$  coincide con la longitud de la geodésica que los une.

**Corolario 2.7.11.** *Si  $b, c \in C_a$ , entonces*

$$d(b, c) = L(\gamma_{b,c}),$$

donde  $\gamma_{b,c}$  es la geodésica que une  $b$  con  $c$ .

Veremos ahora que la estructura métrica de  $C_a$  está relacionada con la estructura diferencial. Como en el caso positivo, la métrica de Thompson coincide con la distancia geodésica en cada componente.

**Corolario 2.7.12.** *Si  $b, c \in C_a$ , entonces*

$$d_T(b, c) = L(\gamma_{b,c})$$

donde  $\gamma_{b,c}$  es la geodésica en  $C_a$  que une  $b$  con  $c$ .

*Demostración.* Es consecuencia del Corolario 2.6.3 y del Lema 2.7.9. ■



## Capítulo 3

# La órbita de un operador autoadjunto

Nos centramos en este capítulo en el estudio de la órbita de congruencia de un operador autoadjunto  $a$ , es decir en el conjunto de operadores que son congruentes con  $a$ . Establecemos condiciones necesarias y suficientes para que un operador esté en la órbita de  $a$ . Además, daremos a la órbita de un operador autoadjunto de rango cerrado una estructura de variedad diferencial.

### 3.1. Nociones preliminares sobre operadores de rango cerrado

Presentaremos en esta sección algunos resultados del trabajo [CMM09] sobre operadores de rango cerrado que serán útiles en la Sección 3.5.

Recordemos que dado  $a \in L(\mathcal{H})$ , el *módulo mínimo reducido* de  $a$  es

$$\gamma(a) = \inf\{\|ax\| : x \in N(a)^\perp, \|x\| = 1\}.$$

Si  $a$  es de rango cerrado, entonces  $\gamma(a) = \|a^\dagger\|^{-1}$ , ver Sección 1.3.

Sean  $a, b \in CR(\mathcal{H})$ , se puede ver que

$$a^\dagger - b^\dagger = -a^\dagger(a - b)b^\dagger + a^\dagger a^{*\dagger}(a^* - b^*)(1 - bb^\dagger) + (1 - a^\dagger a)(a^* - b^*)b^{*\dagger}b^\dagger,$$

con lo cual

$$\|a^\dagger - b^\dagger\| \leq (\|a^\dagger\|\|b^\dagger\| + \|a^\dagger\|^2 + \|b^\dagger\|^2)\|a - b\|. \quad (3.1)$$

Consideramos ahora la siguiente métrica en el conjunto de operadores de rango cerrado. Dados  $a, b \in CR(\mathcal{H})$ , sea

$$d(a, b) = (\|p_{R(a)} - p_{R(b)}\|^2 + \|a - b\|^2)^{1/2}.$$

**Lema 3.1.1.** Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})$ . Entonces  $\gamma(b) \leq \sqrt{1 + \gamma(b)^2}d(a, b) + \gamma(a)$ .

*Demostración.* Si  $\gamma(b) = 0$  la desigualdad es trivial. Supongamos que  $\gamma(b) > 0$ . Sea  $u \in N(a)^\perp$ . Observemos que  $\gamma$  satisface que  $\gamma(b)\|x\| \leq \|bx\|$ , para  $x \in N(b)^\perp$ . Esta desigualdad vale en particular, para  $v = (1 - p_{N(b)})u \in N(b)^\perp$ . Luego

$$\begin{aligned} \gamma(b)\|u\| &\leq \gamma(b)\|u - v\| + \|bv\| \\ &\leq \gamma(b)\|u - v\| + \|au - bv\| + \|au\| \\ &\leq (\gamma(b)\|p_{N(a)} - p_{N(b)}\| + \|a - b\|)\|u\| + \|au\| \\ &\leq \sqrt{1 + \gamma(b)^2}(\|p_{R(a^*)} - p_{R(b^*)}\|^2 + \|a - b\|^2)^{1/2}\|u\| + \|au\| \\ &= \sqrt{1 + \gamma(b)^2}d(a^*, b^*)\|u\| + \|au\|. \end{aligned}$$

Luego,  $\gamma(b) \leq \sqrt{1 + \gamma(b)^2}d(a^*, b^*) + \gamma(a)$ , entonces

$$\gamma(b) = \gamma(b^*) \leq \sqrt{1 + \gamma(b^*)^2}d(a, b) + \gamma(a^*) = \sqrt{1 + \gamma(b)^2}d(a, b) + \gamma(a). \quad \blacksquare$$

**Corolario 3.1.2.** Sea  $b \in CR(\mathcal{H})$  y consideremos  $a \in L(\mathcal{H})$  tal que  $d(a, b) < \frac{1}{2\sqrt{1+\|b^\dagger\|^2}}$  entonces  $a \in CR(\mathcal{H})$  y  $\|a^\dagger\| \leq 2\|b^\dagger\|$ .

*Demostración.* Si  $b \in CR(\mathcal{H})$  y  $d(a, b) < \frac{1}{2\sqrt{1+\|b^\dagger\|^2}}$  entonces, ya que  $\gamma(b) = \|b^\dagger\|^{-1}$ ,  $d(a, b)\sqrt{1 + \gamma(b)^2} < \frac{\gamma(b)}{2}$ . Por lo tanto, aplicando el Lema 3.1.1, resulta que  $\gamma(a) > 0$ , entonces  $a \in CR(\mathcal{H})$  y  $\gamma(a) = \|a^\dagger\|^{-1}$ . Además del Lema 3.1.1,

$$1 \leq \sqrt{1 + \|b^\dagger\|^2}d(a, b) + \frac{\|b^\dagger\|}{\|a^\dagger\|} < \frac{1}{2} + \frac{\|b^\dagger\|}{\|a^\dagger\|}$$

entonces  $\|a^\dagger\| \leq 2\|b^\dagger\|$ . ■

**Proposición 3.1.3.** La aplicación  $\mu : (CR(\mathcal{H}), d) \rightarrow (CR(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ,  $\mu(b) = b^\dagger$  es continua.

*Demostración.* De (3.1),  $\|a^\dagger - b^\dagger\| \leq (\|a^\dagger\|\|b^\dagger\| + \|a^\dagger\|^2 + \|b^\dagger\|^2)\|a - b\|$ . Si  $d(a, b) < \frac{1}{2\sqrt{1+\|b^\dagger\|^2}}$  se sigue entonces, del Corolario 3.1.2, que  $\|a^\dagger\| \leq 2\|b^\dagger\|$ . Luego,  $\|a^\dagger - b^\dagger\| \leq K\|a - b\|$ , para una constante  $K$  que sólo depende de  $\|b^\dagger\|$ . ■

### 3.2. Equivalencia de rango de operadores

Daremos en esta sección algunas definiciones y resultados sobre equivalencia de rangos de operadores y sobre equivalencia y congruencia de operadores. Para más detalles puede verse el survey [FW71].

Dos rangos de operadores  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$  son *similares* si existe  $g \in GL(\mathcal{H})$  tal que  $\mathcal{R} = g(\mathcal{S})$  y *unitariamente equivalentes* si  $g$  puede tomarse unitario. Dos rangos de operadores son similares si y sólo si son unitariamente equivalentes.

Dos operadores  $a, b \in L(\mathcal{H})$  son *equivalentes* si existen  $g, f \in GL(\mathcal{H})$  tales que  $b = gag^*$ ; los operadores  $a$  y  $b$  son *congruentes* si existen  $g \in GL(\mathcal{H})$  tales que  $b = gag^*$ .

**Proposición 3.2.1.** *Dos operadores normales son equivalentes si y sólo si sus rangos son unitariamente equivalentes.*

**Teorema 3.2.2.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *a y b son equivalentes,*
2.  *$a^{1/2}$  y  $b^{1/2}$  son equivalentes,*
3. *a y b son congruentes.*

**Observación 3.2.3.** Del Teorema 3.2.2, se sigue que los rangos de dos operadores positivos  $a$  y  $b$  son unitariamente equivalentes si y sólo si los rangos de  $a^{1/2}$  y  $b^{1/2}$  son unitariamente equivalentes.

Además, se puede probar que si  $a, b \in L(\mathcal{H})$ , entonces  $a$  y  $b$  son equivalentes si y sólo si  $a^*a$  y  $b^*b$  son congruentes; o, equivalentemente, si  $|a|$  y  $|b|$  son congruentes, ver [FW71]. Por el Teorema 3.2.2, dos operadores positivos son equivalentes si y sólo si son congruentes. Esto no es cierto para operadores autoadjuntos: por ejemplo, si  $a \in L(\mathcal{H})^s$  no es positivo entonces  $a$  y  $|a|$  son equivalentes pero no son congruentes.

**Definición 3.2.4.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})$ , decimos que a y b son unitariamente equivalentes si existe  $u \in U(\mathcal{H})$  tal que  $uau^* = b$ .*

El siguiente resultado sobre congruencia unitaria de proyectores es de B. Sz.-Nagy y puede verse en [Nus88], [Nus94]. Una prueba alternativa se encuentra en [Kat75].

**Proposición 3.2.5.** *Si  $p, q$  son dos proyecciones ortogonales tales que  $\|p - q\| < 1$ , entonces p y q son unitariamente equivalentes.*

En [ASS94], J. Avron, R. Seiler y B. Simon probaron que dadas dos proyecciones ortogonales  $p, q$  tales que  $\|p - q\| < 1$ , entonces existe  $v \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $q = vp v^*$  y  $p = vqv^*$ .

**Lema 3.2.6.** *Sean  $p, q$  proyecciones ortogonales, entonces  $p$  y  $q$  son unitariamente equivalentes si y sólo si existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $u(R(p)) = R(q)$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{S} = R(p)$  y  $\mathcal{T} = R(q)$ . Supongamos que existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $upu^* = q$ . Entonces  $\mathcal{T} = q(\mathcal{H}) = upu^*(\mathcal{H}) = up(\mathcal{H}) = u(\mathcal{S})$ . Recíprocamente, sea  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $u(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$ . Como  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ , vale que  $u(\mathcal{S}^\perp) = u(\mathcal{S})^\perp = \mathcal{T}^\perp$ . Por lo tanto, si  $t \in \mathcal{T}^\perp$ , se tiene que  $u^*t \in \mathcal{S}^\perp$ , con lo cual  $upu^*t = u(0) = 0$ . Sea ahora  $t \in \mathcal{T}$ , entonces  $u^*t \in \mathcal{S}$ , y, por lo tanto,  $upu^*t = uu^*t = t$ . Resulta entonces que,  $upu^* = q$ . ■

### 3.3. La órbita de un operador autoadjunto

El propósito en esta sección es estudiar la órbita de congruencia de un operador autoadjunto fijo  $a$ , i.e., el conjunto de operadores en  $L(\mathcal{H})$  que son congruentes con  $a$ . En el Teorema 2.1.3, caracterizamos este conjunto para operadores inversibles: dos operadores inversibles son congruentes si y sólo si los rangos de sus partes positivas y negativas tienen la misma dimensión; o equivalentemente, las reflexiones de sus descomposiciones polares son unitariamente equivalentes.

El grupo de los operadores inversibles actúa en forma natural sobre los operadores autoadjuntos de la manera que veremos a continuación: consideremos la siguiente acción de  $GL(\mathcal{H})$  sobre  $L(\mathcal{H})^s$ ,

$$L : GL(\mathcal{H}) \times L(\mathcal{H})^s \rightarrow L(\mathcal{H})^s, \quad L_g a = gag^*, \quad a \in L(\mathcal{H})^s, \quad g \in GL(\mathcal{H}).$$

Dado  $a \in L(\mathcal{H})^s$ , la órbita de  $a$  correspondiente a la acción  $L$  es el conjunto  $\mathcal{O}_a$  de operadores que son congruentes con  $a$ , i.e.

$$\mathcal{O}_a = \{gag^* : g \in GL(\mathcal{H})\}.$$

La siguiente proposición es una consecuencia de la Proposición 3.2.1 y el Teorema 3.2.2, y da una caracterización de  $\mathcal{O}_a$ , cuando  $a$  es positivo.

**Proposición 3.3.1.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$ ; entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $b \in \mathcal{O}_a$ ,
2.  $R(a)$  y  $R(b)$  son unitariamente equivalentes,
3.  $R(a^{1/2})$  y  $R(b^{1/2})$  son unitariamente equivalentes.

*Demuestra*ción. 1→2: Es consecuencia de la Proposición 3.2.1.

2→3: Es consecuencia de la Proposición 3.2.1 y la Observación 3.2.3.

3→1: Supongamos que  $R(b^{1/2}) = vR(a^{1/2})$  para algún  $v \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ , entonces, por la Proposición 3.2.1,  $a^{1/2}$  y  $b^{1/2}$  son equivalentes. Del Teorema 3.2.2, se sigue que  $a$  y  $b$  son congruentes, o equivalentemente,  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Como consecuencia de la Proposición 3.3.1 tenemos los siguientes resultados.

**Corolario 3.3.2.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$ , entonces  $b \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si  $b^{1/2} \in \mathcal{O}_{a^{1/2}}$ .*

**Proposición 3.3.3.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$ . Si  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces  $b^t \in \mathcal{O}_{a^t}$  para  $t \in [0, 1]$ .*

*Demuestra*ción. Para probar esta afirmación usaremos que dados  $c, d \in L(\mathcal{H})^+$  tales que si  $R(c) = R(d)$  entonces  $R(c^t) = R(d^t)$ , para  $t \in [0, 1]$ . En efecto, si  $R(c) \subseteq R(d)$  entonces, por el Teorema de Douglas (Teorema 1.2.1), existe una constante  $\lambda > 0$  tal que  $c^2 \leq \lambda^2 d^2$ . Por la desigualdad de Löwner-Heinz, (ver [Ped72]),  $x^t$  una función monótona creciente de operadores para  $t \in [0, 1]$ , y, por lo tanto  $c^{2t} \leq \lambda^{2t} d^{2t}$ , con lo cual  $R(c^t) \subseteq R(d^t)$ . La otra inclusión se prueba de manera similar.

Supongamos que  $b \in \mathcal{O}_a$ , entonces, por la Proposición 3.3.1, existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $R(b) = R(uau^*)$ . Luego,  $R(b^t) = R((uau^*)^t)$  cualquiera sea  $t \in [0, 1]$ . Finalmente, aplicando el Teorema de Stone-Weierstrass, resulta que  $(uau^*)^t = ua^tu^*$ , con lo cual  $R(b^t) = R(ua^tu^*)$ , o equivalentemente,  $b^t \in \mathcal{O}_{a^t}$ . ■

En particular, si  $a \in CR(\mathcal{H})^+$ , entonces  $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_{a^t}$  para  $t \in [0, 1]$ . En efecto, por Teorema 1.2.4,  $R(a) = R(a^t)$ . Si  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces  $R(b) = uR(a) = uR(a^t)$ , con lo cual  $b \in \mathcal{O}_{a^t}$ . Por lo tanto  $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_{a^t}$ . Más en general, vale que si  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces  $f(b) \in \mathcal{O}_{f(a)}$  para toda  $f \in \mathcal{C}(X)$  monótona creciente de operadores, donde  $X$  es un conjunto compacto que contiene al espectro de  $a$ .

La órbita de  $a$  se puede ver como unión de componentes de Thompson, como muestra el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.4.** *Si  $a \in L(\mathcal{H})^+$ , entonces  $\mathcal{O}_a = \bigcup_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})} C_{uau^*}$ , donde  $C_{uau^*}$  es la componente de Thompson de  $uau^*$ .*

*Demostración.* Consideremos  $b \in \mathcal{O}_a$ , por la Proposición 3.3.1, existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $R(b^{1/2}) = uR(a^{1/2})$ . Luego

$$R(b^{1/2}) = uR(a^{1/2}) = R(ua^{1/2}u^*) = R((uau^*)^{1/2}),$$

y entonces  $b \in C_{u^*au}$ .

Recíprocamente, consideremos  $b \in C_{u^*au}$ , para algún  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ . Se sigue que  $R(b^{1/2}) = R(ua^{1/2}u^*) = uR(a^{1/2})$ . Entonces, por la Proposición 3.3.1,  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

En lo que sigue de esta sección estudiaremos la órbita de un operador autoadjunto cualquiera.

**Proposición 3.3.5.** *Consideremos  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$ . Si  $b \in \mathcal{O}_a$ , entonces  $|b| \in \mathcal{O}_{|a|}$ .*

*Demostración.* Si  $b \in \mathcal{O}_a$ , entonces  $a$  y  $b$  son equivalentes. Por la Observación 3.2.3,  $|a|$  y  $|b|$  son congruentes, o equivalentemente,  $|b| \in \mathcal{O}_{|a|}$ . ■

El siguiente resultado da una condición suficiente para determinar si dos operadores autoadjuntos son congruentes.

