Capítulo 5

Manifestaciones de las proyecciones A-autoadjuntas en la teoría de muestreo

El objetivo de este capítulo es mostrar de que manera las proyecciones A-autoadjuntas aparecen en los procesos de muestreo. Básicamente, la teoría de muestreo estudia la posibilidad de reconstruir una señal, que matemáticamente es modelada por medio de una función, a través de una serie de mediciones de a misma, las cuales en el modelo matemático consisten en una sucesión de números que están relacionados con la señal de algún modo. La teoría moderna de muestreo se originó a partir del trabajo de Shannon " Communication in the presence of noise" publicado en 1949 ([110]), y ha sido estudiada desde distintos puntos de vista. En este capítulo nos concentraremos en los procesos de muestreo y reconstrucción lineales, desde la perspectiva de la teoría de operadores. Nuestro principal objetivo es mostrar como las proyecciones A-autoadjuntas aparecen en tales procesos, y a partir de esto, por un lado relacionar los modelos introducidos por Eldar y Werther [54] y Smale y Zhou [111]. Por otro lado, las técnicas empleadas nos permitirán responder interrogantes planteados en [111].

5.1 Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo

Los espacios de Hilbert con un núcleo reproductivo han demostrado ser muy útiles en diversas áreas de la matemática. En particular, estos espacios ofrecen un marco ideal para modelar los problemas de muestreo. Comencemos recordando su definición.

Definición 5.1.1. Un espacio de Hilbert de funciones definidas en un dominio común Ω se dice que es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo si existe una función $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ tal que:

- $k_\xi = K(\cdot,\xi) \in \mathcal{H}$ para todo $\xi \in \Omega$.
- $f(\xi) = \langle f, k_\xi \rangle$ para toda $f \in \mathcal{H}$ y para todo $\xi \in \Omega$

Dicha función K se denomina núcleo reproductivo.

Nótese que, a partir de la definición, resulta relativamente sencillo deducir que un espacio de Hilbert admite a lo sumo un núcleo reproductivo. En efecto, supongamos que $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ y $H : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ son dos núcleos reproductivos para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ compuesto de funciones definidas en Ω. Entonces, dados $\xi, \eta \in \Omega$

$$K(\xi,\eta) = \langle\, k_\eta, h_\xi \,\rangle = \overline{\langle\, h_\xi, k_\eta \,\rangle} = \overline{H(\eta,\xi)} = H(\xi,\eta).$$

A raíz de esta unicidad es que a veces escribiremos $\mathcal{H}_K$ para simbolizar que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo K.

Por otro lado, de la definición también resulta sencillo observar que, en un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo, las evaluaciones son funcionales lineales continuos. Esta propiedad, en realidad, caracteriza a dichos espacios.

Teorema 5.1.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones definidas en un dominio común Ω. Entonces, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo si y sólo si las evaluaciones son funcionales lineales continuos.*

Corolario 5.1.3. *Sea $\mathcal{H}$ como en el teorema anterior y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{H}$ que convergen a $f \in \mathcal{H}$. Entonces, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ puntualmente. Más aún, la convergencia es uniforme en conjuntos donde $K(\xi,\xi)$ es acotado.*

Demostración. Sea $K(\cdot,\cdot)$ el núcleo reproductivo de $\mathcal{H}$. Dado $x \in \Omega$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)| = |\,\langle\, f - f_n,\ k_\xi \,\rangle\,| \leq \|f - f_n\|\|k_\xi\| = \|f - f_n\| K(\xi,\xi)^{1/2}.$$

■

5.1.1 Generación de espacios con núcleo reproductivo

A continuación discutiremos dos procedimientos para generar un espacio de Hilbert con núcleo reproductivo. El primero de ellos consiste en tomar una función $F : \Omega \to \mathcal{K}$ donde $\mathcal{K}$ es algún espacio de Hilbert. Para cada $x \in \mathcal{K}$, sea $F_x : \Omega \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f_x(\xi) = \langle\, x,\ F(\xi) \,\rangle\,.$$