**Proposición 3.3.6.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposiciones positivas ortogonales  $a = a_1 - a_2$  y  $b = b_1 - b_2$ . Si  $b_1 \in \mathcal{O}_{a_1}$ ,  $b_2 \in \mathcal{O}_{a_2}$  y  $\dim N(b) = \dim N(a)$ , entonces  $b \in \mathcal{O}_a$ .*

*Demostración.* Como  $b_1 \in \mathcal{O}_{a_1}$  y  $b_2 \in \mathcal{O}_{a_2}$ , entonces  $\dim \overline{R(b)} = \dim \overline{R(a)}$  y como además  $\dim N(b) = \dim N(a)$ , existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $N(b) = uN(a)$ . Por la Proposición 3.3.1, existen  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tales que  $R(b_i^{1/2}) = u_i R(a_i^{1/2})$ , for  $i = 1, 2$ . Tenemos entonces que  $b_i^{1/2}$  y  $u_i a_i^{1/2} u_i^*$  tienen el mismo rango y núcleo, con lo cual (ver Corolario 1.2.2) existe  $g_i \in GL(\mathcal{H})$  tal que  $b_i^{1/2} = g_i u_i a_i^{1/2} u_i^*$ , o bien  $b_i^{1/2} u_i = g_i u_i a_i^{1/2}$ ,  $i = 1, 2$ . Consideremos  $w = g_1 u_1 p_{a_1} + g_2 u_2 p_{a_2} + u(1 - p_a)$ . Por lo tanto  $w \in GL(\mathcal{H})$ , pues  $w^{-1} = u_1^* g_1^{-1} p_{b_1} + u_2^* g_2^{-1} p_{b_2} + u^*(1 - p_b)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} w w^{-1} &= p_{b_1} g_1 u_1 p_{a_1} u^* g_1^{-1} p_{b_1} + p_{b_2} g_2 u_2 p_{a_2} u^* g_2^{-1} p_{b_2} + (1 - p_b) u(1 - p_a) u^*(1 - p_b) \\ &= p_{b_1} g_1 u u^* g_1^{-1} p_{b_1} + p_{b_2} g_2 u u^* g_2^{-1} p_{b_2} + (1 - p_b) u u^*(1 - p_b) \\ &= p_{b_1} g_1 g_1^{-1} p_{b_1} + p_{b_2} g_2 g_2^{-1} p_{b_2} + 1 - p_b = p_{b_1} + p_{b_2} + 1 - p_b = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} w a w^* &= w(a_1 - a_2) w^* = g_1 u a_1 u^* g_1^* p_1 - g_2 u a_2 u^* g_2^* p_2 \\ &= p_1 g_1 u_1 a_1 u_1^* g_1^* p_1^* - p_2 g_2 u_2 a_2 u_2^* g_2^* p_2^* \\ &= g_1 u a_1^{1/2} a_1^{1/2} u^* g_1^* p_{b_1} - g_2 u a_2^{1/2} a_2^{1/2} u^* g_2^* p_{b_2} \\ &= b_1^{1/2} u_1 u_1^* b_1^{1/2} - b_2^{1/2} u_2 u_2^* b_2^{1/2} = b. \end{aligned}$$

Luego  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Dado  $v \in \mathcal{I}^s$ , denotemos por  $\mathcal{UO}_v$  la órbita unitaria de  $v$ , i.e., el conjunto

$$\mathcal{UO}_v = \{uvu^* : u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}.$$

El siguiente teorema relaciona la órbita de  $a$  con las órbitas unitarias de  $u_a$  y  $v_a$ , donde  $a \in L(\mathcal{H})^s$  tiene descomposición polar  $a = u_a|a| = v_a|a|$  con  $u_a \in \mathcal{P}$  y  $v_a$  la isometría parcial. Más precisamente, se puede concluir que si un operador es congruente con  $a$ , entonces su parte unitaria es unitariamente equivalente a  $u_a$ . Análogamente para las isometrías parciales.

**Teorema 3.3.7.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$ . Si  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces*

1.  $u_b \in \mathcal{UO}_{u_a}$ ,
2.  $v_b \in \mathcal{UO}_{v_a}$ .

Para probar el teorema anterior usaremos la siguiente proposición, que es una generalización de un resultado probado por S. Hassi, Z. Sebestyen y S. V. De Snoo, ver [HSOS05, Teorema 5.1].

**Proposición 3.3.8.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$  y  $h, g \in L(\mathcal{H})$  tales que  $bh = ga$ , entonces existe un único  $s \in L(\mathcal{H})$  tal que*

$$b^{1/2}s = ga^{1/2} \text{ y } N(b) \subseteq N(s^*).$$

Además, si  $h, g \in GL(\mathcal{H})$  entonces existe  $s' \in GL(\mathcal{H})$  tal que

$$b^{1/2}s' = ga^{1/2}.$$

Daremos dos demostraciones de la primera parte de esta proposición. La siguiente está basada en las ideas de S. Hassi, Z. Sebestyen y S. V. De Snoo.

*Demuestra.* Para  $c \in L(\mathcal{H})^+$ , consideremos el siguiente producto interno en  $R(c)$ :

$$\langle cx, cy \rangle_c = \langle cx, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Denotemos con  $\mathcal{H}_c$  a la completación de  $(R(c), \langle \cdot, \cdot \rangle_c)$ .

Definimos  $\overline{h^*} : R(b) \rightarrow R(a)$ ,  $\overline{h^*}(bx) = h^*bx = ag^*x$ . En lo que sigue probaremos que  $\overline{h^*}$  admite una extensión acotada a  $\mathcal{H}_b$ : veremos que existe  $m > 0$  tal que  $\|\overline{h^*}(bx)\|_a \leq m\|bx\|_b$ .

Como  $bh = ga$  y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|\overline{h^*}(bx)\|_a^2 &= \|ag^*x\|_a^2 = \langle ag^*x, ag^*x \rangle_a = \langle ag^*x, g^*x \rangle = \langle h^*bx, g^*x \rangle \\ &= \langle gh^*bx, x \rangle = \langle bhg^*x, x \rangle = \langle bhg^*x, bx \rangle_b \\ &\leq \langle bx, bx \rangle_b^{1/2} \langle bhg^*x, bhg^*x \rangle_b^{1/2}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\|\overline{h^*}(bx)\|_a^2 \leq \langle bx, bx \rangle_b^{\frac{1}{2}} \langle bhg^*x, bhg^*x \rangle_b^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Además,

$$\begin{aligned} \langle bhg^*x, bhg^*x \rangle_b &= \langle bhg^*x, hg^*x \rangle = \langle gag^*x, hg^*x \rangle \\ &= \langle ag^*x, g^*hg^*x \rangle = \langle h^*bx, g^*hg^*x \rangle \\ &= \langle bx, (hg^*)^2x \rangle = \langle bx, b(hg^*)^2x \rangle_b. \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \langle bhg^*x, bhg^*x \rangle_b^{\frac{1}{2}} &= \langle bx, b(hg^*)^2x \rangle_b^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\langle bx, bx \rangle_b^{\frac{1}{2}} \langle b(hg^*)^2x, b(hg^*)^2x \rangle_b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \langle bx, bx \rangle_b^{\frac{1}{22}} \langle b(hg^*)^2x, b(hg^*)^2x \rangle_b^{\frac{1}{22}} \\ &= \langle bx, bx \rangle_b^{\frac{1}{22}} \langle b(hg^*)^2x, (hg^*)^2x \rangle_b^{\frac{1}{22}} \\ &= \langle bx, bx \rangle_b^{\frac{1}{22}} \langle bx, (hg^*)^2x \rangle_b^{\frac{1}{22}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

con lo cual, de (3.2) y (3.3),

$$\|\overline{h^*}(bx)\|_a^2 \leq \langle bx, bx \rangle_b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{22}} \langle bx, (hg^*)^2x \rangle_b^{\frac{1}{22}}.$$

Por inducción, resulta que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|\overline{h^*}(bx)\|_a^2 &\leq \langle bx, bx \rangle_b^{1/2+\dots+1/2^n} \langle b(hg^*)^2x, (hg^*)^{2^n}x \rangle^{2^{-n}} \\ &\leq \langle bx, bx \rangle_b^{1-\frac{1}{2^n}} \langle bx, (hg^*)^{2^n}x \rangle^{\frac{1}{2^n}} \\ &\leq \langle bx, bx \rangle_b^{1-\frac{1}{2^n}} \|bx\|^{2^{-n}} \|(hg^*)^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \|x\|^{\frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

Luego, si  $bx \neq 0$ ,

$$\|\overline{h^*}(bx)\|_a^2 \leq \langle bx, bx \rangle_b \left( \frac{\|bx\| \|x\|}{\langle bx, bx \rangle_b} \right)^{\frac{1}{2^n}} \|(hg^*)^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}.$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ , tenemos que

$$\|\overline{h^*}(bx)\|_a^2 \leq \langle bx, bx \rangle_b \rho(hg^*),$$

donde  $\rho(hg^*)$  es el radio espectral de  $hg^*$ .

Por lo tanto,  $\overline{h^*}$  admite una extensión acotada de  $\mathcal{H}_b$  a  $\mathcal{H}_a$ , que llamamos nuevamente  $\overline{h^*}$ .

Dado  $c \in L(\mathcal{H})^+$ , definimos el operador  $w_c$  de  $R(c) \subset \mathcal{H}_c$  en  $\mathcal{H}$  por

$$w_c(cx) = c^{1/2}x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Resulta que  $w_c : \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}$  es una isometría y que  $w_c^*$  verifica

$$w_c^*(c^{1/2}x) = cx \in \mathcal{H}_c, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Si  $s^* = w_a \overline{h^*} w_b^*$ , entonces  $s^* \in L(\mathcal{H})$  y

$$s^* b^{1/2} x = w_a \overline{h^*} w_b^* b^{1/2} x = w_a \overline{h^*} b x = w_a g^* x = a^{1/2} g^* x.$$

Luego  $s^* b^{1/2} = a^{1/2} g^*$ , o equivalentemente  $b^{1/2} s = g a^{1/2}$ . La unicidad de  $s$  surge del hecho que  $N(b) \subseteq N(s^*)$ .

Finalmente, si  $g, h \in GL(\mathcal{H})$ , entonces  $h^* R(b) = R(a)$ . Por lo tanto, existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $uR(b) = R(a)$  con lo cual  $uN(b) = N(a)$ . Como  $g^{-1}b = ah^{-1}$ , entonces existe un único  $l \in L(\mathcal{H})$  tal que  $g^{-1}b^{1/2} = a^{1/2}l$ . Luego

$$l^* s^*(b^{1/2}x) = l^* a^{1/2} g^* x = b^{1/2}(g^*)^{-1} g^* x = b^{1/2}x,$$

y, por lo tanto  $l^* s^* p_b = p_b$ . Si consideramos  $s'^* = s^* p_b + u p_{N(b)}$  y  $l'^* = l^* p_a + u^* p_{N(a)}$ , resulta que  $l'^* s'^* = l^* s^* p_b + u^* u p_{N(b)} = 1$ . Análogamente,  $s'^* l'^* = 1$  y  $s'^* \in GL(\mathcal{H})$ . Además, vale que  $s'^* b^{1/2} = a^{1/2} g^*$ . ■

La siguiente es una demostración más corta de la primera afirmación de la proposición anterior dada por J. Antezana, que utiliza el teorema de Douglas y la desigualdad de Jensen.

*Demostración.* Es suficiente probar la existencia de  $s \in L(\mathcal{H})$  cuando  $g$  es una contracción. Si  $bh = ga$ , entonces

$$ga^2g^* = bhh^*b \leq \|h\|^2 b^2.$$

Como  $f(t) = t^2$  es una función convexa de operadores y  $f(0)=0$ , entonces, por la desigualdad de Jensen (ver [HP82]), resulta que  $(gag^*)^2 \leq ga^2g^*$ . Por lo tanto  $gag^* \leq (ga^2g^*)^{1/2} \leq \|h\|b$ , pues  $g(t) = t^{1/2}$  es una función monótona creciente de operadores. Luego, por el Teorema de Douglas (Teorema 1.2.1), existe  $s \in L(\mathcal{H})$  tal que  $b^{1/2}s = ga^{1/2}$ . La unicidad de  $s$  sigue del hecho que  $N(b) \subseteq N(s^*)$ . ■

**Corolario 3.3.9.** *Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$  y  $g \in L(\mathcal{H})$  tales que  $b^\dagger ga$  está bien definido y es acotado, entonces  $(b^{1/2})^\dagger ga^{1/2} \in L(\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Si  $b^\dagger ga = h \in L(\mathcal{H})$  entonces  $R(p_b g a) \subseteq R(b)$  y  $bb^\dagger ga = bb^\dagger p_b g a = bh$  con lo cual  $p_b g a = bh$  pues  $bb^\dagger x = x$  para todo  $x \in R(b)$ . Luego, por el Lema 3.3.8, existe un único  $s \in L(\mathcal{H})$  tal que  $b^{1/2}s = p_b g a^{1/2}$  y  $N(b) \subseteq N(s^*)$ . Por lo tanto  $p_b s = (b^{1/2})^\dagger p_b g a^{1/2} = (b^{1/2})^\dagger g a^{1/2}$ . Como  $R(s) \subseteq \overline{R(b)}$ , se sigue que  $s = (b^{1/2})^\dagger g a^{1/2}$ . ■

*Demostración. (del Teorema 3.3.7)* 1. Sean  $a = \alpha u_a$  y  $b = \beta u_b$  las descomposiciones polares de  $a$  y  $b$ . Observemos que  $\alpha$  y  $u_a$  comutan, con lo que  $\alpha^{1/2}$  y  $u_a$  comutan, y lo mismo vale para  $\beta$  y  $u_b$ . Sabemos que existe  $g \in GL(\mathcal{H})$  tal que  $b = gag^*$ , ya que  $b \in \mathcal{O}_a$ . Entonces,  $\beta u_b = g\alpha u_a g^*$  o  $\beta u_b g^{*-1} u_a = g\alpha$  con lo cual  $\beta^\dagger g\alpha \in L(\mathcal{H})$ . Aplicando el Corolario 3.3.9, si  $s = (\beta^{1/2})^\dagger g\alpha^{1/2} \in L(\mathcal{H})$  entonces  $v_b \beta^{1/2} = sv_a \alpha^{1/2} g^*$ . Por lo tanto  $\beta^{1/2} v_b = g\alpha^{1/2} v_a s^*$  con lo cual  $v_b = sv_a s^*$ . Como  $b = gag^*$ , resulta  $N(a) = g^* N(b)$ , y entonces existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que  $N(b) = uN(a)$ . Notemos que  $s = p_b s p_a$ . Si consideramos  $s' = sp_a + u(1 - p_a)$ , se tiene que  $s' \in GL(\mathcal{H})$  (ver la Proposición 3.3.8) y

$$s' u_a s'^* = sv_a s^* p_b + u(1 - p_a)u^*(1 - p_b) = ub.$$

Finalmente, si  $s' = w|s'|$  es la descomposición polar de  $s'$ , con  $w$  unitario, se puede ver fácilmente que  $wu_a w^* = u_b$ , o bien  $u_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{u_a}$ .

2. Si  $w \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  es como en la demostración de la parte 1., entonces  $w$  también verifica que  $wv_a w^* = v_b$ . ■

Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposiciones polares  $a = |a|u_a = |a|v_a$  y  $b = |b|u_b = |b|v_b$  respectivamente. Si  $u_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{u_a}$  no implica que  $b \in \mathcal{O}_a$ , pues por ejemplo sea  $a = p_{\mathcal{S}}$ , donde  $\mathcal{S}$  es un subespacio cerrado no trivial de  $\mathcal{H}$  y sea  $b \in GL(\mathcal{H})^+$ . Entonces  $u_a = u_b = 1$ , pero  $b \notin \mathcal{O}_a$ .

Veremos en la próxima sección que  $v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$  implica que  $b \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si  $a$  tiene rango cerrado.

Para finalizar esta sección vamos a relacionar las componentes de Thompson de un operador autoadjunto con su órbita de congruencia.

Dado  $a \in CR(\mathcal{H})^+$ , recordemos que

$$C_a = \{b \in CR(\mathcal{H})^+ : R(b) = R(a)\},$$

es la componente de Thompson de  $a$ .

Si  $a \in L(\mathcal{H})^s$ , la componente de Thompson de  $a$ , es el conjunto

$$C_a = \{b \in L(\mathcal{H})^s : R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2}), u_b = u_a\},$$

donde  $a = |a|u_a$  y  $b = |b|u_b$  son las respectivas descomposiciones polares de  $a$  y de  $b$ .

En [CMS04], se probó que la componente de Thompson de un operador positivo  $a$  de rango cerrado es un subconjunto de la órbita de  $a$ . Veremos ahora que este hecho se puede generalizar para un operador autoadjunto cualquiera.

**Proposición 3.3.10.**  $C_a \subseteq \mathcal{O}_a$  para todo  $a \in L(\mathcal{H})^s$ .

*Demostración.* Sea  $b \in C_a$ , y sean  $a = a_1 - a_2$  y  $b = b_1 - b_2$  las descomposiciones positivas ortogonales de  $a$  y  $b$  respectivamente. Por el Teorema 2.5.1, resulta que  $b_i \in C_{a_i}$ , para  $i = 1, 2$ . Equivalentemente,  $R(b_i^{1/2}) = R(a_i^{1/2})$ , para  $i = 1, 2$ . Como  $a_i, b_i$  son operadores positivos tenemos, por la Proposición 3.3.1, que  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ , con  $i = 1, 2$ .

Además,  $R(|b|^{1/2}) = R(|a|^{1/2})$ , pues  $b \in C_a$ . Por lo tanto,  $\overline{R(|b|)} = \overline{R(|a|)}$ , o bien  $N(b) = N(a)$ . Estamos entonces en las hipótesis de la Proposición 3.3.6, con lo cual  $b \in \mathcal{O}_a$ , como queríamos demostrar. ■

### 3.4. La órbita de un operador autoadjunto de rango cerrado

Cuando  $a \in L(\mathcal{H})^s$  tiene rango cerrado, es posible dar descripciones más detalladas de la órbita de  $a$ , como veremos en los siguientes resultados.

**Proposición 3.4.1.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ , entonces*

$$\mathcal{O}_a = \bigcup_{u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})} C_{uau^*},$$

donde  $C_{uau^*}$  es la componente de Thompson de  $uau^*$ .

*Demostración.* Sea  $b \in \mathcal{O}_a$ , entonces por Teorema 3.3.7 tenemos que  $v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ . Por lo tanto, existe  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tal que

$$v_b = uv_a u^* = up_{a_1} u^* - up_{a_2} u^*,$$

donde  $a = a_1 - a_2$  es la d.p.o de  $a$ . Como  $v_b = up_{a_1} u^* - up_{a_2} u^*$  es la d.p.o. de  $v_b$ , entonces  $p_{b_1} = up_{a_1} u^*$  y  $p_{b_2} = up_{a_2} u^*$ . Luego,

$$R(b_i) = uR(p_{a_i}) = uR(a_i) = R(ua_i u^*),$$

con lo cual  $b_i \in C_{uau^*}$ , para  $i = 1, 2$ ; ver comentarios posteriores a la Proposición 2.2.2. Como  $uau^* = ua_1 u^* - ua_2 u^*$  es la d.p.o. de  $uau^*$  y por la demostración del Teorema 2.5.1, resulta que  $b \in C_{uau^*}$ .