Llamemos $\mathcal{H}$ al espacio de todas las funciones obtenidas de este modo. Definiendo $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ por medio de

$$T(x) = f_x,$$

el espacio $\mathcal{H}$ puede ser dotado de una norma

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \inf\{\|v\| :\ f = Tv\}.$$

De este modo, T se convierte en una isometría y $\mathcal{H}$, con el producto interno asociado a la norma $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$, en un espacio de Hilbert isomorfo a $N(T)^{\perp}$. Sea $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ el núcleo definido por

$$K(x_1, x_2) = \langle F(x_2), F(x_1) \rangle_{\mathcal{K}} .$$

Entonces, K resulta un núcleo reproductivo para $\mathcal{H}$.

La otra forma de construir espacios de Hilbert con núcleo reproductivo que discutiremos está relacionada con la noción de matriz positiva sobre Ω, o núcleos de Mercer.

Una función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ se denomina matriz positiva (resp. estrictamente) sobre Ω si para todo subconjunto finito $\{x_1, \dots x_n\} \subseteq \Omega$ se tiene que la matriz

$$\begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \dots & K(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, x_1) & \dots & K(x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

es positiva (resp. positiva e inversible). Dada una matriz estrictamente positiva sobre Ω, podemos considerar el espacio $\mathcal{H}_0$ compuesto por las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de la forma

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k K(\cdot, \xi_k),$$

donde $\{\xi_1, \dots , \xi_n\} \subseteq \Omega$. En dicho espacio definimos un producto interno del siguiente modo: sean $f, g \in \mathcal{H}_0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k K(\cdot, \xi_k) \quad \text{y} \quad g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k K(\cdot, \eta_k),$$

donde, eventualmente, algunos α_k (resp. β_k) son cero. Luego,

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j K(\xi_i, \eta_j).$$

Se puede ver que la completación de este espacio, respecto a la norma inducida por el producto interno recientemente definido, es un espacio de Hilbert que posee a K como núcleo reproductivo (ver detalles en [17] o [109]).

5.2 Muestreo en espacios de Hilbert

5.2.1 Nociones básicas

Como hemos mencionado en la introducción, la teoría moderna de muestreo de señales comenzó con el artículo de Claude Shannon *Communication int he presence of noise.* En dicho artículo demostraba el siguiente resultado, hoy conocido como teorema de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov (WSK):

Teorema 5.2.1. *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ una función cuya transformada de Fourier tiene soporte contenido en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces, f queda unívocamente determinada por los valores que toma en los enteros. Más aún, a partir de dichos valores la función puede reconstruirse del siguiente modo:*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{sen \pi(t-k)}{\pi(t-k)}$$

Luego de la aparición de este teorema, el matemático G. H. Hardy observó que la sucesión de funciones $\{\frac{\text{sen}\pi(t-k)}{\pi(t-k)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal del espacio de Paley-Wiener. Recordemos que el espacio de Paley-Wiener, usualmente denotado por $\mathcal{PW}$, es el subespacio de $L^2(R)$ que consiste de aquellas funciones cuya transformada de Fourier posee soporte contenido en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Dicho espacio es un espacio de Hilbert reproductivo, y su núcleo es

$$K(t, s) = \frac{\text{sen}\pi(t-s)}{\pi(t-s)}$$

Como para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$f(n) = \left\langle f, \frac{\text{sen}\pi(\cdot - s)}{\pi(\cdot - s)} \right\rangle,$$

se observa que los datos, a partir de los cuales reconstruimos f, se obtienen al considerar el producto interno de f con la familia de funciones $\{\frac{\text{sen}\pi(t-k)}{\pi(t-k)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Esto motiva un modelo de muestreo más abstracto, donde la señal f es un vector de cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y que las muestras son el resultado de realizar el producto interno de f con los elementos de cierta sucesión $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de $\mathcal{H}$. Los vectores de dicha sucesión son los que usualmente se conocen con el nombre de **vectores de muestreo**, y supondremos que forman un marco para cierto subespacio $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$.