Recíprocamente, sea  $b \in C_{uau^*}$  para algún  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ . Si  $b = b_1 - b_2$  es la d.p.o de  $b$ , por el Teorema 2.5.1, resulta que  $R(b_i) = R(ua_i u^*) = uR(a_i)$ , pues  $uau^* = ua_1 u^* - ua_2 u^*$  es la d.p.o. de  $uau^*$  y  $b_i \in C_{ua_i u^*}$ . Luego, por Proposición 3.3.1,  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$  para  $i = 1, 2$ . Ya que  $b \in C_{uau^*}$ , entonces  $R(b) = R(uau^*) = uR(a)$ , con lo cual  $N(b) = uN(a)$ . Como

$$b_i \in \mathcal{O}_{a_i} \text{ para } i = 1, 2 \text{ y } \dim N(a) = \dim N(b),$$

por la Porposición 3.3.6, se tiene que  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

**Lema 3.4.2.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  con descomposición polar  $a = |a|v_a$ , entonces  $\mathcal{O}_{v_a} = \mathcal{O}_a$ .*

*Demostración.* Como  $|a|$  commuta con  $v_a$ , entonces  $|a|^{1/2}$  y  $v_a$  también commutan. Luego,  $a = g|a|^{1/2}v_a|a|^{1/2}$  y si consideramos  $h = |a|^{1/2}p_a + 1 - p_a$ , resulta que  $h \in GL(\mathcal{H})^s$ . En efecto,  $h^{-1} = (|a|^{1/2})^\dagger p_a + 1 - p_a$ . Además, como  $p_a v_a = v_a p_a = v_a$  se tiene que y  $h v_a h^* = |a|^{1/2}v_a|a|^{1/2} = a$  con lo cual  $a \in \mathcal{O}_{v_a}$ . Como órbitas distintas son disjuntas, entonces  $\mathcal{O}_{v_a} = \mathcal{O}_a$ . ■

Como vimos en el Teorema 3.3.7, si un operador autoadjunto es congruente con un operador  $a \in L(\mathcal{H})^s$ , entonces su isometría parcial es unitariamente equivalente a la isometría parcial de  $a$ . Veremos ahora que la recíproca es cierta si y sólo si el operador  $a$  tiene rango cerrado.

**Teorema 3.4.3.** *Consideremos  $a, b \in CR(\mathcal{H})^s$ . Entonces  $b \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si  $v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ , entonces  $v_b \in \mathcal{O}_{v_a}$ . Es decir,  $\mathcal{O}_{v_a} = \mathcal{O}_{v_b}$ , y por el Lema 3.4.2, se tiene que  $\mathcal{O}_b = \mathcal{O}_{v_b} = \mathcal{O}_{v_a} = \mathcal{O}_a$ , con lo cual  $b \in \mathcal{O}_a$  como queríamos. La recíproca sigue del Teorema 3.3.7. ■

Notemos que si  $a$  no tiene rango cerrado el resultado anterior no es cierto. En efecto,  $v_a \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$  pero  $v_a \notin \mathcal{O}_a$  (ya que el rango de  $v_a$  es cerrado pero el de  $a$  no).

**Corolario 3.4.4.** *Sean  $a, b \in CR(\mathcal{H})^s$ , con descomposiciones positivas ortogonales  $a = a_1 - a_2$  y  $b = b_1 - b_2$ . Entonces  $b \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si  $p_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_1}}$  y  $p_{b_i} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_i}}$ ,  $i = 1, 2$*

*Demostración.* Si  $b \in \mathcal{O}_a$ , se sigue del Teorema 3.3.7 que  $v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ , o equivalentemente  $v_b = uv_a u^*$ , para algún  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ . Resulta entonces que  $v_b = up_{a_1} u^* - up_{a_2} u^*$  es la d.p.o. de  $v_b$ , con lo cual  $p_{b_i} = up_{a_i} u^*$ , para  $i = 1, 2$  y  $p_b = p_{b_1} + p_{b_2} = up_a u^*$ . Recíprocamente sean  $u, u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tales que  $p_{b_i} = u_i p_{a_i} u_i^*$ , para  $i = 1, 2$  y  $p_b = up_a u^*$ . Si consideramos  $w = p_{b_1} u_1 p_{a_1} + p_{b_2} u_2 p_{a_2} + (1 - p_b)u(1 - p_a)$ , se tiene que  $w \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  y además  $wv_a w^* = p_{b_1} u_1 p_{a_1} u_1^* p_{b_1} - p_{b_2} u_2 p_{a_2} u_2^* p_{b_2} = v_b$ . Por el Teorema 3.4.3,  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Obtenemos ahora una caracterización de la órbita de un operador autoadjunto de rango cerrado, en función de las dimensiones de los rangos de su parte positiva, su parte negativa y de su núcleo.

Dados  $n, m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$  de manera que  $n + m_1 + m_2 = \dim \mathcal{H}$ , definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{n,m_1,m_2} &= \{b \in CR(\mathcal{H})^s : \dim N(b) = n, \dim R(b_i) = m_i, i = 1, 2, \\ &\quad \text{donde } b = b_1 - b_2 \text{ es la d.p.o. de } b\}.\end{aligned}$$

**Proposición 3.4.5.** *Si  $a \in \mathcal{A}_{n,m_1,m_2}$ , entonces  $\mathcal{O}_a = \mathcal{A}_{n,m_1,m_2}$ .*

*Demuestração.* Sea  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces existen  $w, w_1, w_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tales que  $p_b = wp_a w^*$  y  $p_{b_i} = w_i p_{a_i} w_i^*$  para  $i = 1, 2$ , con lo cual  $w(R(a)) = R(b), w_i(R(a_i)) = R(b_i), i = 1, 2$ . También vale que  $w(N(a)) = w(R(a)^\perp) = w(R(a))^\perp = R(b)^\perp = N(b)$ , pues  $w \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ . Luego  $b \in \mathcal{A}_{n,m_1,m_2}$ .

Recíprocamente, supongamos ahora que  $b \in \mathcal{A}_{n,m_1,m_2}$ . Existen entonces isometrías  $v, v_1, v_2$  tales que llevan bases ortogonales de  $N(a), R(a_1)$  y  $R(a_2)$  en bases ortogonales de  $N(b), R(b_1)$  y  $R(b_2)$  respectivamente. Sea  $u = v_1 p_{a_1} + v_2 p_{a_2} + v(1 - p_a)$ . Se tiene que  $uN(a) = N(b)$  y  $uR(a_i) = R(b_i), i = 1, 2$  para algún  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ , ya que  $\mathcal{H} = R(a_1) \oplus R(a_2) \oplus N(a) = R(b_1) \oplus R(b_2) \oplus N(b)$ . Si  $q = up_a u^*$ , se tiene que  $q^2 = q = q^*$  y  $R(q) = uR(a) = R(b)$  con lo cual  $q = p_b$ . Por lo tanto,  $p_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_a}$ . Análogamente, vale que  $p_{b_i} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_i}}, i = 1, 2$ . Por la Proposición 3.3.6, se obtiene que  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Como consecuencia de la proposición anterior y del Teorema 3.4.3, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.4.6.** *Sea  $\mathcal{B}_{n,m_1,m_2} = \mathcal{I}^s \cap \mathcal{A}_{n,m_1,m_2}$ . Si  $v \in \mathcal{B}_{n,m_1,m_2}$ , entonces  $\mathcal{U}\mathcal{O}_v = \mathcal{B}_{n,m_1,m_2}$ .*

La órbita de  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  puede también relacionarse con las órbitas de la parte positiva y negativa de  $a$  de la manera que muestra el próximo resultado.

**Proposición 3.4.7.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  con d.p.o.  $a = a_1 - a_2$ , entonces*

$$\mathcal{O}_a = \{b_1 - b_2 : b_i \in \mathcal{O}_{a_i}, i = 1, 2, p_{b_1} + p_{b_2} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_a}\}.$$

*Demuestração.* Consideremos  $b \in \mathcal{O}_a$  con d.p.o.  $b = b_1 - b_2$ . Por el Corolario 3.4.4, vale que  $p_b = p_{b_1} + p_{b_2} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_a}$  y  $p_{b_i} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_i}}, i = 1, 2$ . Por lo tanto,  $\mathcal{O}_{p_{b_i}} = \mathcal{O}_{p_{a_i}}$ , para  $i = 1, 2$  con lo cual, por la Proposición 3.3.1, se sigue que  $\mathcal{O}_{a_i} = \mathcal{O}_{p_{a_i}}$  y  $\mathcal{O}_{b_i} = \mathcal{O}_{p_{b_i}}$ . Luego  $\mathcal{O}_{a_i} = \mathcal{O}_{b_i}, i = 1, 2$ .

Recíprocamente, sea  $b = b_1 - b_2$  tal que  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ ,  $i = 1, 2$  y  $p_{b_1} + p_{b_2} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_a}$ . Existe entonces  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  de manera que  $p_{b_1} + p_{b_2} = up_a u^*$ , con lo que  $p_{b_1} + p_{b_2}$  es una proyección ortogonal. Luego los rangos  $R(b_1)$  y  $R(b_2)$  son ortogonales, y entonces  $b = b_1 - b_2$  es la d.p.o. de  $b$ . Luego  $p_b = p_{b_1} + p_{b_2} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_a}$ . Como  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$  se tiene que  $p_{b_i} \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_i}}$ . Por la Proposición 3.3.6, resulta entonces que  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^s$ . Si  $b \in \mathcal{O}_a$  entonces existe  $g \in GL(\mathcal{H})$  tal que  $b = gag^*$ . Si  $a = a_1 - a_2$  es la d.p.o. de  $a$  entonces  $b = ga_1 g^* - ga_2 g^*$ . Pero esta diferencia de operadores positivos  $ga_i g^*$ ,  $i = 1, 2$ , no es necesariamente la descomposición positiva ortogonal de  $b$ . Motivados por este hecho, estudiaremos en el capítulo 4, descomposiciones de operadores autoadjuntos como diferencia de dos operadores positivos cuyos rangos cumplen cierta condición de ángulo, pero no son necesariamente ortogonales.

### 3.5. Estructura diferencial de la órbita

A continuación estudiamos la estructura diferencial de la órbita de congruencia de un operador autoadjunto de rango cerrado.

A lo largo de esta sección fijaremos  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  con d.p.o.  $a = a_1 - a_2$  y descomposición polar  $a = |a|v_a$ .

Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\pi_a : GL(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}_a, \pi_a(g) = gag^*$$

$$\alpha : \mathcal{O}_a \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha(b) = v_b,$$

$$\beta : GL(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \beta(g) = v_{gag^*}.$$

El siguiente diagrama resulta entonces comutativo:

$$\begin{array}{ccc} GL(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi_a} & \mathcal{O}_a \\ & \searrow \beta & \downarrow \alpha \\ & & \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a} \end{array}$$

Como veremos en la siguiente proposición, la fibra de  $v_a$  por la aplicación  $\alpha$ , es la componente de Thompson de  $a$ .

**Proposición 3.5.1.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ , entonces la fibra de  $v_a$  por  $\alpha$  es la componente de Thompson de  $a$ , i.e.  $\alpha^{-1}(\{v_a\}) = C_a$ .*

*Demuestra*ción. Consideremos  $b \in \alpha^{-1}(\{v_a\})$ , entonces  $b \in \mathcal{O}_a$  y  $v_b = v_a$ . Por lo tanto  $b \in C_a$ . Recíprocamente, si  $b \in C_a$  entonces  $v_b = v_a$  en lo cual  $v_b \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ . Por el Teorema 3.4.3, se tiene que  $b \in \mathcal{O}_a$ . Como  $v_b = v_a$  y  $b \in \mathcal{O}_a$ , resulta  $b \in \alpha^{-1}(\{v_a\})$ . ■

Para dotar a  $\mathcal{O}_a$  de una estructura de variedad diferencial queremos que

$$\pi_a : GL(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{O}_a, \pi_a(g) = gag^*,$$

tenga secciones locales. Pero esto puede no ocurrir si consideramos en  $\mathcal{O}_a$  la topología dada por la norma de operadores; ver, por ejemplo, [CMS04, Teorema 3.4]. Consideremos entonces la siguiente métrica en  $\mathcal{O}_a$ :

$$d(b, c) = (\|b - c\|^2 + \|p_b - p_c\|^2)^{1/2}.$$

Observemos que  $d$  coincide con la métrica usual en cada componente de Thompson.

En [CMM09], Corach, Maestripieri y Mbekhta introdujeron esta métrica en el conjunto de operadores de rango cerrado. Entre otras cosas, probaron la continuidad de la aplicación  $\mu : (CR(\mathcal{H}), d) \rightarrow (CR(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ,  $\mu(b) = b^\dagger$ , ver Sección 3.1.

**Proposición 3.5.2.** *La aplicación  $\alpha : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \|\cdot\|)$ ,  $\alpha(b) = v_b$  es continua.*

*Demuestra*ción. La continuidad de  $\alpha$  sigue del hecho que  $v_b = b^\dagger|b|$  y las aplicaciones  $\mu : (CR(\mathcal{H}), d) \rightarrow (\mathcal{O}_a, \|\cdot\|)$ ,  $\mu(b) = b^\dagger$  y  $|\cdot| : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (L(\mathcal{H})^+, \|\cdot\|)$  son continuas (ver Proposición 3.1.3). ■

**Corolario 3.5.3.** *La aplicación  $p_i : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_i}}, \|\cdot\|)$ ,  $p_i(b) = p_{b_i}$  es continua para  $i = 1, 2$ , donde  $b = b_1 - b_2$  es la d.p.o. de  $b$ .*

*Demuestra*ción. La aplicación  $p : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{p_a}, \|\cdot\|)$ ,  $p(b) = p_b = bb^\dagger$  es continua. Entonces, por la Proposición 3.5.2, se sigue que  $p_1 : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_1}}, \|\cdot\|)$  es continua ya que  $p_1(b) = p_{b_1} = \frac{v_b + p_b}{2}$ . De manera análoga,  $p_2$  es continua. ■

Para probar la existencia de secciones locales de  $\pi_a$ , usaremos los siguientes resultados técnicos. El siguiente resultado puede verse en [Kat75].

**Lema 3.5.4.** *Sean  $p, q \in L(\mathcal{H})$  proyecciones ortogonales tales que  $\|p - q\| < 1$  y consideremos  $h = 1 - (p - q)^2$ . Entonces  $h \in GL(\mathcal{H})^+$  y  $qh^{-1/2}ph^{-1/2}q = q$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $h \in GL(\mathcal{H})^+$  pues  $\|p - q\| < 1$ . Es fácil ver que  $p$  y  $q$  commutan con  $h$ ; en efecto,  $hq = qh = qpq$ . Por lo tanto,  $p$  y  $q$  también commutan con  $h^{-1/2}$  y  $qh^{-1/2}ph^{-1/2}q = qpqh^{-1} = q$ . ■

Dados  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  y  $g \in GL(\mathcal{H})$ , veremos ahora una conocida fórmula para la proyección ortogonal con rango  $gR(a)$ . Se conocen distintas fórmulas para la proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado, ver por ejemplo [Ger84].

**Lema 3.5.5.** *Sean  $a \in L(\mathcal{H})$  de rango cerrado y  $g \in GL(\mathcal{H})$ . Entonces*

$$p_{gag^*} = p_{g(R(a))} = gp_a g^{-1} (gp_a g^{-1})^* (1 - (gp_a g^{-1} - (gp_a g^{-1})^*)^2)^{-1}.$$

*Demostración.* Sean  $w = gp_a g^{-1}$  y  $c = 1 - (w - w^*)^2$ . Como  $c = 1 - (w - w^*)^2 = 1 + d$  donde  $d = -(w - w^*)^2 = (w - w^*)(w - w^*)^*$  entonces  $c = 1 + d$  con  $d$  positivo. Por lo tanto,  $c$  es positivo e inversible. Sea entonces  $q = ww^*c^{-1}$ . Queremos ver que  $q = p_{g(R(a))}$ . Tenemos que  $R(q) = R(ww^*) = R(|w^*|^2) = R(w) = gR(a)$ , ya que  $R(|w^*|) = R(w)$  es cerrado. Como  $w^2 = w$ , resulta que  $cw = ww^*w = wc$ . Entonces  $c^{-1}$  también commuta con  $w$  y con  $w^*$ . Por lo tanto,  $q^2 = ww^*wc^{-1}w^*c^{-1} = ww^*c^{-1} = q$  y vale también que  $q^* = q$ . Luego,  $q = p_{g(R(a))}$ . ■

**Teorema 3.5.6.** *La aplicación  $\pi_a : (GL(\mathcal{H}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{O}_a, d)$ ,  $\pi_a(g) = gag^*$  es continua y admite secciones locales continuas.*

*Demostración.* Notemos que  $p_{gag^*}$  depende de manera continua de  $g \in GL(\mathcal{H})$ , ya que la proyección ortogonal sobre  $g(R(a))$  está dada por la fórmula

$$p_{gag^*} = p_{g(R(a))} = gp_a g^{-1} (gp_a g^{-1})^* (1 - (gp_a g^{-1} - (gp_a g^{-1})^*)^2)^{-1},$$

por el Lema 3.5.5. También  $gag^*$  depende de manera continua de  $g \in GL(\mathcal{H})$ . Entonces, se sigue que  $\pi_a : (GL(\mathcal{H}), \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{O}_a, d)$  es continua.

Sea  $p : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{p_a}, \|\cdot\|)$ ,  $p(b) = p_b$  y  $p_i : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{p_{a_i}}, \|\cdot\|)$ ,  $p_i(b) = p_{b_i}$ . Como  $p$  y  $p_i$  son continuas, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|p_b - p_a\| < 1$ ,  $\|p_{b_i} - p_{a_i}\| < 1$ ,  $i = 1, 2$ , si  $b \in \mathcal{O}_a$  y  $d(b, a) < \delta$ . Consideremos  $b \in \mathcal{O}_a$  tal que  $d(b, a) < \delta$ , entonces  $g = 1 - (p_b - p_a)^2 \in GL(\mathcal{H})^+$  y  $g_i = 1 - (p_{b_i} - p_{a_i})^2 \in GL(\mathcal{H})^+$ ,  $i = 1, 2$ .

Definimos  $s(b) = b_1^{1/2} g_1^{-1/2} (a_1^\dagger)^{1/2} - b_2^{1/2} g_2^{-1/2} (a_2^\dagger)^{1/2} + (1 - p_b)g^{-1/2}(1 - p_a)$ . Es fácil ver, aplicando el Lema 3.5.4, que

$$s(b)^{-1} = a_1^{1/2} g_1^{-1/2} (b_1^\dagger)^{1/2} - a_2^{1/2} g_2^{-1/2} (b_2^\dagger)^{1/2} + (1 - p_a)g^{-1/2}(1 - p_b),$$

pues:

$$\begin{aligned}
 s(b)s(b)^{-1} &= b_1^{1/2}g_1^{-1/2}(a_1^\dagger)^{1/2}a_1^{1/2}g_1^{-1/2}(b_1^\dagger)^{1/2} - b_2^{1/2}g_2^{-1/2}(a_2^\dagger)^{1/2}a_2^{1/2}g_2^{-1/2}(b_2^\dagger)^{1/2} \\
 &\quad + (1-p_b)g^{-1/2}(1-p_a)g^{-1/2}(1-p_b) \\
 &= b_1^{1/2}g_1^{-1/2}p_{a_1}g_1^{-1/2}(b_1^\dagger)^{1/2} - b_2^{1/2}g_2^{-1/2}p_{a_2}g_2^{-1/2}(b_2^\dagger)^{1/2} \\
 &\quad + (1-p_b)g^{-1/2}(1-p_a)g^{-1/2}(1-p_b) \\
 &= p_{b_1} + p_{b_2} + p_{N(a)} = 1.
 \end{aligned}$$

Es decir,  $s(b) \in GL(\mathcal{H})$ .

También como consecuencia del Lema 3.5.4, se sigue que  $\pi(s(b)) = b$ . En efecto:

$$\begin{aligned}
 \pi(s(b)) &= s(b)(a_1 - a_2)s(b)^* \\
 &= s(b)(a_1 - a_2)(a_1^\dagger)^{1/2}g_1^{-1/2}b_1^{1/2} - s(b)(a_1 - a_2)(a_2^\dagger)^{1/2}g_2^{-1/2}b_2^{1/2} \\
 &= s(b)a_1((a_1^\dagger)^{1/2}g_1^{-1/2}b_1^{1/2}) + s(b)a_2((a_2^\dagger)^{1/2}g_2^{-1/2}b_2^{1/2}) \\
 &= b_1^{1/2}g_1^{-1/2}(a_1^\dagger)^{1/2}a_1(a_1^\dagger)^{1/2}g_1^{-1/2}b_1^{1/2} - b_2^{1/2}g_2^{-1/2}(a_2^\dagger)^{1/2}a_2(a_2^\dagger)^{1/2}g_2^{-1/2}b_2^{1/2} \\
 &= b_1^{1/2}g_1^{-1/2}p_{a_1}g_1^{-1/2}b_1^{1/2} - b_2^{1/2}g_2^{-1/2}p_{a_2}g_2^{-1/2}b_2^{1/2} \\
 &= b_1 - b_2 = b.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $s$  es una sección local continua de  $\pi$  en un entorno de  $a$ . Si  $c = gag^*$ ,  $g \in GL(\mathcal{H})$ , consideremos  $s' = l_g \circ s \circ L_{g^{-1}}$ , donde  $L_g : CR(\mathcal{H})^s \rightarrow \mathcal{O}_a$ ,  $L_g(b) = gbg^*$  y  $l_g : GL(\mathcal{H}) \rightarrow GL(\mathcal{H})$  es la multiplicación a izquierda por  $g$ . Resulta que  $s'$  es una sección local de  $\pi$  en un entorno de  $c$ . ■

Observemos que de la proposición anterior resulta que  $\mathcal{O}_a$  es abierta en  $(L(\mathcal{H})^s, d)$ , con lo cual es también cerrada.

Denotemos por  $I_a$  al *grupo de isotropía* de  $a$  dado por la acción  $L$ , i.e.

$$I_a = \{g \in GL(\mathcal{H}) : gag^* = a\}.$$

**Corolario 3.5.7.** *El espacio métrico  $(\mathcal{O}_a, d)$  es homeomorfo al espacio cociente  $GL(\mathcal{H})/I_a$ , donde consideramos la topología cociente.*

Recordemos que si  $G$  un grupo de Lie-Banach y  $H$  un subgrupo regular de  $G$ , entonces  $G/H$  tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que  $G \rightarrow G/H$  es una sumersión y  $G \rightarrow G/H$  es un fibrado principal con grupo estructural  $H$ , ver Sección 1.5. Por lo tanto, para proveer a  $\mathcal{O}_a \sim G/I_a$  con una estructura de variedad diferenciable usando el Teorema 1.5.5, necesitamos probar que  $I_a$  es un subgrupo regular de  $G$ .

Notaremos en lo que sigue  $\tilde{a} = a|_{R(a)}$ . Observemos que  $\tilde{a} \in GL(R(a))^s$ .

La siguiente proposición da una caracterización del grupo de isotropía de un operador autoadjunto  $a$ .

**Proposición 3.5.8.** Sea  $g \in GL(\mathcal{H})$ , entonces  $g \in I_a$  si y sólo si  $g \in GL(\mathcal{H})$  y la representación matricial de  $g$  inducida por  $p_a$  está dada por  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$  con  $g_{11}^{-1}\tilde{a} = \tilde{a}g_{11}^*$ .

*Demostración.* Sea  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in I_a$  entonces  $g(R(a)) = R(a)$ , con lo cual  $p_a g p_a = g p_a$  y  $(1 - p_a)g p_a = 0$ . Tenemos entonces que  $g_{21} = 0$ . También  $g^{-1} \in I_a$ , ya que  $g \in I_a$ ; y, por lo tanto  $g^{-1}(R(a)) = R(a)$ . Luego,  $g_{11} \in GL(R(a))$  pues  $w_{11} = p_a g^{-1} p_a|_{R(a)} = g^{-1} p_a|_{R(a)}$  es el inverso de  $g_{11}$ . Además, como  $gag^* = a$ , resulta que  $g_{11}\tilde{a}g_{11}^* = \tilde{a}$  o bien  $g_{11}^{-1}\tilde{a} = \tilde{a}g_{11}^*$ , como queríamos. La recíproca se ve fácilmente. ■

Si  $\mathcal{S}$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  entonces  $(\mathcal{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert y para cada operador  $c \in GL(\mathcal{S})^s$  la siguiente forma indefinida:

$$\langle x, y \rangle_c = \langle x, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{S}.$$

Dado  $h \in L(\mathcal{S})$ , se dice que  $f \in L(\mathcal{S})$  es el *adjunto* de  $h$  respecto de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_c$  si

$$\langle hx, y \rangle_c = \langle x, fy \rangle_c, \quad x, y \in \mathcal{S},$$

o equivalentemente,  $h^*c = cf$ .

Notemos entonces que, por la proposición anterior, resulta que  $I_a$  se identifica con el grupo unitarios de  $(L(R(a)), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{a}^{-1}})$ , es decir con los operadores en  $v \in GL(R(a))$  tales que

$$\tilde{a}v^* = v^{-1}\tilde{a}.$$

Como consecuencia de la Proposición 3.5.8, se tiene la siguiente identificación del espacio tangente al grupo de isotropía de  $a$ .

**Proposición 3.5.9.** Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ . Entonces  $I_a$  es un grupo de Lie-Banach y

$$(TI_a)_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H}) : X_{11}\tilde{a} = -\tilde{a}X_{11}^* \right\}.$$

*Demostración.* Sea  $X \in (TI_a)_1$ , entonces existe una curva suave  $g(t) \subseteq I_a$  con  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , tal que  $g(0) = 1$  y  $\dot{g}(0) = X$ . Como  $g(t)bg(t)^* = b$ , resulta que  $\dot{g}(t)bg(t)^* + g(t)b\dot{g}(t)^* = 0$ . En particular, para  $t = 0$ , se tiene que  $Xa + aX^* = 0$ , o bien  $Xa = -aX$ . Pero además  $g(t) \subseteq I_a$ , entonces  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$ , con lo que  $X = \dot{g}(0) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}$ . De todo lo anterior, resulta que  $X_{11}\tilde{a} = -\tilde{a}X_{11}^*$ . Recíprocamente, sea

$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H})$  tal que  $X_{11}\tilde{a} = -\tilde{a}X_{11}^*$ . Si consideramos la curva suave  $g(t) = e^{Xt}$ , se puede ver fácilmente que  $g(t) \in GL((\mathcal{H}))$ ,  $g(0) = 1$  y  $\dot{g}(0) = X$ . Para ver que  $g(t) \in I_a$  es suficiente mostrar que  $\tilde{a}e^{tX_{11}^*} = e^{-tX_{11}}\tilde{a}$ . Pero,

$$\tilde{a}e^{tX_{11}^*} = \tilde{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX_{11}^*)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tX_{11})^n}{n!} \tilde{a} = e^{-tX_{11}}\tilde{a},$$

pues  $X_{11}\tilde{a} = -\tilde{a}X_{11}^*$ . ■

De los resultados anteriores vemos que  $I_a$  es un subgrupo regular de  $GL(\mathcal{H})$ , i.e.,  $I_a$  es un grupo de Banach-Lie tal que  $(TI_a)_1$  es un subespacio cerrado y complementado de  $(TGL(\mathcal{H}))_1$ .

Resulta entonces que  $GL(\mathcal{H})/I_a$  tiene estructura de variedad diferencial y, por el Corolario 3.5.7,  $(\mathcal{O}_a, d)$  es una variedad diferencial.

También se tiene que  $(GL(\mathcal{H}), \mathcal{O}_a, \pi_a)$  es un fibrado principal con grupo estructural  $I_a$ .

El siguiente resultado describe el espacio tangente a la órbita.

**Proposición 3.5.10.** *Dado  $b \in \mathcal{O}_a$  el espacio tangente  $(T\mathcal{O}_a)_b$  se identifica con el conjunto*

$$(T\mathcal{O}_a)_b = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_1 & W^* \\ W & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H}) : X_1 = X_1^* \right\},$$

donde la representación matricial de  $X$  está dada por  $p_b$ .

*Demuestra*ción. Consideremos primero el caso en que  $b = a$ . Sea  $\gamma(t) \subset \mathcal{O}_a$  una curva suave tal que  $\gamma(0) = a$  y  $\dot{\gamma}(0) = X$ . Por la existencia de secciones locales en un entorno de  $a$ , sea  $g(t) \subset GL(\mathcal{H})$  tal que  $\gamma(t) = g(t)ag(t)^*$ ,  $g(0) = 1$ ,  $\dot{g}(0) = Y$ . Calculando la derivada de  $\gamma$  en  $t = 0$  obtenemos que  $\dot{\gamma}(0) = \dot{g}(0)a + a\dot{g}(0)^*$  o bien  $X = Ya + aY^*$ .

Si  $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$  es la representación matricial dada por  $p$ , entonces

$$X = \begin{pmatrix} Y_{11}a & 0 \\ Y_{21}a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aY_{11}^* & aY_{21}^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}a + aY_{11}^* & aY_{21}^* \\ Y_{21}a & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,  $X = \begin{pmatrix} X_1 & W^* \\ W & 0 \end{pmatrix}$  con  $X_1 = X_1^*$ . Recíprocamente, si  $X$  tiene esa forma consideremos  $Y_{11} = \frac{1}{2}X_1a^\dagger$ ,  $Y_{21} = Wa^\dagger$  y  $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ , entonces  $Ya + aY^* = X$  y

si  $g(t) = e^{Xt}$  resulta que  $\gamma = gag^*$ ,  $\gamma(0) = a$  y  $\dot{\gamma}(0) = X$ . La demostración es análoga para cualquier  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Definiremos ahora en el espacio homogéneo  $(GL(\mathcal{H}), \mathcal{O}_a, I_a)$ , una conexión natural dando una distribución suave de espacios horizontales. A través de la conexión será posible obtener una levantada horizontal de cualquier curva  $\gamma$  en  $\mathcal{O}_a$ . Ésta será la solución de una ecuación diferencial lineal, llamada ecuación de transporte. Luego, podremos definir una derivada covariante y la noción de geodésica.

Notemos que la aplicación tangente a la aplicación  $\pi$  en  $1 \in L(\mathcal{H})$ ,  $(T\pi)_1 : L(\mathcal{H}) \rightarrow (T\mathcal{O}_a)_a$  se identifica con

$$(T\pi)_1(X) = Xa + aX^*$$

y

$$N(T\pi)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H}) : X_{11}a = -aX_{11}^* \right\} = (TI_a)_1.$$

Notemos que  $X_{11}$  es  $a^\dagger$ -antisimétrico, si lo consideramos como un operador en  $L(R(a))$ . como

$$\mathcal{H}_1^{(a)} = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H}) : X_{11}a = aX_{11}^* \right\},$$

y el *espacio vertical* en 1 como

$$\mathcal{V}_1^{(a)} = (TI_a)_1.$$

Resulta que  $L(\mathcal{H}) = \mathcal{V}_1^{(a)} \oplus \mathcal{H}_1^{(a)}$  y además

$$(T\pi)_1|_{\mathcal{H}_1^{(a)}} : \mathcal{H}_1^{(a)} \rightarrow (T\mathcal{O}_a)_a, \quad (T\pi)_1|_{\mathcal{H}_1^{(a)}}(X) = 2X_{11}a + X_{21}a + aX_{21}^*$$

donde  $X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1^{(a)}$ , es un isomorfismo y la aplicación inversa

$$K_a = ((T\pi)_1|_{\mathcal{H}_1^{(a)}})^{-1} : (T\mathcal{O}_a)_a \rightarrow \mathcal{H}_1^{(a)}$$

está dada por

$$K_a(X) = \frac{1}{2}pXpa^\dagger + (1-p)Xpa^\dagger = \frac{1}{2}pXa^\dagger + (1-p)Xa^\dagger = (1 - \frac{p}{2})Xa^\dagger;$$

Equivalentemente  $K_a(X) = \frac{1}{2}X_1a^\dagger + Wa^\dagger$ , si  $X = \begin{pmatrix} X_1 & W^* \\ W & 0 \end{pmatrix}$ .

Para cada  $g \in GL(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{H}_g^{(a)} = g\mathcal{H}_1^{(a)}$  es el *espacio horizontal* en  $g$  y  $\mathcal{V}_g^{(a)} = g\mathcal{V}_1^{(a)}$  es el *espacio vertical* en  $g$ . Tenemos entonces que  $L(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_g^{(a)} \oplus \mathcal{V}_g^{(a)}$  y esta distribución de espacios horizontales define una conexión suave.

Recordemos, que dada una curva suave  $\gamma \subset \mathcal{O}_a$ , una curva suave  $\Gamma \subset GL(\mathcal{H})$  es una *levantada* de  $\gamma$  si  $\gamma = \pi(\Gamma) = \Gamma a \Gamma^*$  y  $\Gamma$  es una *levantada horizontal* de  $\gamma$  si  $\Gamma$  es una levantada de  $\gamma$  y  $\dot{\Gamma} \in \mathcal{H}_\Gamma^{(a)}$ .

Por Proposición 2.7.7,  $\Gamma$  es una levantada horizontal de  $\gamma$  si y sólo si  $\Gamma$  es solución de  $\dot{\Gamma} = K_\gamma(\dot{\gamma})\Gamma$ .

En particular, si  $a \in GL(\mathcal{H})^+$  entonces  $C_a = \mathcal{O}_a = GL(\mathcal{H})^+$ . La *longitud* de una curva suave  $\alpha : [0, 1] \rightarrow GL(\mathcal{H})^+$  está definida como  $L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha^{-1/2} \dot{\alpha} \alpha^{-1/2}\| dt$ . La estructura geométrica de este conjunto ya fue estudiada, ver [CPR93c] y [CM99].

Consideremos  $X \in (T\mathcal{O}_a)_a$ , entonces  $X = \begin{pmatrix} X_1 & W^* \\ W & 0 \end{pmatrix}$  donde  $X_1 = X_1^*$ .

Buscamos ahora una geodésica  $\gamma \subset \mathcal{O}_a$  tal que  $\gamma(0) = a$  y  $\dot{\gamma}(0) = X$ . Si  $\gamma = \Gamma a \Gamma^*$  entonces  $\Gamma$  verifica

$$\dot{\Gamma} = K_a(X)\Gamma$$

con  $K_a(X) = (\frac{1}{2}X_1 + W)a^\dagger = (\frac{1}{2}X_1 + W)\check{a}^{-1}$  donde  $\check{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(\mathcal{H})$ . Tenemos entonces que

$$\Gamma(t) = e^{tK_a(X)} = e^{t(\frac{1}{2}X_1 + W)a^\dagger}$$

y

$$\gamma(t) = e^{tY a^\dagger} a e^{ta^\dagger Y^*}$$

donde  $Y = \frac{1}{2}X_1 + W$ . Notemos que  $Y + Y^* = X$  and  $Y = Y p_a$ . Se puede ver que

$$\gamma(t) = \check{a} e^{t\check{a}^{-1}Y} e^{t\check{a}^{-1}Y^*} - (1 - p_a).$$

y que  $\gamma(0) = a$ ,  $\dot{\gamma}(0) = X$ .

En particular, si  $b$  y  $c$  están en la componente de Thompson de  $a$ , existe una única geodésica que une esos dos puntos, y coincide con la geodésica dada en la Sección 2.7.

### 3.6. El fibrado $(\mathcal{O}_a, \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha)$

Recordemos que la aplicación

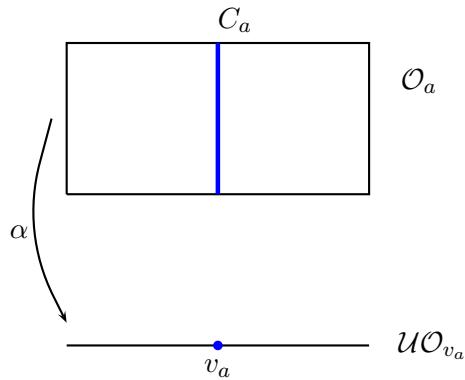
$$\alpha : (\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \|\cdot\|), \quad \alpha(b) = v_b$$

es continua y que la fibra de  $v_a$  por  $\alpha$  es la componente de Thompson de  $a$ , i.e.

$$\alpha^{-1}(\{v_a\}) = C_a,$$

ver proposiciones 3.5.2 y 3.5.1.

En lo que sigue mostraremos que  $(\mathcal{O}_a, \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha)$  es un fibrado.



Para eso, probamos primero algunos resultados técnicos.

**Lema 3.6.1.** *Ses  $a \in CR(\mathcal{H})^s$ . Existe  $0 < \delta < 1$  tal que*

$$\|p_v - p_a\| < 1 \text{ y } \|p_{v_i} - p_{a_i}\| < 1, \text{ para } i = 1, 2, \quad \forall v \in \mathcal{I}^s, \|v - v_a\| < \delta,$$

donde  $v = p_{v_1} - p_{v_2}$  y  $v_a = p_{a_1} - p_{a_2}$ .