Por otro lado, si $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\langle f, g_n \rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$, estamos interesados en reconstruir f a partir de estos los datos de muestreo. Para ello, uno cuenta con otra sucesión de vectores $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que constituye un marco para cierto subespacio $\mathcal{W}$ de $\mathcal{H}$ que puede diferir del subespacio $\mathcal{M}$. A los vectores f_n se los suele denominar **vectores de reconstrucción**.

En [54], Eldar y Werther proponen dos condiciones que un proceso de muestreo y posterior reconstrucción naturalmente debe satisfacer:

Unicidad: Si $h_1, h_2 \in \mathcal{W}$ y $\langle h_1, g_n \rangle = \langle h_2, g_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $h_1 = h_2$.

Consistencia: Si $f_{\mathcal{W}}$ denota la señal reconstruida, entonces $\langle f_{\mathcal{W}}, g_n \rangle = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El primer requerimiento es sobre el proceso de muestreo e implica que $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. La consistencia, por otro lado, es un requerimiento sobre el proceso de reconstrucción. El mismo puede dividirse en dos partes: la primera implica la existencia de $f_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$ tal que $\langle f_{\mathcal{W}}, g_n \rangle = d_n$. Esto es bastante fuerte puesto que implica que $\mathcal{H} = \mathcal{W} + \mathcal{M}^{\perp}$. En segundo lugar, y de aquí el término consistencia, nos dice que si muestreamos la señal $f_{\mathcal{W}}$ y posteriormente la reconstruimos, obtendremos nuevamente $f_{\mathcal{W}}$.

En este trabajo consideraremos sólo modelos lineales de muestreo, es decir, modelos donde el operador que a una señal f le asigna la señal reconstruida $f_{\mathcal{W}}$ es lineal. En estos modelos también es natural pedir que dicho operador sea acotado, lo cual está relacionado con la estabilidad del proceso. Si F y G denotan los operadores de síntesis de los marcos $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ respectivamente, entonces existe $H \in L(\ell^2)$ de modo tal que el operador que a f le asigna $f_{\mathcal{W}}$ puede escribirse como FHG^*. La función del operador H es la de transformar los datos $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en los coeficientes que se utilizan para generar $f_{\mathcal{W}}$ en términos de $\mathcal{F}$.

El siguiente resultado fue obtenido en [54]. Aquí incluimos una demostración del mismo que involucra las técnicas de proyecciones A-autoadjuntas.

Proposición 5.2.2. *Existe un único proceso de muestreo y reconstrucción que satisfaga las condiciones de unicidad y consistencia que posee a los vectores de $\mathcal{G}$ como vectores de muestreo y a los de $\mathcal{F}$ como vectores de reconstrucción. Más aún, el operador lineal asociado a dicho proceso es el proyector $P_{GG^*,\mathcal{W}}$.*

Demostración. Como ya hemos mencionado, el operador $Q \in L(\mathcal{H})$ asociado a un tal proceso de muestreo y reconstrucción tiene la forma $Q = FHG^*$ donde $H \in L(\ell^2)$. Es fácil ver que la condición de unicidad junto con la de consistencia permiten asegurar que Q es una proyección (oblicua) sobre $\mathcal{W}$. Veamos que la proyección Q pertenece al conjunto $\mathcal{P}(GG^*, \mathcal{W})$ de proyecciones GG^*-autoadjuntas. Para ello, por la Proposición 2.3.2, basta verificar que $N(Q) \subseteq R(Q)^{\perp_{GG^*}}$. Recordemos que $R(Q)^{\perp_{GG^*}} = \Big(GG^*(R(Q))\Big)^{\perp}$, luego

$$R(Q)^{\perp_{GG^*}} = \big(GG^*(R(Q))\big)^{\perp} = R(GG^*F)^{\perp} \supseteq R(G)^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}.$$