*Demostración.* Como la aplicación  $v \rightarrow v^2$  es continua (con la norma de operadores), entonces  $\delta > 0$  tal que  $\|p_v - p_a\| = \|v^2 - v_a^2\| < 1$  if  $\|v - v_a\| < \delta$ . Consideremos  $v \in \mathcal{I}^s$  con descomposición positiva ortogonal  $v = p_1 - p_2$ . Ya que  $p_v = p_1 + p_2$  y  $p_a = p_{a_1} + p_{a_2}$ , resulta que  $\|p_1 - p_{a_1}\| = \frac{1}{2}\|v - v_a + p_v - p_a\| \leq \frac{1}{2}(\|v - v_a\| + \|p_v - p_a\|) < 1$  if  $\|v - v_a\| < \delta$  para  $\delta$  suficientemente chico. Análogamente para  $\|p_2 - p_{a_2}\|$ . ■

**Observación 3.6.2.** Consideremos  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  con descomposición polar  $a = |a|v_a$ . Observemos que  $V_a = \{v \in \mathcal{I}^s : \|v - v_a\| < \delta\} \subseteq \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ , con  $\delta$  como en el Lema 3.6.1. En efecto, por la Proposición 3.2.5 y el Lema 3.6.1, dado  $v \in V_a$  resulta que existen  $u_1, u_2, u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tales que  $p_i = u_i p_{a_i} u_i^*$ , para  $i = 1, 2$  y  $p_v = u p_a u^*$ , donde  $v = p_1 - p_2$ . Si  $w = u_1 p_{a_1} + u_2 p_{a_2} + u(1 - p_a)$  es fácil ver que  $w \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  y  $wv_a w^* = v$ , i.e.  $v \in \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}$ .

**Proposición 3.6.3.** Para  $b \in \mathcal{O}_a$  sea  $V_b = \{v \in \mathcal{I}^s : \|v - v_b\| < \delta\}$  con  $\delta$  como en el Lema 3.6.1. Entonces el conjunto d-aberto  $\alpha^{-1}(V_b)$  es homeomorfo al producto  $C_b \times V_b$ , donde  $C_b$  es la componente de Thompson de  $b$ .

*Demuestra*ción. Notemos que, por la Observación 3.6.2,  $V_b \subseteq \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_b}$ . Consideremos  $e_i = 1 - (p_{v_i} - p_{b_i})^2$ ,  $i = 1, 2$  y  $e = 1 - (p_v - p_b)^2$ . Entonces, por los lemas 3.5.4 y 3.6.1, resulta que  $e_i, e \in L(\mathcal{H})^+$ ,  $i = 1, 2$ .

Definimos entonces

$$\phi(v) = p_{v_1} e_1^{-\frac{1}{2}} p_{b_1} + p_{v_2} e_2^{-\frac{1}{2}} p_{b_2} + (1 - p_v) e^{-\frac{1}{2}} (1 - p_b).$$

Aplicando el Lema 3.5.4, se sigue que  $\phi(v) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ , pues

$$\begin{aligned} \phi(v)\phi(v)^* &= p_{v_1} e_1^{-\frac{1}{2}} p_{b_1} e_1^{-\frac{1}{2}} p_{v_1} + p_{v_2} e_2^{-\frac{1}{2}} p_{b_2} e_1^{-\frac{1}{2}} p_{v_2} + (1 - p_v) e^{-\frac{1}{2}} (1 - p_b) e_1^{-\frac{1}{2}} (1 - p_v) \\ &= p_{v_1} + p_{v_2} + 1 - p_v = 1. \end{aligned}$$

Además, también por el Lema 3.5.4, vale que  $\phi(v)v_b\phi(v)^* = v$ . En efecto,

$$\phi(v)p_{b_i}\phi(v)^* = p_{v_i} e_i^{-\frac{1}{2}} p_{b_i} e_i^{-\frac{1}{2}} p_{v_i} = p_{v_i}, \quad \text{para } i = 1, 2,$$

con lo cual  $\phi(v)v_b\phi(v)^* = \phi(v)p_{b_1}\phi(v)^* - \phi(v)p_{b_2}\phi(v)^* = p_{v_1} - p_{v_2} = v$ .

Definimos ahora

$$f_b : C_b \times V_b \rightarrow \alpha^{-1}(V_b); \quad f_b(c, v) = \phi(v)c\phi(v)^*.$$

La aplicación  $f_b$  está bien definida. En efecto, como  $c \in C_b \subseteq \mathcal{O}_b = \mathcal{O}_a$  entonces  $f_b(c, v) = \phi(v)c\phi(v)^* \in \mathcal{O}_a$ . Por otro lado, como  $c \in C_b$ ,  $\phi(v) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  y  $\phi(v)v_b\phi(v)^* = v$ , entonces  $f_b(c, v) = \phi(v)|c|\phi(v)^*v$ . Por lo tanto, ya que  $R(v) = \phi(v)R(b) = \phi(v)R(c) = R(f_b(c, v))$ , obtenemos que  $v_{f_b(c, v)} = v$ . Entonces  $\|v_{f_b(c, v)} - v_b\| = \|v - v_b\| < \delta$  pues  $v \in V_b$ . Luego  $f_b(c, v) \in \alpha^{-1}(V_b)$ .

Consideremos la siguiente aplicación

$$h : \alpha^{-1}(V_b) \rightarrow C_b \times V_b, \quad h(x) = (\phi(v_x)^*x\phi(v_x), v_x).$$

Notemos que  $h$  está bien definida. En efecto, dado  $x \in \alpha^{-1}(V_b)$ ,  $\alpha(x) = v_x \in V_b$ . Además, como  $\phi(v_x)^*v_x\phi(v_x) = v_b$ , se tiene que

$$d = \phi(v_x)^*x\phi(v_x) = \phi(v_x)^*|x|\phi(v_x)\phi(v_x)^*v_x\phi(v_x) = \phi(v_x)^*|x|\phi(v_x)v_b.$$

Entonces  $v_d = v_b$  pues  $R(v_b) = \phi(v_x)^*R(x) = R(d)$ . Por lo tanto,  $d \in C_b$ . Además,  $(f_b \circ h)(x) = x$  y

$$(h \circ f_b)(c, v) = h(\phi(v)c\phi(v)^*) = (\phi(v)^*\phi(v)c\phi(v)^*\phi(v), v) = (c, v),$$

pues  $v_{f_b(c,v)} = v$ .

Para ver que  $f_b$  es continua es suficiente probar que  $(\mathcal{I}^s, \|\cdot\|) \rightarrow (L(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ,  $v \mapsto \phi(v)$  es continua, ya que  $d(b, c) = (\|b - c\|^2 + \|p_b - p_c\|^2)^{1/2}$  y  $p_{f_b(c,v)} = p_v$ . Pero, por el Corolario 3.5.3, las aplicaciones  $(\mathcal{I}^s, \|\cdot\|) \rightarrow (L(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ,  $v \mapsto p_v$  y  $(\mathcal{I}^s, \|\cdot\|) \rightarrow (L(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ ,  $v \mapsto p_{v_i}$ ,  $i = 1, 2$  son continuas. Luego  $f_b$  es continua. Por la Proposición 3.5.2 y el Corolario 3.5.3; resulta que la aplicación  $(\mathcal{O}_a, d) \rightarrow (\mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \|\cdot\|)$ ,  $x \mapsto \phi(v_x)$  es continua. Por lo tanto  $h$  es continua. ■

Observemos que por el Teorema 2.5.1 y por la Proposición 3.4.5, resulta que las componentes de Thompson de operadores autoadjuntos de rango cerrado son homeomorfas.

**Corolario 3.6.4.** *Sea  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  entonces,  $(\mathcal{O}_a, \mathcal{U}\mathcal{O}_{v_a}, \alpha)$  es un fibrado.*

## Capítulo 4

# Descomposiciones positivas de operadores autoadjuntos

El propósito en este capítulo es estudiar descomposiciones de un operador autoadjunto  $a$  como diferencia de dos operadores positivos cuyos rangos cumplan una cierta condición de ángulo. Mostramos que estas descomposiciones están relacionadas con las descomposiciones canónicas del espacio  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  es una métrica indefinida asociada al operador  $a$ . Como aplicación, describiremos la órbita de congruencia de  $a$  en términos de sus descomposiciones positivas.

### 4.1. Dimensión de espacios con producto interno

Los siguientes resultados pueden encontrarse por ejemplo en [Gud74], [Gud75] y [GH75]. En lo que sigue consideramos un espacio real o complejo  $\mathcal{E}$  con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y norma  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ .

Un conjunto de vectores  $\{e_k\}$  en  $\mathcal{E}$  es una *base* de  $\mathcal{E}$  si cualquier  $x \in \mathcal{E}$  puede escribirse de manera única como  $x = \sum c_k e_k$ , donde la convergencia de la serie es en la norma de  $\mathcal{E}$ . Un conjunto ortonormal  $e_k$  en  $\mathcal{H}$ , es *total* si genera es espacio

El siguiente es un resultado clásico.

**Teorema 4.1.1.** *Si  $\{e_k\}$  es un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert  $\mathcal{E}$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\{e_k\}$  es una base de  $\mathcal{E}$ ,

2.  $\{e_k\}$  es maximal,
3.  $\|x\|^2 = \sum |\langle x, x_k \rangle|^2$  para todo  $x \in \mathcal{E}$  (Identidad de Parseval).

Si  $\{e_k\}$  es un conjunto ortonormal en un espacio con producto interno  $\mathcal{E}$  (no necesariamente completo), entonces  $\{e_k\}$  es una base de  $\mathcal{E}$  si y sólo si vale la identidad de Parseval para todo  $x \in \mathcal{E}$ . Si  $\{e_k\}$  es un conjunto ortonormal maximal, esto no implica necesariamente que  $\{e_k\}$  es una base.

Como cualesquiera dos conjuntos ortonormales maximales en un espacio con producto interno tienen el mismo cardinal, la *dimensión* de un espacio con producto interno se define como el cardinal de cualquier conjunto ortonormal maximal en  $\mathcal{E}$ . Observemos que el Lema de Zorn provee la existencia de un conjunto ortonormal maximal en  $\mathcal{E}$ .

## 4.2. Métrica indefinida asociada a un operador autoadjunto

A lo largo de este capítulo, vamos a considerar  $a \in L(\mathcal{H})^s$  fijo y la métrica indefinida en  $\mathcal{H}$  inducida por  $a$ , dada por

$$\langle x, y \rangle_a = \langle ax, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

En los siguientes párrafos, recordaremos algunas nociones de espacios con producto interno. Un referencia sobre este tema son los libros clásicos de J. Bognar [Bog74] y T.Ya. Azizov y I. S. Iokhvidov [AI89].

Un elemento  $x \in \mathcal{H}$  es *a-positivo*, *a-negativo* o *a-neutro*, respecto de la métrica indefinida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$ , si  $\langle x, x \rangle_a > 0$ ,  $\langle x, x \rangle_a < 0$  o  $\langle x, x \rangle_a = 0$  respectivamente. El elemento  $x$  se dice *a-nonenegativo* (respectivamente *a-nopositivo*), si  $x$  es *a-positivo* or *a-neutro* (respectivamente *a-negativo* o *a-neutro*). Un subespacio  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$  de dice *a-positivo*, *a-negativo* o *a-neutro* si cada elemento no nulo de  $\mathcal{S}$  es *a-positivo*, *a-negativo* o *a-neutro*, respectivamente.

De la misma manera se definen subespacios negativos, neutros, estrictamente positivos y estrictamente negativos.  $\mathcal{S}$  se dice *definido* si es estrictamente negativo o positivo, es *semidefinido* si es negativo o positivo, y es *indefinido* en caso contrario.

Dado  $c \in L(\mathcal{H})$ , un operador  $d \in L(\mathcal{H})$  es un *a-adjunto* de  $c$  si  $\langle cx, y \rangle_a = \langle x, dy \rangle_a$  para todo  $x, y \in \mathcal{H}$ ; o equivalentemente  $ac = d^*a$ . Observemos que un operador  $c$  puede admitir muchos, sólo uno o ningún *a-adjunto*, dependiendo si la ecuación  $c^*a = ah$  tiene muchas, sólo una o ninguna solución, respectivamente. Por el Teorema de Douglas (Teorema 1.2.1), esta ecuación tiene solución si y sólo si  $R(c^*a) \subseteq R(a)$ .

En el caso en que  $c$  admita un único  $a$ -adjunto, éste será denotado por  $c^{*a}$ .

Un operador  $c \in L(\mathcal{H})$  es  $a$ -autoadjunto si  $ac = c^{*a}c$  y es  $a$ -positivo si  $\langle cx, x \rangle_a \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{H}$ , o equivalentemente,  $ac \in L(\mathcal{H})^+$ .

El operador  $c$  se dice  $a$ -expansión (respectivamente,  $a$ -contracción) si  $\langle cx, cx \rangle_a \geq \langle x, x \rangle_a$  (respectivamente,  $\langle cx, cx \rangle_a \leq \langle x, x \rangle_a$ ); o equivalentemente  $c^{*a}ac \geq a$  (respectivamente,  $c^{*a}ac \leq a$ ).

Dados  $x, y \in \mathcal{H}$ , diremos que  $x$  e  $y$  son  $a$ -ortogonales si  $\langle x, y \rangle_a = 0$ . En este caso, notaremos  $x \perp_a y$ . Dado un subespacio  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , el  $a$ -subespacio ortogonal de  $\mathcal{S}$  respecto de la métrica indefinida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  es el conjunto

$$\mathcal{S}^{\perp_a} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle_a = 0, \forall y \in \mathcal{S}\}.$$

No es difícil ver que  $\mathcal{S}^{\perp_a} = a^{-1}(\mathcal{S}^\perp) = a(\mathcal{S})^\perp$ . Observemos que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp_a}$  no es necesariamente cero. Más aún, vale que  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp_a} = \mathcal{S} \cap N(a)$ .

Si  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}$ , entonces  $\mathcal{S}_1 \oplus_a \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$  denota  $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{0\}$  y  $\langle x, y \rangle_a = 0$  para todo  $x \in \mathcal{S}_1$ ,  $y \in \mathcal{S}_2$ .

Observemos que si  $q \in \mathcal{Q}$ , entonces  $q$  es  $a$ -autoadjunto si y sólo si  $R(q)$  y  $N(q)$  son  $a$ -ortogonales. En efecto, si  $q$  es  $a$ -autoadjunto entonces:

$$\langle qx, (1 - q)y \rangle_a = \langle q^*ax, (1 - q)y \rangle_a = 0, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Recíprocamente, tenemos que

$$\langle aqx, y \rangle_a = \langle qx, y \rangle_a = \langle qx, qy \rangle_a = \langle q^*ax, y \rangle_a \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

pues  $R(q)$  y  $N(q)$  son  $a$ -ortogonales.

Una descomposición canónica de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  es una descomposición de  $\mathcal{H}$  como una suma directa

$$\mathcal{H} = N(a) \oplus_a \mathcal{S}^+ \oplus_a \mathcal{S}^-, \tag{4.1}$$

donde  $\mathcal{S}^+$  es un subespacio cerrado  $a$ -positivo de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{S}^-$  es un subespacio cerrado  $a$ -negativo de  $\mathcal{H}$ .

En particular, si  $a \in L(\mathcal{H})^s$  es inyectivo, una descomposición canónica de  $\mathcal{H}$  es una descomposición de  $\mathcal{H}$  como una suma directa  $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus_a \mathcal{S}^{\perp_a}$ , donde  $\mathcal{S}$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  tal que  $\mathcal{S}$  es  $a$ -positivo y  $\mathcal{S}^{\perp_a}$  es  $a$ -negativo.

En este caso, cada descomposición canónica define la proyección  $q = P_{\mathcal{S}/\mathcal{S}^{\perp_a}}$ , o equivalentemente, la reflexión  $w = 2q - 1$ . Observemos que  $q$  es  $a$ -autoadjunto,  $R(q) = \mathcal{S}$  es  $a$ -positivo y  $N(q) = \mathcal{S}_a^\perp$  es  $a$ -negativo. Recíprocamente, todo  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $a$ -autoadjunto,

tal que  $R(q)$  es  $a$ -positivo y  $N(q)$  es  $a$ -negativo, define una descomposición canónica de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ .

S. Hassi and K. Norström probaron que dado  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $q$  es una  $a$ -expansión ( $a$ -contracción) si y sólo si  $q$  es  $a$ -autoadjunta y  $N(q)$  es  $a$ -noperativo ( $a$ -nonegativa); [HN94, Proposición 5].

El siguiente lema caracteriza aquellas reflexiones asociadas a descomposiciones canónicas, y es una extensión de [MMP06, Lema 5.6]:

**Lema 4.2.1.** *Sea  $q \in \mathcal{Q}$ . Entonces,  $q$  es  $a$ -autoadjunto,  $R(q)$  es  $a$ -nonegativo y  $N(q)$  es  $a$ -noperativo si y sólo si la reflexión  $w = 2q - 1$  es  $a$ -positiva.*

*Demostración.* Si  $q$  es una proyección  $a$ -autoadjunta entonces  $aq = q^*aq$ , con lo cual si  $w = 2q - 1$  y  $x \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle wx, x \rangle_a = \langle qx, qx \rangle_a - \langle (1 - q)x, (1 - q)x \rangle_a \geq 0, \quad (4.2)$$

pues  $R(q)$  es  $a$ -nonegativo y  $N(q)$  es  $a$ -noperativo. Por lo tanto,  $w$  es  $a$ -positivo. Recíprocamente, si  $w$  es  $a$ -positivo entonces  $w$  es  $a$ -autoadjunto. Luego,  $q = \frac{w+1}{2}$  es  $a$ -autoadjunto. Por (4.2), si  $x \in R(q)$ , entonces  $\langle qx, qx \rangle_a = \langle wx, x \rangle_a \geq 0$ ; con lo que  $R(q)$  es  $a$ -nonegativo. De manera similar se tiene que  $N(q)$  es  $a$ -noperativo. ■

La siguiente proposición caracteriza las reflexiones  $a$ -positivas, en términos de su descomposición polar en  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$ .

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $a = u_a|a|$  la descomposición polar de  $a$ . Una reflexión  $w$  es  $a$ -positiva si y sólo si  $w$  admite una descomposición polar en  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$  dada por  $w = u_ad$ , donde  $d \in GL(\mathcal{H})$  es  $|a|$ -positivo.*

*Demostración.* Supongamos que  $w = 2q - 1$  es una reflexión  $a$ -positiva, entonces  $aw = |a|u_aw \in L(\mathcal{H})^+$ . Luego,  $d = u_aw \in GL(\mathcal{H})$  es  $|a|$ -positivo. Por lo tanto  $w = u_ad$ , donde  $d$  es  $|a|$ -positivo. Ya que  $|a|u_a = u_a|a| = u_a^*|a|$ , entonces  $u_a$  es  $|a|$ -unitario y  $w = u_ad$  es la descomposición polar de  $w$  en  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$ .

Recíprocamente, supongamos que  $w = u_ad$ , donde  $d$  es  $|a|$ -positivo. Luego,  $aw = |a|d$  es positivo. ■

Cuando  $a$  es positivo, la forma indefinida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  define un semi producto interno en  $\mathcal{H}$ , y la semi-norma asociada,  $\| \cdot \|_a$ , está dada por

$$\|x\|_a = \langle x, x \rangle_a^{1/2} = \|a^{1/2}x\|, \quad x \in \mathcal{H}.$$

El espacio cociente  $(\mathcal{H}/N(a), \|\cdot\|_a)$  es un espacio normado, donde  $\|\cdot\|_a$  es la norma cociente asociada y  $\|\bar{x}\|_a = \|x\|_a$ , donde  $\bar{x} = x + N(a)$ ,  $x \in \mathcal{H}$ . Ya que  $(\mathcal{H}/N(a), \|\cdot\|_a)$  no es necesariamente completo, denotemos por  $\mathcal{H}_a$  la completación de  $(\mathcal{H}/N(a), \|\cdot\|_a)$  y notemos con  $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_a$  a la aplicación cociente. En el contexto de [CG05], el par  $(\mathcal{H}_a, \Pi)$  es llamado *espacio de Hilbert inducido* por  $a$ .

En particular, si  $a$  es inyectivo, la forma indefinida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_a$  define un producto interno en  $\mathcal{H}$ . Si además  $a \in GL(\mathcal{H})^+$ , entonces  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  es un espacio de Hilbert y las normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|_a$  son equivalentes.

**Observación 4.2.3.** El operador  $c \in L(\mathcal{H})$  admite un  $|a|$ -adjunto si y sólo si  $c$  admite un  $a$ -adjunto. En efecto,  $|a|c = f|a|$  si y sólo si  $ac = u_a f |a| = u_a f u_a a$ , donde  $f \in L(\mathcal{H})$ .

Dado  $c \in L(\mathcal{H})$ , tal que  $c$  admite un  $a$ -adjunto, definimos  $\bar{c}$  el operador asociado a  $c$  en  $\mathcal{H}/N(a)$  por  $\bar{c}\bar{x} = \bar{cx}$ . Observemos que  $\bar{c}$  está bien definido: si  $x, y \in \bar{x}$ , entonces  $\bar{cx} = \bar{cy}$ , o equivalentemente, si  $x - y \in N(a)$  entonces  $c(x - y) \in N(a)$ . En efecto, ya que  $ac = d^*a$  para algún  $d \in L(\mathcal{H})$ , entonces  $c(N(a)) \subseteq N(a)$ .

**Proposición 4.2.4.** Si  $c \in L(\mathcal{H})$  admite un  $a$ -adjunto, entonces  $\bar{c}$ , el operador asociado en  $\mathcal{H}/N(a)$  está bien definido y admite una única extensión acotada a  $\mathcal{H}_{|a|}$ .

*Demostración.* Ya que  $c$  admite un  $a$ -adjunto, entonces por la Observación 4.2.3,  $c$  admite un  $|a|$ -adjunto. Como probamos arriba, en este caso,  $\bar{c}$  está bien definido en  $\mathcal{H}/N(a)$ . Del hecho que  $|a|c = u_a d^* u_a |a|$  y por Proposición 3.3.8, existe  $h \in L(\mathcal{H})$  tal que  $|a|^{1/2}c = h|a|^{1/2}$ . Como  $\|\bar{c}\bar{x}\|_{|a|} = \|cx\|_{|a|} = \||a|^{1/2}cx\| = \|h|a|^{1/2}x\| \leq \|h\|\|\bar{x}\|_{|a|}$  y  $\mathcal{H}/N(a)$  es denso en  $\mathcal{H}_{|a|}$ , entonces  $\bar{c}$  admite una única extensión a  $\mathcal{H}_{|a|}$ . ■

El resultado anterior es similar a [CG05, Teorema 3.1]. Ver también [ACG09, Proposición 1.2].

Notemos que el  $a$ -adjunto de  $c \in L(\mathcal{H})$  es único en  $\mathcal{H}_{|a|}$ , como era de esperar, ya que  $\mathcal{H}_{|a|}$  es un espacio de Hilbert. En efecto, dados  $d, h \in L(\mathcal{H})$  tales que  $ac = d^*a = h^*a$ , entonces  $ad = ah$ . Por lo tanto,  $R(d - h) \subseteq N(a)$ , con lo cual  $\bar{h} = \bar{d}$ .

## 4.3. Descomposiciones Positivas

En esta sección estudiaremos descomposiciones positivas de un operador autoadjunto como una adecuada (en algún sentido que estableceremos) diferencia de dos operadores positivos.

**Definición 4.3.1.** Dados  $a \in L(\mathcal{H})^s$ ,  $c_1, c_2 \in L(\mathcal{H})^+$ , entonces  $a = c_1 - c_2$  es una *descomposición positiva* de  $a$  si  $c_0(\overline{R(c_1)}, \overline{R(c_2)}) < 1$ .

Recordemos que todo  $a \in L(\mathcal{H})^s$  admite una única descomposición  $a = a_1 - a_2$  tal que los rangos de  $a_1$  y  $a_2$  son ortogonales, es decir, tal que  $c_0(\overline{R(a_1)}, \overline{R(a_2)}) = 0$ . En efecto, basta considerar  $a_1 = \frac{|a|+a}{2}$  y  $a_2 = \frac{|a|-a}{2}$ . Llamamos a esta descomposición *descomposición positiva ortogonal* (d.p.o.), ver Preliminares.

Por los teoremas 1.4.1 y 1.4.2, la condición  $c_0(\overline{R(c_1)}, \overline{R(c_2)}) < 1$  resulta equivalente a  $c(N(c_1), N(c_2)) < 1$  y  $\overline{R(c_1)} \cap \overline{R(c_2)} = \{0\}$ .

Enunciaremos ahora algunas propiedades de las descomposiciones positivas.

**Proposición 4.3.2.** *Sea  $a = c_1 - c_2$  una descomposición positiva de  $a \in L(\mathcal{H})^s$ . Entonces*

1.  $N(c_1) \cap N(c_2) = N(a)$ ,
2.  $N(c_1) + N(c_2) = \mathcal{H}$ .

*Demostración.* 1. Sea  $x \in N(a)$ , entonces  $c_1x = c_2x$ , con lo cual  $x \in N(c_1) \cap N(c_2)$  ya que  $\overline{R(c_1)} \cap \overline{R(c_2)} = \{0\}$ . La otra inclusión es trivial.

Para probar 2. observemos primero que, por los teoremas 1.4.1 y 1.4.2,  $N(c_1) + N(c_2)$  es cerrado. Como además,  $(N(c_1) + N(c_2))^{\perp} = \overline{R(c_1)} \cap \overline{R(c_2)} = \{0\}$ , resulta que  $N(c_1) + N(c_2) = \mathcal{H}$ . ■

**Proposición 4.3.3.** *Consideremos  $a = c_1 - c_2$  con  $c_1, c_2 \in L(\mathcal{H})^+$ . Entonces  $a = c_1 - c_2$  descomposición positiva de  $a$  si y sólo si  $\overline{R(c_1)} \dot{+} \overline{R(c_2)} = \overline{R(a)}$ . En este caso,  $R(a) = R(c_1) \dot{+} R(c_2)$ . En particular,  $R(a)$  es cerrado si y sólo si  $R(c_i)$  es cerrado, para  $i = 1, 2$ .*

*Demostración.* Por definición,  $a = c_1 - c_2$  descomposición positiva de  $a$  si y sólo si  $c_0(\overline{R(c_1)}, \overline{R(c_2)}) < 1$ . Entonces, por el Teorema 1.4.1,  $\overline{R(c_1)} \cap \overline{R(c_2)} = \{0\}$  y  $\overline{R(c_1)} \dot{+} \overline{R(c_2)}$  es cerrado. Observemos que  $(\overline{R(c_1)} \dot{+} \overline{R(c_2)})^{\perp} = N(c_1) \cap N(c_2) = N(a)$ . Por lo tanto,  $\overline{R(c_1)} \dot{+} \overline{R(c_2)} = \overline{R(a)}$ . La recíproca es consecuencia del Teorema 1.4.1.

Supongamos que  $c_0(\overline{R(c_1)}, \overline{R(c_2)}) < 1$ , entonces el subespacio  $\overline{R(c_2)} \oplus N(a)$  es cerrado y  $\mathcal{H} = \overline{R(c_1)} \dot{+} \overline{R(c_2)} \dot{+} N(a)$ . Sea  $p_1 = p_{\overline{R(c_1)} / (\overline{R(c_2)} \oplus N(a))} \in L(\mathcal{H})$ , con lo cual  $p_1a = c_1 = ap_1^*$  y entonces  $R(c_1) \subseteq R(a)$ . Análogamente  $R(c_2) \subseteq R(a)$ . Por lo tanto  $R(c_1) \dot{+} R(c_2) \subseteq R(a)$ . Pero, ya que  $a = c_1 - c_2$ , resulta  $R(a) \subseteq R(c_1) + R(c_2)$ . ■

**Observación 4.3.4.** Si  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ , denotemos por  $p_1 = p_{\overline{R(c_1)}/\overline{R(c_2)} \oplus N(a)}$  y  $p_2 = p_{\overline{R(c_2)}/\overline{R(c_1)} \oplus N(a)}$ . Ya que  $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$  entonces  $p_1 + p_2 \in \mathcal{Q}$  y  $R(p_1 + p_2) = \overline{R(c_1)} \dot{+} \overline{R(c_2)} = \overline{R(a)}$ . Además,  $N(p_1 + p_2) = N(p_1) \cap N(p_2) = N(a)$ . Luego  $p_1 + p_2 = p_a$ .

Si  $a$  es un operador positivo la única descomposición positiva de  $a$  es la trivial, como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.5.** *Sea  $a \in L(\mathcal{H})^+$  con descomposición positiva  $a = c_1 - c_2$ . Entonces  $c_1 = a$  y  $c_2 = 0$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $c_1 \geq c_2$ , pues  $a \in L(\mathcal{H})^+$ . Por el Teorema de Douglas (Teorema 1.2.1), resulta que  $R(c_2^{1/2}) \subseteq R(c_1^{1/2})$ . Entonces  $\overline{R(c_2)} \subseteq \overline{R(c_1)}$ , con lo que  $\overline{R(c_2)} = \{0\}$ , ya que  $\overline{R(c_1)} \cap \overline{R(c_2)} = \{0\}$ . ■

## 4.4. Descomposiciones positivas vs. descomposiciones canónicas

En esta sección nos ocuparemos de la relación entre las descomposiciones positivas de un operador autoadjunto  $a$  y las descomposiciones canónicas del espacio  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ , definido en (4.1).

De ahora en adelante, dada  $a = c_1 - c_2$  una descomposición positiva de  $a$ , consideramos

$$q = p_1^* \text{ con } p_1 = p_{\overline{R(c_1)}/\overline{R(c_2)} \oplus N(a)} \quad \text{y} \quad w = 2q - 1. \quad (4.3)$$

Notemos que  $q = p_{N(c_2) \cap \overline{R(a)} / N(c_1)} \in \mathcal{Q}$  y  $w$  es una reflexión.

Mostramos en el siguiente teorema la relación entre las descomposiciones positivas de un operador autoadjunto  $a$  y las reflexiones  $a$ -positivas.

**Teorema 4.4.1.** *Si  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ , consideremos  $w$  como en (4.3). Entonces  $w$  es  $a$ -positivo. Recíprocamente, dada una reflexión  $a$ -positiva  $w$ , consideremos  $q = \frac{w+1}{2} \in \mathcal{Q}$ ,  $c_1 = aq$  y  $c_2 = a(q-1)$ , entonces  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$  y sea  $q = p_1^*$  como en (4.3). Tenemos entonces que  $aq = c_1 = q^*a$ , con lo cual  $q$  es  $a$ -autoadjunto. Si  $x \in R(q)$ , entonces  $\langle x, x \rangle_a = \langle aqx, x \rangle = \langle c_1x, x \rangle \geq 0$ , pues  $c_1$  es positivo; y por lo tanto

$R(q)$  es  $a$ -nonegativo. De manera análoga,  $N(q)$  es  $a$ -nopo positivo, pues  $a(1 - q) = -c_2$ . Por el Lema 4.2.1,  $w = 2q - 1$  es  $a$ -positiva.

Recíprocamente, sea  $w$  una reflexión  $a$ -positiva y consideremos  $q = \frac{w+1}{2}$ ,  $c_1 = aq$  y  $c_2 = a(q - 1)$ , con lo cual  $a = c_1 - c_2$ . Notemos que  $c_1, c_2 \in L(\mathcal{H})^+$ : en efecto, si  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\langle c_1 x, x \rangle = \langle aqx, qx + (1 - q)x \rangle = \langle aqx, qx \rangle \geq 0$ , pues, por el Lema 4.2.1,  $R(q)$  es  $a$ -nonegativo. Análogamente para  $c_2$ . Observemos que  $\overline{R(c_1)} \subseteq R(q^*)$  y  $\overline{R(c_2)} \subseteq N(q^*)$ , ya que  $c_1 = q^*a$  y  $c_2 = (q^* - 1)a$ . Luego,  $c_0(\overline{R(c_1)}, \overline{R(c_2)}) \leq c_0(R(q^*), N(q^*)) < 1$ ; y  $a = c_1 - c_2$  resulta una descomposición positiva de  $a$ . ■

En particular, si  $a$  es inyectivo, se obtiene la siguiente correspondencia.

**Corolario 4.4.2.** *Sea  $a$  inyectivo. Dada una descomposición positiva  $a = c_1 - c_2$  de  $a$ , definimos*

$$\phi(c_1, c_2) = 2p_{N(c_2)/\!/N(c_1)} - 1.$$

*Entonces  $\phi$  es una biyección del conjunto de descomposiciones positivas de  $a$  sobre el conjunto de reflexiones  $a$ -positivas.*

*Demostración.* Sea  $a = c_1 - c_2$  una descomposición positiva de  $a$  y sea  $q = \phi(c_1, c_2) = 2p_{N(c_2)/\!/N(c_1)} - 1$ . Por el Teorema 4.4.1,  $\phi(c_1, c_2)$  es una reflexión  $a$ -positiva. Para ver que  $\phi$  es una biyección, consideremos  $w$  una reflexión  $a$ -positiva. Definimos

$$\varphi(w) = (a(\frac{w+1}{2}), a(\frac{w-1}{2})).$$

Por el Teorema 4.4.1, si  $c_1 = a(\frac{w+1}{2})$  y  $c_2 = a(\frac{w-1}{2})$ , entonces  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ . Sea  $q = \frac{w+1}{2}$ , entonces  $\phi(\varphi(w)) = \phi(aq, a(q - 1)) = w$ , pues  $N(a(q - 1)) = N(q - 1) = R(q)$  y  $N(aq) = N(q)$  ya que  $a$  es inyectivo. Además, si  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ , entonces

$$\varphi(\phi(c_1, c_2)) = (ap_{N(c_2)/\!/N(c_1)}, a(p_{N(c_2)/\!/N(c_1)} - 1)) = (c_1, c_2).$$

Luego  $\varphi = \phi^{-1}$ . ■

Bajo las hipótesis del corolario anterior, sea  $q = p_{N(c_2)/\!/N(c_1)}$ . Por el Teorema 4.4.1 y el Lema 4.2.1,  $R(q)$  es  $a$ -nonegativo y  $N(q)$  es  $a$ -nopo positivo. Más aún, si  $x \in R(q) = N(c_2)$  es tal que  $\langle x, x \rangle_a = 0$  entonces  $\|c_1^{1/2}x\| = \langle c_1x, x \rangle = \langle x, x \rangle_a = 0$ . Por lo tanto  $x \in N(c_1)$ . Ya que  $N(c_1) \cap N(c_2) = N(a) = \{0\}$ , se sigue que  $x = 0$ . Luego  $R(q)$  es  $a$ -positivo. Análogamente,  $N(q)$  es  $a$ -negativo.

En este caso,

$$\mathcal{H} = N(c_2) \oplus_a N(c_1)$$

es la descomposición canónica de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  determinada por la descomposición positiva  $a = c_1 - c_2$  de  $a$ .

Por los resultados anteriores, una descomposición positiva de  $a$  está únicamente determinada por una descomposición canónica de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ , una reflexión  $a$ -positiva; o equivalentemente una proyección  $a$ -autoadjunta con rango  $a$ -positivo y núcleo  $a$ -negativo.

**Ejemplo 4.4.3.** Sea el operador  $a \in L(\mathbb{C}^2)$ , con matriz asociada  $a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

La descomposición positiva ortogonal de  $a$  viene dada por

$$a = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es una descomposición positiva (no ortogonal) de  $a$ . La descomposición canónica del espacio  $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$  asociada a esa descomposición positiva es:

$$\mathbb{C}^2 = \{(x, -x) : x \in \mathbb{C}\} \oplus_a \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}.$$

Si  $a = a_1 - a_2$  es la d.p.o. de  $a$ , se tiene entonces que  $|a| = a_1 + a_2$  y  $a = u_a|a|$ , donde  $u_a$  es una simetría. De manera similar, cada descomposición positiva de  $a$  induce una descomposición de  $a$  como producto de una reflexión y un operador positivo, como muestra el siguiente corolario:

**Corolario 4.4.4.** *Supongamos que  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ . Si  $\alpha = c_1 + c_2$  y  $w = 2q - 1$  es como en (4.3), entonces  $a = \alpha w$  donde  $\alpha \in L(\mathcal{H})^+$  y  $w^2 = 1$ . Recíprocamente, si  $a = \alpha w$ , con  $\alpha \in L(\mathcal{H})^+$  y  $w^2 = 1$ , consideremos  $c_1 = a(\frac{w+1}{2})$  y  $c_2 = c_1 - a$ , entonces  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ .*

*Demostración.* Si  $w = 2q - 1$  y  $\alpha = c_1 + c_2 \in L(\mathcal{H})^+$ , entonces  $w^2 = 1$  y  $w^* \alpha = (2p_1 - 1)(c_1 + c_2) = c_1 - c_2 = a = \alpha w$ . Recíprocamente, consideremos  $a = \alpha w$  donde  $\alpha \in L(\mathcal{H})^+$  y  $w^2 = 1$ . Sea  $q = \frac{w+1}{2}$ . Por el Lema 4.2.1,  $q$  es  $a$ -autoadjunto,  $R(q)$  es  $a$ -nonegativo y  $N(q)$  es  $a$ -noperativo. Si  $c_1 = aq$  y  $c_2 = a(q - 1)$ , por el Teorema 4.4.1, se sigue que  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ . ■

Por el corolario anterior, si  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ , entonces  $a = \alpha w$  donde  $\alpha = c_1 + c_2 \in L(\mathcal{H})^+$ ,  $w^2 = 1$  y  $w$  es  $a$ -positivo. En este caso,  $\alpha = (w^*|a|^2w)^{1/2}$ . En efecto,  $\alpha = aw = w^*a$  con lo cual  $\alpha^2 = w^*a^2w = w^*|a|^2w$ .