Por otro lado, $N(Q) = R(I-Q)$. Entonces, la condición de consistencia implica que $N(Q) \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $f \in \mathcal{H}$ vale

$$\langle (I-Q)f, g_n \rangle = \langle f, g_n \rangle - \langle Qf, g_n \rangle = 0.$$

Por lo tanto $R(I-Q) \subseteq \overline{\text{gen}}\,\{g_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}$. En conclusión, se tiene que

$$N(Q) \subseteq \mathcal{M}^{\perp} \subseteq R(Q)^{\perp_{GG^*}}.$$

Por último, basta notar que $N(GG^*)\cap\mathcal{W} = N(G^*)\cap\mathcal{W} = \mathcal{M}^{\perp}\cap\mathcal{W} = \{0\}$, y por el Teorema 2.3.7, existe un único proyector (GG^*)-autoadjunto, el $P_{GG^*,\mathcal{W}}$. Luego, $Q = P_{GG^*,\mathcal{W}}$. ∎

A continuación definiremos una medida de suficiencia de los datos obtenidos al muestrear una señal con los elementos de $\mathcal{G}$ son suficientes para reconstruirla utilizando los elementos de $\mathcal{F}$. Esta noción es una extensión de la introducida por Smale y Zhou en [111] en el contexto de espacios de Hilbert reproductivos.

Definición 5.2.3. Diremos que $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a $\mathcal{F}$ si

$$\inf \{ \|G^*F(z)\| : \ z \in N(F)^\perp \ , \ \|z\| = 1\} > 0.$$

Proposición 5.2.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{G}$ provee suficiente información respecto a $\mathcal{F}$;*
2. *G^*F posee rango cerrado y $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$;*
3. *$c_0 \left[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp \right] < 1$;*
4. *$c \left[\mathcal{W}^\perp, \mathcal{M} \right] < 1$ y $\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M} = \mathcal{H}$.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$ Que $\mathcal{G}$ provea suficiente información con respecto a $\mathcal{F}$ implica que la restricción de G^*F a $N(F)^\perp$ es inyectiva, luego $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. Por otro lado, como $N(G^*F) = N(F)$, se tiene que $\gamma(G^*F) > 0$. En consecuencia, G^*F posee rango cerrado.

$2 \Rightarrow 3$ Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.4.5.

$3 \Rightarrow 4$ Por la Proposición 1.2.3, $c_0 \left[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp \right] = c \left[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp \right]$ y $c \left[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp \right] = c \left[\mathcal{W}^\perp, \mathcal{M} \right]$. Por lo tanto, $c \left[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp \right] < 1$. Esto en particular muestra que $\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M}$ es cerrado. Luego, como $c_0 \left[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp \right] < 1$ también implica que $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$,

$$\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M} = \overline{\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M}} = (\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{H}.$$

$4 \Rightarrow 1$ Primeramente, notemos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = (\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M})^\perp = \{0\}$. En consecuencia, $N(G^*F) = N(F)$. Luego, por la Proposición 1.4.5,

$$\begin{aligned} \inf_{x \in N(F)^\perp} \|G^*F(x)\| &= \gamma(G^*F) \geq \gamma(G^*) \ \gamma(F) \ s \left[R(F), \, N(G^*) \right] \\ &= \gamma(G^*) \ \gamma(F) \ s \left[\mathcal{W}, \, \mathcal{M}^\perp \right] > 0. \end{aligned}$$

■

Observaciones 5.2.5.

1. Notar que la proposición anterior enfatiza el hecho de que la hipótesis de que $\mathcal{G}$ provea suficiente información con respecto de $\mathcal{F}$ sólo depende de los subespacios y no de los marcos elegidos en cada uno de ellos.
2. El item 2 muestra que si $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a $\mathcal{F}$ entonces se satisface el requerimiento de unicidad. Sin embargo, puede ocurrir que $\mathcal{W} + \mathcal{M}^\perp$ sea un subespacio propio de $\mathcal{H}$. ▲

Dado que bajo la hipótesis de suficiente información puede ocurrir que $\mathcal{W} + \mathcal{M}^\perp \subsetneq \mathcal{H}$, no siempre existe $h \in \mathcal{W}$ tal que $\langle h, g_n \rangle = \langle f, g_n \rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En tales casos, se pide que la función $f_{\mathcal{W}}$ que se obtenga tras la reconstrucción satisfaga que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_{\mathcal{W}}, g_n \rangle - d_n|^2 = \arg\min_{h\in\mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2$$

A continuación demostraremos que también en este caso, la proyección $P_{GG^*,\mathcal{W}}$ aparece nuevamente como el operador que vincula a f con la solución $f_{\mathcal{W}}$. Pero antes, introduciremos una notación que nos será de gran utilidad. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert, $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ un subespacio cerrado e $y \in \mathcal{H}_2$. Si T es acotado inferiormente en $\mathcal{S}$, es decir, si se verifica

$$\inf_{x\in\mathcal{S}} \|Tx\| > 0 ,$$

entonces no es difícil ver que existe una única solución del problema de minimización

$$\min_{x\in\mathcal{S}} \|Tx - y\|.$$

En efecto, como T es acotado inferiormente en $\mathcal{S}$, $T(\mathcal{S})$ es un subespacio cerrado. Por ende, $T(\mathcal{S}) - y := \{T(x) - y : \ x \in \mathcal{S}\}$ es convexo y cerrado, razón por la cual posee un único elemento de norma mínima. Dicho elemento está asociado a un $x_0 \in \mathcal{S}$ que es precisamente la solución del problema de minimización antes mencionado. De aquí en adelante, cuando el operador T y el subespacio $\mathcal{S}$ (sobre el cual minimicemos) estén en las condiciones antes descritas, usaremos la siguiente notación para el vector x_0:

$$x_0 = \arg\min_{x\in\mathcal{S}} \|Tx - y\|.$$

Proposición 5.2.6. *Sea $f \in \mathcal{H}$, $d = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} = G^*(f)$, y supongamos que $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a $\mathcal{F}$. Entonces, el problema de minimización*

$$\min_{h\in\mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2$$

posee una única solución $f_{\mathcal{W}} = P_{GG^*,\mathcal{W}}(f)$. En particular

$$\|f_{\mathcal{W}} - f\| = \|(1 - P_{GG^*,\mathcal{W}})(f)\| \le s\left[\mathcal{W}, (GG^*)^{-1}(\mathcal{W}^\perp)\right]^{-1} \|f\|.$$

Demostración. Notemos además que

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W}} &= \arg\min_{h\in\mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2 \\ &= F\Big(\arg\min_{z\in N(F)^\perp} \Big\|G^*F(z) - d\Big\|_{\ell^2}\Big) \\ &= F\Big(\arg\min_{z\in N(G^*F)^\perp} \Big\|G^*F(z) - d\Big\|_{\ell^2}\Big), \end{aligned}$$

donde hemos usado que $N(G^*F) = N(F)$, pues $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a $\mathcal{F}$. Como $\arg \min_{z \in N(G^*F)^\perp} \left\| G^*F(z) - d \right\|_{\ell^2} = (G^*F)^\dagger(d) = (G^*F)^\dagger G^*(f)$, se tiene que

$$f_{\mathcal{W}} = F(G^*F)^\dagger G^*(f). \tag{5.1}$$

Sea $Q = F(G^*F)^\dagger G^*$. Es fácil ver que Q es una proyección cuyo rango es $\mathcal{W}$. Por otro lado, como $(G^*F)^\dagger = (F^*GG^*F)^\dagger F^*G$,

$$(GG^*)Q = (GG^*)F(F^*GG^*F)^\dagger F^*GG^*,$$

lo cual muestra que $(GG^*)Q$ es autoadjunto, y por ende Q es (GG^*)-autoadjunto. Pero como ya hemos visto, $N(GG^*) \cap \mathcal{W} = N(G^*) \cap \mathcal{W} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{W} = \{0\}$, y por lo tanto el Teorema 2.3.7 permite concluir que $Q = P_{GG^*, \mathcal{W}}$. ■