**Observación 4.4.5.** Si  $a \in GL(\mathcal{H})^s$  y  $w$  es una reflexión tal que  $a = \alpha w$ , con  $\alpha \in GL(\mathcal{H})^+$ , entonces  $a = \alpha w$  es la descomposición polar de  $a$  en el espacio  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)$ . En efecto:  $w$  es una simetría respecto de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ , pues  $w^2 = 1$  y

$$\langle wx, y \rangle_\alpha = \langle ax, y \rangle = \langle x, ay \rangle = \langle \alpha x, wy \rangle = \langle x, wy \rangle_\alpha, \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Es fácil ver que  $\alpha$  es  $\alpha$ -positivo.

En [GMMN09], Gesztesy et al obtienen una fórmula generalizada de la descomposición polar clásica de operadores en espacios de Hilbert. Aplicando esos resultados podemos enunciar la siguiente proposición:

**Proposición 4.4.6.** Consideremos  $a \in L(\mathcal{H})^s$  y  $w$  una reflexión  $a$ -positiva que sea autoadjunta en  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{u_a})$ . Entonces, existen operadores positivos  $\alpha$  y  $\gamma$  tales que

$$a = \alpha w = w\gamma.$$

Además, si  $\phi, \varphi$  son funciones de Borel en  $\mathbb{R}$  tales que  $\phi(\lambda)\varphi(\lambda) = \lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$a = \phi(\alpha)w\varphi(\gamma). \quad (4.4)$$

*Demostración.* Por el Teorema 4.4.1 y el Corolario 4.4.4, se sigue que existe  $\alpha \in L(\mathcal{H})^+$  tal que  $a = \alpha w$ . Luego,  $a = \alpha w = w^2\alpha w = w\gamma$ , con  $\gamma = w\alpha w$ . Para ver que  $\gamma$  es positivo observemos que  $\gamma = w\alpha w = u_a w^* u_a \alpha w = u_a w^* w^* \alpha u_a = u_a \alpha u_a$  pues  $w = u_a w^* u_a$  y  $u_a \alpha w = |a|$ .

La ecuación (4.4) sigue de [GMMN09, Theorem 2.1]. ■

En particular, la proposición anterior es válida si  $a$  es una simetría.

Consideremos la siguiente aplicación

$$\pi : L(\mathcal{H})^s \rightarrow \mathcal{P}, \quad \pi(b) = u_b,$$

Observemos que  $\pi$  está bien definida.

**Lema 4.4.7.** Sea  $a \in L(\mathcal{H})^s$  con descomposición polar  $a = |a|u_a$ . Si  $w \in L(\mathcal{H})$ , entonces  $|a|w \in \pi^{-1}(\{u_a\})$  si y sólo si  $u_a w$  es  $|a|$ -positivo.

*Demostración.* Si  $|a|w \in \pi^{-1}(\{u_a\})$  entonces  $|a|w = u_a c$ , donde  $c \in L(\mathcal{H})^+$ , o  $|a|u_a w = u_a |a|w = c$ ; es decir  $u_a w$  es  $|a|$ -positivo. Recíprocamente, si  $u_a w$  es  $|a|$ -positivo, entonces  $|a|u_a w = c$  con  $c \in L(\mathcal{H})^+$ . Por lo tanto  $|a|w = u_a c$  y  $w^*|a| = |a|w$ , ya que  $(|a|u_a w)^* = |a|u_a w$ . Luego,  $|a|w \in L(\mathcal{H})^s$  y  $(|a|w)^*(|a|w) = (u_a c)^*u_a c = c^2$ , con lo cual  $c = ||a|w|$  y  $u_a$  es la parte unitaria de la descomposición polar de  $|a|w$ . Entonces  $|a|w \pi^{-1}(\{u_a\})$ . ■

Consideremos  $a$  inyectivo y supongamos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus_a \mathcal{S}^{\perp_a} = \mathcal{S}' \oplus_a \mathcal{S}'^{\perp_a},$$

son dos descomposiciones canónicas de  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_a)$ . Denotemos con  $\overline{\mathcal{S}}^{|a|}$  a la completación de  $\mathcal{S}$  respecto de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|}$ . Como consecuencia de la Proposición 4.2.2, el siguiente teorema muestra que la completación de los subespacios  $a$ -positivos de las dos descomposiciones canónicas tienen la misma dimensión como espacios de Hilbert; i.e.,  $\dim_{|a|} \overline{\mathcal{S}}^{|a|} = \dim_{|a|} \overline{\mathcal{S}'}^{|a|}$ . Más aún,  $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{S}'$ , cuando  $\mathcal{H}$  es separable. Lo mismo vale para los subespacios  $a$ -negativos. Comparar estos resultados con [Bog74, Corolario 7.4, Capítulo IV].

**Teorema 4.4.8.** *Consideremos  $a$  inyectivo. Sean  $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus_a \mathcal{S}^{\perp_a} = \mathcal{S}' \oplus_a \mathcal{S}'^{\perp_a}$  dos descomposiciones canónicas de  $\mathcal{H}$ , entonces  $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{S}'$  y  $\dim \mathcal{S}^{\perp_a} = \dim \mathcal{S}'^{\perp_a}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{H} = \mathcal{S}' \oplus_a \mathcal{S}'^{\perp_a}$  la descomposición de  $\mathcal{H}$  dad por la d.p.o.  $a = a_1 - a_2$ . En este caso, la proyección asociada es  $p_1 = p_{a_1}$ . Consideremos la proyección oblicua  $q = p_{\mathcal{S}' / \mathcal{S}'^{\perp_a}}$  y la reflexión  $w = 2q - 1$ . Por la Proposición 4.2.2,  $w = u_a d$ , donde  $d \in GL(\mathcal{H})$  es  $|a|$ -positivo. Como  $w$  es una reflexión,  $u_a d = d^{-1} u_a$ , con lo cual  $u_a d u_a = d^{-1}$ . Observemos que  $u_a, d, d^{-1}$  son  $|a|$ -autoadjuntos. Por la Proposición 4.2.4 y la Observación 4.2.3, resulta que  $u_a, d, d^{-1}$  admiten extensiones acotadas a  $\mathcal{H}_{|a|}$ , que denotaremos  $\overline{u_a}, \overline{d}, \overline{d^{-1}}$ . Observemos que  $\overline{d^{-1}} = (\overline{d})^{-1}$ . Como  $\overline{d^{-1}}$  es positivo en  $\mathcal{H}_{|a|}$ , entonces  $\overline{d^{-1}}$  admite una única raíz (positivo) en  $\mathcal{H}_{|a|}$ ,  $(\overline{d^{-1}})^{1/2} \in GL(\mathcal{H}_{|a|})^+$ . Notemos que  $\overline{u_a}(\overline{d})^{1/2}\overline{u_a}$  es positivo en  $\mathcal{H}_{|a|}$ , pues  $\overline{u_a}$  es autoadjunto en  $\mathcal{H}_{|a|}$  y  $(\overline{d})^{1/2}$  es positivo en  $\mathcal{H}_{|a|}$ . Además,  $(\overline{u_a}(\overline{d})^{1/2}\overline{u_a})^2 = \overline{u_a d u_a}$ , con lo cual  $(\overline{u_a d u_a})^{1/2} = \overline{u_a}(\overline{d})^{1/2}\overline{u_a}$ . Por lo tanto,  $(\overline{d^{-1}})^{1/2} = (\overline{u_a d u_a})^{1/2} = \overline{u_a}(\overline{d})^{1/2}\overline{u_a}$  y  $(\overline{d^{-1}})^{1/2}\overline{u_a} = \overline{u_a}(\overline{d})^{1/2}$ . Luego,

$$2\overline{q} - 1 = \overline{w} = \overline{u_a} \overline{d} = (\overline{d^{-1}})^{1/2} \overline{u_a} (\overline{d})^{1/2} = (\overline{d^{-1}})^{1/2} (2\overline{p_1} - 1) (\overline{d})^{1/2} = 2(\overline{d^{-1}})^{1/2} \overline{p_1} (\overline{d})^{1/2} - 1,$$

ya que  $(\overline{d^{-1}})^{1/2} = [(\overline{d})^{-1}]^{1/2} = (\overline{d})^{-1/2}$ . Resulta entonces que,  $\overline{q} = (\overline{d^{-1}})^{1/2} \overline{p_1} (\overline{d})^{1/2}$ . Por lo tanto,  $R(\overline{p_1}) = (\overline{d^{-1}})^{1/2} R(\overline{q})$  y  $N(\overline{p_1}) = (\overline{d^{-1}})^{1/2} N(\overline{q})$ , con lo que  $\dim_{|a|} R(\overline{p_1}) = \dim_{|a|} R(\overline{q})$  y  $\dim_{|a|} N(\overline{p_1}) = \dim_{|a|} N(\overline{q})$ , donde  $\dim_{|a|} \mathcal{W}$  es la dimensión de un subespacio  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{H}_{|a|}$ .

Luego  $\dim_{|a|} \overline{R(p_1)}^{|a|} = \dim_{|a|} \overline{R(q)}^{|a|}$ , ya que  $R(\bar{q}) = \overline{R(q)}^{|a|}$ . Como  $\mathcal{H}$  es separable, es fácil ver que  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$  es separable. Entonces,  $\mathcal{H}_{|a|}$  es separable, pues  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$  es denso en  $\mathcal{H}_{|a|}$ . En este caso, si  $\mathcal{S}$  es un subespacio de  $\mathcal{H}$ , entonces  $\dim_{|a|} \overline{\mathcal{S}}^{|a|} = \dim_{|a|} \mathcal{S} = \dim \mathcal{S}$ , con  $\dim_{|a|} \mathcal{S}$  el cardinal de cualquier subconjunto ortonormal maximal de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{H}_{|a|}$  y  $\dim \mathcal{S}$  es la dimensión de  $\mathcal{S}$  como subespacio de  $\mathcal{H}$ . Luego,  $\dim R(p_1) = \dim R(q)$ . Análogamente,  $\dim N(p_1) = \dim N(q^*)$ . ■

En la demostración de la proposición anterior, concluimos que  $\dim_{|a|} \overline{\mathcal{S}}^{|a|} = \dim \mathcal{S}$  para cualquier subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ . Esto vale pues el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es separable, con lo cual  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|a|})$  y (por lo tanto)  $\mathcal{H}_{|a|}$  son separables. Hay ejemplos de espacios con producto interno  $\mathcal{E}$  cuya completación  $\overline{\mathcal{E}}$  es tal que  $\dim \mathcal{E} < \dim \overline{\mathcal{E}}$ , donde  $\dim \mathcal{E}$  es el cardinal de cualquier conjunto ortonormal maximal, ver [Gud74], [Gud75], [GH75].

**Corolario 4.4.9.** *Consideremos  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  tal que  $a = a_1 - a_2$  es la d.p.o. de  $a$  y  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ . Entonces  $\dim R(a_i) = \dim R(c_i)$  y  $\dim N(a_i) = \dim N(c_i)$  para  $i = 1, 2$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $a$  es inversible y consideremos  $p_1$  y  $q$  como en la demostración del teorema anterior; i.e.  $p_1 = p_{a_1}$  y  $q = p_{N(c_2)//N(c_1)}$ . Entonces, por la demostración del teorema anterior, existe  $g \in GL(\mathcal{H})^+$  tal que  $q = g^{-1}p_1g$  con lo cual  $q^* = g^*p_1g^{*-1}$ . Como  $q^* = p_{R(c_1)//R(c_2)}$ , resulta entonces que  $\dim R(a_i) = \dim R(c_i)$  y  $\dim N(a_i) = \dim N(c_i)$  para  $i = 1, 2$ .

Más en general, si  $a$  tiene rango cerrado y  $a = c_1 - c_2$  es una descomposición positiva de  $a$ , notemos que  $c_i p_a = c_i$ , pues  $N(a) \subseteq N(c_i)$ , para  $i = 1, 2$ . Entonces  $R(c_i|_{R(a)}) = R(c_i)$  y  $a|_{R(a)} = c_1|_{R(a)} - c_2|_{R(a)}$  es una descomposición positiva de  $a|_{R(a)}$ . Como  $a|_{R(a)} \in GL(R(a))^s$ , se sigue que  $\dim R(c_i|_{R(a)}) = \dim R(a_i|_{R(a)})$ , donde  $a = a_1 - a_2$  es la d.p.o. de  $a$ . Por lo tanto  $\dim R(c_i) = \dim R(a_i)$ , para  $i = 1, 2$ . Además,  $\dim N(c_i|_{R(a)}) = N(a_i|_{R(a)})$ . Pero,  $N(c_i) = N(c_i) \cap R(a) \oplus N(a)$  y, por lo tanto  $\dim N(a_i) = \dim N(c_i)$  para  $i = 1, 2$ . ■

## 4.5. Congruencia de operadores autoadjuntos

Como aplicación de las descomposiciones positivas, veremos que la órbita de congruencia de un operador autoadjunto se puede describir en función de sus descomposiciones positivas.

Recordemos la siguiente caracterización de la órbita de un operador positivo.

**Proposición 4.5.1.** Sean  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$ ; entonces  $b \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si  $R(a)$  y  $R(b)$  son unitariamente equivalentes.

**Observación 4.5.2.** Si  $a, b \in L(\mathcal{H})^+$  también vale que  $b$  está en la órbita de  $a$  si y sólo si los rangos de sus raíces cuadradas son unitariamente equivalentes, ver [FW71, Teorema 3.5].

Daremos ahora una generalización de la Proposición 4.5.1, para operadores autoadjuntos.

**Proposición 4.5.3.** Sea  $a = a_1 - a_2$  la d.p.o. de  $a$ . Entonces  $b \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si hay una descomposición positiva  $b = b_1 - b_2$  de  $b$  tal que  $R(b_i)$  es (unitariamente) equivalente a  $R(a_i)$  para  $i = 1, 2$  y  $\dim N(b) = \dim N(a)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $b \in \mathcal{O}_a$ , entonces  $b = gag^*$  para algún  $g \in GL(\mathcal{H})$ , con lo cual  $\dim N(b) = \dim N(a)$ . Consideremos  $b_i = ga_i g^* \in L(\mathcal{H})^+$ , para  $i = 1, 2$ , entonces es fácil ver que  $b = b_1 - b_2$  es una descomposición positiva de  $b$ . Además,  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ , para  $i = 1, 2$ , y por la Proposición 4.5.1,  $R(b_i)$  es unitariamente equivalente a  $R(a_i)$  con  $i = 1, 2$ .

Recíprocamente, ya que  $\dim N(b) = \dim N(a)$ , existe una isometría parcial  $v$  tal que  $v(N(a)) = N(b)$ . Por la Proposición 4.5.1 y la Observación 4.5.2, existen  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tales que  $R(b_i^{1/2}) = u_i R(a_i^{1/2})$ , con  $i = 1, 2$ . Por lo tanto,  $b_i^{1/2}$  y  $u_i a_i^{1/2} u_i^*$  tienen el mismo rango y núcleo, con lo cual, por Corolario 1.2.2, existen  $g_i \in GL(\mathcal{H})$  tales que  $b_i^{1/2} = g_i u_i a_i^{1/2} u_i^*$  o  $b_i^{1/2} = g_i u_i a_i^{1/2}$  para  $i = 1, 2$ .

Sean  $p_1 = p_{\overline{R(b_1)} / \overline{R(b_2)} \oplus N(b)}$  y  $p_2 = p_{\overline{R(b_2)} / \overline{R(b_1)} \oplus N(b)}$ . Si consideramos

$$w = p_1 g_1 u_1 p_{a_1} + p_2 g_2 u_2 p_{a_2} + v(1 - p_a),$$

entonces  $w \in GL(\mathcal{H})$ . En efecto, por la Observación 4.3.4, resulta que  $w^{-1} = p_{a_1} u_1^* g_1^{-1} p_1 + p_{a_2} u_2^* g_2^{-1} p_2 + (1 - p_a)v^*(1 - p_b)$ . Por otro lado,

$$waw^* = w(a_1 - a_2)w^* = b_1^{1/2} u_1 u_1^* b_1^{1/2} - b_2^{1/2} u_2 u_2^* b_2^{1/2} = b.$$

Luego  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

El resultado anterior es válido también si  $a = a_1 - a_2$  es cualquier descomposición positiva de  $a$ . En efecto, en la demostración anterior es suficiente considerar las proyecciones oblicuas  $p_{\overline{R(a_1)} / \overline{R(a_2)} \oplus N(a)}$  y  $p_{\overline{R(a_2)} / \overline{R(a_1)} \oplus N(a)}$  en lugar de  $p_{a_1}$  y  $p_{a_2}$ .

En la Proposición 3.4.7, obtuvimos una caracterización de la órbita de un operador autoadjunto de rango cerrado en función de su descomposición positiva ortogonal. Veremos

ahora, como consecuencia de la proposición anterior, una generalización de esa caracterización, en este caso para un operador autoadjunto cualquiera.

**Corolario 4.5.4.** *Sea  $a = a_1 - a_2$  cualquier descomposición positiva de  $a \in L(\mathcal{H})^s$  y sean  $b_1, b_2 \in L(\mathcal{H})^+$ , entonces  $b_1 - b_2 \in \mathcal{O}_a$  si y sólo si*

1.  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,
2.  $\overline{R(b_1)} \dot{+} \overline{R(b_2)}$  es unitariamente equivalente a  $\overline{R(a)}$ .

*Demostración.* Observemos que  $\overline{R(b_1)} + \overline{R(b_2)}$  es el rango de un operador, ver [FW71, Teorema 2.2]. Si  $b \in \mathcal{O}_a$ , entonces por la Proposición 4.5.3, hay una descomposición positiva  $b = b_1 - b_2$  de  $b$  tal que  $R(b_i)$  es unitariamente equivalente a  $R(a_i)$  para  $i = 1, 2$  y  $N(b)$  es unitariamente equivalente a  $N(a)$ ; o equivalentemente,  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ ,  $i = 1, 2$  y  $\overline{R(b)}$  es unitariamente equivalente a  $\overline{R(a)}$ . Pero, por el Proposición 4.3.3,  $\overline{R(b)} = \overline{R(b_1)} \dot{+} \overline{R(b_2)}$ .