Observación 5.2.7. Notemos que la parte más importante de la condición de consistencia introducida por Eldar y Werther sigue valiendo, i.e., si comenzamos el proceso de muestreo y reconstrucción con la señal $f_{\mathcal{W}}$ obtendremos nuevamente $f_{\mathcal{W}}$. ▲

En la práctica, los datos obtenidos por medio del muestreo son pasibles de perturbaciones de distinta índole. Es por esto que se trata de estimar el error en la reconstrucción provocado por una perturbación de los datos del muestreo. En la siguiente Proposición consideraremos una estimación de esta naturaleza.

Proposición 5.2.8. *Sean $d = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} = G^*(f)$ y $f_{\mathcal{W}}$ como en la Proposición 5.2.6. Supongamos que $\widehat{f_{\mathcal{W}}}$ es el vector obtenido si usamos $\widehat{d} = \{\widehat{d_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en vez de los datos originales $d = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces:*

$$\|\widehat{f_{\mathcal{W}}} - f_{\mathcal{W}}\| \leq \|F(G^*F)^\dagger\| \|d - \widehat{d}\| \leq \frac{\|F\|}{\gamma(G^*F)} \|d - \widehat{d}\| \leq \frac{\|F\|}{\gamma(G)\gamma(F)c_0\left[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp\right]} \|d - \widehat{d}\|$$

Demostración. Surge de la ecuación (5.1), de la definición de módulo mínimo reducido y la Proposición 1.4.5. ■

5.2.2 Procesos de reconstrucción escaleados y regularizados

Como hemos visto, bajo la condición de suficiente información, la señal reconstruida a partir de los datos del muestreo queda caracterizada como la solución de un problema de cuadrados mínimos. En ciertos casos, estos problemas están mal condicionados y es preciso introducir cierta regularización del mismo. El objetivo de esta sección es estudiar una posible regularización del problema de cuadrados mínimos que caracteriza a la señal obtenida tras la reconstrucción y obtener estimaciones del error que esta regularización introduce.
Sea $\alpha > 0$ y $\{\omega_n\}$ una sucesión de números positivos acotados superiormente. Denotemos D_ω al operador diagonal sobre ℓ^2 definido por $D_\omega(e_n) = \omega_n\, e_n$. Dado $f \in \mathcal{H}$, si $d_n = \langle f,\ g_n \rangle$ $n \in \mathbb{N}$, buscaremos la solución $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}$ del siguiente problema de minimización:

$$\min_{h\in\mathcal{W}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h,\ g_n \rangle - d_n|^2 + \alpha \|h\|^2 \Big),$$

La solución del mismo, como ya hemos visto, puede pensarse como el resultado de un proceso de reconstrucción. Las diferencias con el caso antes estudiado son básicamente dos. La primera es la aparición de los coeficientes ω_n que ponderan de manera diferente las distintas coordenadas. La segunda, es el término $\alpha\|h\|^2$ que introduce una regularización del problema. Este método de regularización fue inventado independientemente en varios contextos, pero su amplia difusión se debe a las aplicaciones a ecuaciones integrales mencionadas en los trabajos de Tikhonov [116, 117] y Phillips [107]. Algunos autores suelen denominar a este método regularización de Phillips-Tikhonov. El caso finito dimensional fue expuesto por Hoerl [73], quien adoptó un enfoque estadístico, y por Foster [58], quien interpretó este método como un filtro de Wiener-Kolmogorov.

Antes de enunciar nuestro primer resultado, es necesario modificar la noción de suficiente información.

Definición 5.2.9. Diremos que $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a $\mathcal{F}$ y a D_ω si

$$\inf\{\, \|D_\omega^{1/2}G^*F(z)\| : \ z \in N(F)^\perp \ \ \|z\| = 1\} > 0.$$

Observación 5.2.10. Como en el caso no regularizado, si el operador D_ω es inversible, la propiedad de proveer suficiente información sólo depende de los subespacios $\mathcal{W}$ y $\mathcal{M}$. Más precisamente, $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a $\mathcal{F}$ y a D_ω si y sólo si $c_0\left[\mathcal{W},\, \mathcal{M}^\perp\right] < 1$. Sin embargo, si el operador D_ω no es inversible, dicha propiedad no sólo depende de los subespacios $\mathcal{W}$ y $\mathcal{M}$, sino también de los operadores G, F y D_ω. ▲

Ahora estamos listos para enunciar el primer resultado de esta subsección:

Proposición 5.2.11. *Sea $f \in \mathcal{H}$ y $d = \{d_n\} = G^*(f)$. Entonces existe una única solución $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}$ del problema de minimización:*

$$\min_{h\in\mathcal{W}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h,\ g_n\rangle - y_n|^2 + \alpha\|h\|^2 \Big), \tag{5.2}$$

la cual está dada por $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} = L_{\alpha,\omega}(f)$, siendo $L_{\alpha,\omega}$ el operador definido del siguiente modo

$$L_{\alpha,\omega} = F\Big(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F\Big)^\dagger F^*GD_\omega G^*. \tag{5.3}$$

En particular, si suponemos que $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a F y a D_ω, obtenemos la siguiente estimación para el error de reconstrución:

$$\|f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f\| \le \Big\|(1 - P_{A,\mathcal{W}})(f)\Big\| + \left(\alpha \frac{\|F\|^2}{\gamma(D_\omega^{1/2}G^*F)^2 + \alpha\ \gamma(F)^2}\right) \|f\|, \tag{5.4}$$

donde $A = GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}}$.

Observaciones 5.2.12.

1. El primer término de (5.4) aparece sólo si f no pertenece a $\mathcal{W}$. Por otro lado,

$$\alpha \left(\frac{\|F\|^2}{\gamma(D_\omega^{1/2} G^* F)^2 + \alpha\ \gamma(F)^2} \right) \|f\| \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0,$$

   y este hecho sólo depende de la regularización. También es importante notar que aún si f pertenece a $\mathcal{W}$ puede ocurrir que $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} \neq f$.

2. El precio que tenemos que pagar por la regularización del problema de minimización es la inconsistencia del proceso. ▲

Antes de probar la Proposición 5.2.11, necesitamos la siguiente estimación.

Lema 5.2.13. *Supongamos que $\mathcal{G}$ provee suficiente información con respecto a F y a D_ω. Entonces*

$$\left\| \Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F \Big)^\dagger \right\| \leq \frac{1}{\gamma(D_\omega^{1/2} G^* F)^2 + \alpha\ \gamma(F)^2}.$$

Demostración. Notemos que $N(F^*GD_\omega G^*F) = N(F^*F) = N(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F)$. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F) &= \gamma(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F) \\ &\geq \gamma(F^*GD_\omega G^*F) + \gamma(\alpha F^*F) \\ &= \gamma(D_\omega^{1/2} G^* F)^2 + \alpha \gamma(F)^2. \end{aligned}$$

■

Demostración de la proposición 5.2.11. Sea $\mathcal{L} = \ell^2 \oplus \mathcal{H}$ y consideremos el operador $T : \ell^2 \to \mathcal{L}$ definido por

$$T(z) = \begin{pmatrix} D_\omega^{1/2} G^* F \\ \alpha^{1/2} F \end{pmatrix} (z) = \Big(D_\omega^{1/2} G^* F(z) \Big) \oplus \Big(\alpha^{1/2} F(z) \Big).$$