Recíprocamente, sea  $b = b_1 - b_2$  con  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ ,  $i = 1, 2$  y  $\overline{R(b_1)} \dot{+} \overline{R(b_2)} = u\overline{R(a)}$ , para  $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ . Entonces  $\overline{R(b_1)} + \overline{R(b_2)}$  es cerrado y  $\overline{R(b_1)} \cap \overline{R(b_2)} = \{0\}$ , con lo cual por el Teorema 1.4.1,  $c_0(\overline{R(b_1)}, \overline{R(b_2)}) < 1$ . Notemos que  $b_i \in L(\mathcal{H})^+$  porque  $b_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ , para  $i = 1, 2$ . Luego  $b = b_1 - b_2$  es una descomposición positiva de  $b$ , y entonces  $\overline{R(b)} = \overline{R(b_1)} \dot{+} \overline{R(b_2)} = u\overline{R(a)}$ . Por lo tanto  $N(b)$  es unitariamente equivalente a  $N(a)$ . Luego, por la Proposición 4.5.3,  $b \in \mathcal{O}_a$ . ■

Si  $g \in I_a$ , entonces  $a = ga_1g^* - ga_2g^*$ , donde  $a = a_1 - a_2$  es la d.p.o de  $a$ . No es difícil ver que  $a = ga_1g^* - ga_2g^*$  es una descomposición positiva de  $a$ . Por lo tanto, es natural preguntarse si todas las descomposiciones positivas de  $a$  pueden escribirse de la forma  $a = ga_1g^* - ga_2g^*$  para algún  $g \in I_a$ . La siguiente proposición muestra que esto vale si  $a$  tiene rango cerrado.

**Proposición 4.5.5.** *Consideremos  $a \in CR(\mathcal{H})^s$  con d.p.o.  $a = a_1 - a_2$ . Entonces*

$$\{ga_1g^* - ga_2g^* : g \in I_a\}$$

*es el conjunto de todas las descomposiciones positivas de  $a$ .*

*Demostración.* Dado  $g \in I_a$ , entonces  $a = gag^*$ . Se sigue fácilmente que  $a = ga_1g^* - ga_2g^*$  es una descomposición positiva de  $a$ .

Recíprocamente, sea  $a = c_1 - c_2$  una descomposición positiva de  $a$ . Por el Corolario 4.4.9, vale que  $\dim R(a_i) = \dim R(c_i)$  y  $\dim N(a_i) = \dim N(c_i)$  para  $i = 1, 2$ . Entonces, por la Proposición 3.4.5,  $c_i \in \mathcal{O}_{a_i}$ , para  $i = 1, 2$ . Por lo tanto, existen  $g_1, g_2 \in GL(\mathcal{H})$

tales que  $c_1 = g_1 a_1 g_1^*$  y  $c_2 = g_2 a_2 g_2^*$ . Consideremos  $g = g_1 p_{a_1} + g_2 p_{a_2} + p_{N(a)}$ . Por la Observación 4.3.4, no es difícil ver que  $g \in GL(\mathcal{H})$  y  $g^{-1} = g_1^{-1} p_1 + g_2^{-1} p_2 + p_{N(a)}$ , donde  $p_1 = p_{R(c_1) // R(c_2) \oplus N(a)}$  y  $p_2 = p_{R(c_2) // R(c_1) \oplus N(a)}$ .

Además,  $g a_1 g^* = g_1 a_1 g_1^* p_1^* = c_1 p_1^* = c_1$ . Análogamente,  $g a_2 g^* = c_2$ . Finalmente,  $g a g^* = g a_1 g^* - g a_2 g^* = c_1 - c_2 = a$ , con lo cual  $g \in I_a$ . ■

Con un argumento similar al de la demostración anterior, se puede probar que

$$\{g a_1 g^* - g a_2 g^* : g \in I_a\}$$

es el conjunto de todas las descomposiciones positivas de  $a$ , siendo  $a = a_1 - a_2$  cualquier descomposición positiva de  $a$ .



# Bibliografía

- [ACS99] ANDRUCHOW, E., CORACH, G. y STOJANOFF, D. *Geometry of oblique projections.* Stud. Math., 137(1):(1999), 61–79. [1](#), [9](#)
- [AS89] ANDRUCHOW, E. y STOJANOFF, D. *Differentiable structure of similarity orbits.* J. Oper. Theory, 21(2):(1989), 349–366. [3](#), [11](#)
- [AV07] ANDRUCHOW, E. y VARELA, A. *Non positively curved metric in the space of positive definite infinite matrices.* Revista de la Unión Matemática Argentina, 48(1):(2007), 7–15. [1](#), [9](#)
- [ACG09] ARIAS, M.L., CORACH, G. y GONZALEZ, M.C. *Lifting properties in operator ranges.* Acta Sci. Math. (Szeged), 75:(2009), 635–653. [83](#)
- [Atk75] ATKIN, C. *The Hopf-Rinow theorem is false in infinite dimensions.* Bull. Lond. Math. Soc., 7:(1975), 261–266. [51](#)
- [ASS94] AVRON, J., SEILER, R. y SIMON, B. *The index of a pair of projections.* J. Funct. Anal., 120(1):(1994), 220–237. [58](#)
- [AI89] AZIZOV, T.Y. y IOKHVIDOV, I.S. *Linear Operators in spaces with an indefinite metric.* John Wiley and Sons, 1989. [4](#), [12](#), [80](#)
- [BM05] BADEA, C. y MBEKHTA, M. *Operators similar to partial isometries.* Acta Sci. Math., 71(3-4):(2005), 663–680. [3](#), [11](#)
- [Bea65] BEAR, H.S. *A geometric characterization of Gleason parts.* Proc. Amer. Math. Soc., 16(3):(1965), 407–412. [2](#), [10](#)
- [BIG03] BEN-ISRAEL, A. y GREVILLE, T.N. *Generalized inverses. Theory and applications.* 2nd ed. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. 15. New York, NY: Springer. XV, 2003. [23](#)

- [Bir57] BIRKHOFF, G. *Extensions of Jentzsch's theorem.* Trans. Am. Math. Soc., 85:(1957), 219–227. [31](#)
- [Bog74] BOGNAR, J. *Indefinite inner product spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 78. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. IX, 1974. [4](#), [12](#), [80](#), [89](#)
- [BDF73] BROWN, L.G., DOUGLAS, R.G. y FILLMORE, P.A. *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of  $C^*$ - algebras.* Proc. Conf. Operator Theory, Dalhousie Univ., Halifax 1973, Lect. Notes Math. 345, 58-128 (1973)., 1973. [3](#), [11](#)
- [Bus73] BUSHELL, P.J. *Hilbert's metric and positive contraction mappings in a Banach space.* Arch. Ration. Mech. Anal., 52:(1973), 330–338. [2](#), [10](#), [31](#)
- [Bus74] BUSHELL, P.J. *On solutions of the matrix equation  $T'AT = A^2$ .* Linear Algebra Appl., 8:(1974), 465–469. [2](#), [10](#), [31](#)
- [CP76] CAREY, R.W. y PINCUS, J.D. *Unitary equivalence modulo the trace class for self-adjoint operators.* Am. J. Math., 98:(1976), 481–514. [3](#), [11](#)
- [Cho73] CHOI, M.D. *Adjunction and inversion of invertible Hilbert-space operators.* Indiana Univ. Math. J., 23:(1973), 413–419. [3](#), [11](#)
- [CG05] COJUHARI, P. y GHEONDEA, A. *On lifting of operators to Hilbert spaces induced by positive selfadjoint operators.* J. Math. Anal. Appl., 304(2):(2005), 584–598. [83](#)
- [Cor94] CORACH, G. *Operator inequalities, geodesics and interpolation.* Functional analysis and operator theory. Banach Center Publ., 30:(1994), 101–115. [1](#), [9](#)
- [Cor98] CORACH, G. *Sobre la geometría del conjunto de operadores positivos en espacios de Hilbert.* Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fis. y Nat., 50:(1998), 109–118. [1](#), [9](#)
- [CM99] CORACH, G. y MAESTRIPIERI, A. *Differential and metrical structure of positive operators.* Positivity, 3(4):(1999), 297–315. [1](#), [2](#), [5](#), [9](#), [10](#), [13](#), [27](#), [31](#), [41](#), [42](#), [49](#), [53](#), [75](#)

- [CM00] CORACH, G. y MAESTRIPIERI, A. *Differential geometry on Thompson's components of positive operators.* Rep. Math. Phys., 45(1):(2000), 23–37. [1](#), [2](#), [5](#), [9](#), [10](#), [13](#), [23](#), [27](#), [31](#), [32](#), [33](#)
- [CMM09] CORACH, G., MAESTRIPIERI, A. y MBEKHTA, M. *Metric and homogeneous structures of sets of closed range operators.* J. Oper. Theory, 61(1):(2009), 171–190. [7](#), [15](#), [55](#), [69](#)
- [CMS04] CORACH, G., MAESTRIPIERI, A. y STOJANOFF, D. *Orbits of positive operators from a differentiable viewpoint.* Positivity, 8(1):(2004), 31–48. [3](#), [11](#), [65](#), [69](#)
- [CPR90] CORACH, G., PORTA, H. y RECHT, L. *Differential geometry of systems of projections in Banach algebras.* Pac. J. Math., 143(2):(1990), 209–228. [1](#), [9](#)
- [CPR93a] CORACH, G., PORTA, H. y RECHT, L. *Geodesics and operator means in the space of positive operators.* Int. J. Math., 4(2):(1993), 193–202. [1](#), [9](#)
- [CPR93b] CORACH, G., PORTA, H. y RECHT, L. *The geometry of spaces of projections in  $C^*$ -algebras.* Adv. Math., 101(1):(1993), 59–77. [1](#), [9](#)
- [CPR93c] CORACH, G., PORTA, H. y RECHT, L. *The geometry of the space of selfadjoint invertible elements in a  $C^*$ -algebra.* Integral Equations Operator Theory, 16:(1993), 333–359. [1](#), [9](#), [28](#), [30](#), [37](#), [51](#), [75](#)
- [CPR94] CORACH, G., PORTA, H. y RECHT, L. *Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators.* Ill. J. Math., 38(1):(1994), 87–94. [1](#), [9](#)
- [Dan87] DANEŠ, J. *The Hilbert projective metric and an equation in a  $C^*$ -algebra.* Czechoslovak Math. J., 37(112)(4):(1987), 522–532. [2](#), [10](#)
- [DG90] DĄBROWSKI, L. y GROSSE, H. *On quantum holonomy for mixed states.* Lett. Math. Phys., 19(3):(1990), 205–210. [1](#), [9](#)
- [DJ89] DĄBROWSKI, L. y JADCZYK, A. *Quantum statistical holonomy.* J. Phys. A, Math. Gen., 22(15):(1989), 3167–3170. [1](#), [9](#)
- [Deu95] DEUTSCH, F. *The angle between subspaces of a Hilbert space.* En *Approximation theory, wavelets and applications (Maratea, 1994)*, tomo 454 de *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, páginas 107–130. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995. [24](#)

- [Dix49] DIXMIER, J. *Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications.* Bull. Soc. Math. Fr., 77:(1949), 11–101. [24](#)
- [Dou66] DOUGLAS, R. *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space.* Proc. Am. Math. Soc., 17:(1966), 413–415. [21](#)
- [FW71] FILLMORE, P.A. y WILLIAMS, J.P. *On operator ranges.* Adv. Math., 7:(1971), 254–281. [3](#), [11](#), [21](#), [57](#), [91](#), [92](#)
- [FM08] FONGI, G. y MAESTRIPIERI, A. *Differential structure of the Thompson components of selfadjoint operators.* Proc. Am. Math. Soc., 136(2):(2008), 613–622. [5](#), [12](#)
- [FM09a] FONGI, G. y MAESTRIPIERI, A. *Congruence of selfadjoint operators.* Positivity, 13(4):(2009), 759–770. [5](#), [12](#)
- [FM09b] FONGI, G. y MAESTRIPIERI, A. *Positive decompositions of selfadjoint operators.* Integral Equations Operator Theory, (2009), en prensa. [5](#), [12](#)
- [Fri37] FRIEDRICHS, K. *On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. I.* Trans. Am. Math. Soc., 41:(1937), 321–364. [24](#)
- [Ger84] GERISCH, W. *Idempotents, their Hermitian components, and subspaces in position p of a Hilbert space.* Math. Nachr., 115:(1984), 283–303. [70](#)
- [GMMN09] GESZTESY, F., MALAMUD, M., MITREA, M. y NABOKO, S. *Generalized polar decompositions for closed operators in Hilbert spaces and some applications.* Integral Equations Operator Theory, 64(1):(2009), 83–113. [88](#)
- [Gro77] GROETSCH, C.W. *Generalized inverses of linear operators. Representation and approximation.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 37. New York - Basel: Marcel Dekker, 1977. [23](#)
- [Gud74] GUDDER, S. *Inner product spaces.* Am. Math. Mon., 81:(1974), 29–36. [79](#), [90](#)
- [Gud75] GUDDER, S. *Correction to: “Inner product spaces”.* Am. Math. Mon., 82:(1975), 251–252. [79](#), [90](#)
- [GH75] GUDDER, S. y HOLLAND, S. *Second correction to: “Inner product spaces”.* [79](#), [90](#)

- [Had77] HADWIN, D.W. *An operator-valued spectrum.* Indiana Univ. Math. J., 26:(1977), 329–340. [3](#), [11](#)
- [HP82] HANSEN, F. y PEDERSEN, G.K. *Jensen's inequality for operators and Loewner's theorem.* Math. Ann., 258:(1982), 229–241. [63](#)
- [HSDS05] HASSI, S., SEBESTYÉN, Z. y DE SNOO, H.S.V. *On the nonnegativity of operator products.* Acta Math. Hung., 109(1-2):(2005), 1–14. [61](#)
- [HN94] HASSI, S. y NORDSTROM, K. *On projections in a space with an indefinite metric.* [82](#)
- [Her90] HERRERO, D.A. *Approximation of Hilbert space operators, vol. 1.* 2nd ed. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 224. Harlow: Longman Scientific and Technical; New York, 1990. [3](#), [11](#)
- [Hil03] HILBERT, D. *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie.* Math. Ann., 57:(1903), 137–150. [2](#), [10](#), [31](#)
- [Hol92] HOLMES, J.P. *The structure of the set of idempotents in a Banach algebra.* Ill. J. Math., 36(1):(1992), 102–115. [1](#), [9](#)
- [HHT06] HUANG, M.J., HUANG, C.Y. y TSAI, T.M. *Applications of Hilbert's projective metric to a class of positive nonlinear operators.* Linear Algebra Appl., 413(1):(2006), 202–211. [31](#)
- [Kat95] KATO, T. *Perturbation theory for linear operators. Reprint of the corr. print. of the 2nd ed. 1980.* Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1995. [24](#)
- [Kat75] KATO, Y. *An elementary proof of Sz. - Nagy's theorem.* Math. Jap., 20:(1975), 257–258. [57](#), [69](#)
- [KN63] KOBAYASHI, S. y NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry. Vol I.* Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963. [49](#)
- [Lan95] LANG, S. *Differential and Riemannian manifolds.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1995. [25](#)
- [Lar80] LAROTONDA, A.R. *Notas sobre variedades diferenciables.* INMABB, CONICET, UNS, Bahía Blanca, 1980. [25](#)

- [MMP06] MAESTRIPIERI, A. y MARTÍNEZ PERÍA, F. *Decomposition of selfadjoint projections in Krein spaces.* Acta Sci. Math., 72(3-4):(2006), 611–638. [82](#)
- [MLR92] MATA-LORENZO, E.L. y RECHT, L. *Infinite dimensional homogeneous reductive spaces.* Acta Cient. Venez., 43(2):(1992), 76–90. [25](#), [44](#)
- [Mon98] MONTRUCCHIO, L. *Thompson metric, contraction property and differentiability of policy functions.* Journal of Economic Behavior and Organization, 33:(1998), 449–466. [31](#)
- [Mos55] MOSTOW, G.D. *Some new decomposition theorems for semi-simple groups.* Mem. Am. Math. Soc., 14:(1955), 31–54. [1](#), [9](#)
- [Nas87] NASHED, M.Z. *Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces.* Numer. Funct. Anal. Optimization, 9:(1987), 261–325. [23](#)
- [Nus88] NUSSBAUM, R.D. *Hilbert's projective metric and iterated nonlinear maps.* Mem. Am. Math. Soc., 391:(1988), 137 p. [2](#), [10](#), [31](#), [57](#)
- [Nus94] NUSSBAUM, R.D. *Finsler structures for the part metric and Hilbert's projective metric and applications to ordinary differential equations.* Differ. Integral Equ., 7(5-6):(1994), 1649–1707. [2](#), [10](#), [31](#), [53](#), [57](#)
- [Nus07] NUSSBAUM, R.D. *Fixed point theorems and Denjoy-Wolff theorems for Hilbert's projective metric in infinite dimensions.* Topol. Methods Nonlinear Anal., 29(2):(2007), 199–249. [31](#)
- [Pat83] PATEL, S.M. *On congruency of operators.* Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 33(47):(1983), 169–171. [3](#), [11](#)
- [Ped72] PEDERSEN, G.K. *Some operator monotone functions.* Proc. Am. Math. Soc., 36:(1972), 309–310. [59](#)
- [PR87a] PORTA, H. y RECHT, L. *Minimality of geodesics in Grassmann manifolds.* Proc. Am. Math. Soc., 100:(1987), 464–466. [1](#), [9](#)
- [PR87b] PORTA, H. y RECHT, L. *Spaces of projections in a Banach algebra.* Abstr. Pap. Am. Math. Soc., 38(4):(1987), 408–426. [1](#), [9](#)
- [Rae77] RAEBURN, I. *The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space.* J. Funct. Anal., 25:(1977), 366–390. [25](#)

- [Rec99] RECHT, L. *Geometría diferencial en el espacio de operadores positivos*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, VI(2):(1999), 125–139. [1](#), [9](#)
- [Rud73] RUDIN, W. *Functional analysis*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York etc.: McGraw-Hill Book Comp. XIII, 1973. [19](#)
- [Ste51] STEENROD, N. *The topology of fibre bundles*. (Princeton Mathematical Series No. 14.) Princeton: Princeton University Press. VIII, 1951. [49](#)
- [Tho63] THOMPSON, A.C. *On certain contraction mappings in a partially ordered vector space*. Proc. Am. Math. Soc., 14:(1963), 438–443. [2](#), [10](#), [27](#), [31](#)
- [Uhl93] UHLMANN, A. *Density operators as an arena for differential geometry*. Rep. Math. Phys., 33(1-2):(1993), 253–263. [1](#), [9](#)
- [Ves76] VESENTINI, E. *Invariant metrics on convex cones*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser., 3:(1976), 671–696. [33](#)