En términos del operador T, usando el hecho de que $N(T) = N(F)$ y que T es acotado inferiormente en $N(T)^\perp$, el problema (5.3) de mínimos cuadrados puede reescribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} &= \arg \min_{h \in \mathcal{W}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h,\ g_n \rangle - y_n|^2 + \alpha \|h\|^2 \Big) \\ &= F \left(\arg \min_{z \in N(T)^\perp} \left\| T(z) - (D_\omega^{1/2}(y) \oplus 0) \right\| \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} = FT^\dagger(D_\omega^{1/2}(y) \oplus 0)$. Usando la identidad $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^*$, obtenemos

$$\begin{aligned} T^\dagger &= \left(\begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\omega^{1/2}G^*F \\ \alpha^{1/2}F \end{pmatrix} \right)^\dagger \begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix} \\ &= \Big(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F \Big)^\dagger \begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} &= F\Big(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F \Big)^\dagger \begin{pmatrix} F^*GD_\omega^{1/2} & \alpha^{1/2}F^* \end{pmatrix} (D_\omega^{1/2}(y) \oplus 0) \\ &= F\Big(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F \Big)^\dagger F^*GD_\omega G^*(f) = L_{\alpha,\omega}(f) \end{aligned}$$

Cálculos de rutina muestran que si $A = GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}}$, entonces

$$F\Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F \Big)^\dagger (F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})) = P_{A,\mathcal{W}}.$$

Usando este hecho y el Lema 5.2.13 resulta:

$$\begin{aligned} \|f_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f\| &= \left\| \Big(F\big(F^*GD_\omega G^*F + \alpha F^*F\big)^\dagger F^*GD_\omega G^* - I \Big)(f) \right\| \\ &= \left\| \Big(F\big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\big)^\dagger F^*GD_\omega G^* - I \Big)(f) \right\| \\ &\le \left\| \Big(F\Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\Big)^\dagger (F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})) - I \Big)(f) \right\| \\ &\quad + \left\| \Big(F\Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\Big)^\dagger \alpha F^* P_{\mathcal{W}} \Big)(f) \right\| \\ &= \Big\| (I - P_{A,\mathcal{W}})(f) \Big\| + \left\| \Big(F\Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\Big)^\dagger \alpha F^* P_{\mathcal{W}} \Big)(f) \right\| \\ &\le \Big\| (I - P_{A,\mathcal{W}})(f) \Big\| + \left\| \Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\Big)^\dagger \right\| \ \alpha\|F\|^2 \ \|f\| \\ &\le \Big\| (1 - P_{A,\mathcal{W}})(f) \Big\| + \left(\alpha \frac{\|F\|^2}{\gamma(D_\omega^{1/2}G^*F)^2 + \alpha\ \gamma(F)^2} \right) \|f\| \end{aligned}$$

■

Como antes, estamos interesados en una estimación del error que se produce a causa de una perturbación en los valores obtenidos en el muestreo.

Proposición 5.2.14. *Sea $d = \{d_n\} = G^*(f)$ y $f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}$ como en la Proposición 5.2.11 y supongamos que $\widehat{f}_{\mathcal{W},\alpha,\omega}$ es un vector obtenido si usamos $\widehat{d} = \{\widehat{d_n}\}$ en vez de los datos origi-*

nales $d = \{d_n\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}\| &\leq \left\| F\Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\Big)^\dagger F^*GD_\omega \right\| \|d - \widehat{d}\| \\ &\leq \left(\frac{\|F\|\ \|\omega\|_\infty \|F^*G\|}{\gamma(D_\omega^{1/2}G^*F) + \alpha\ \gamma(F)^2} \right) \|d - \widehat{d}\|\end{aligned}$$

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}\|\widehat{f}_{\mathcal{W},\alpha,\omega} - f_{\mathcal{W},\alpha,\omega}\| &\leq \left\| \Big(F\Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\Big)^\dagger F^*GD_\omega\Big)(d - \widehat{d}) \right\| \\ &\leq \|F\|\ \|F^*G\|\ \|\omega\|_\infty \left\| \Big(F^*(GD_\omega G^* + \alpha P_{\mathcal{W}})F\Big)^\dagger \right\| \|d - \widehat{d}\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la estimación buscada surge a partir del Lema 5.2.13. ■

5.2.3 Muestreo en espacios de Hilbert reproductivos

En esta sección traduciremos los resultados obtenidos en espacios de Hilbert abstractos a espacios de Hilbert reproductivos. Para ello, usaremos la notación introducida por Smale y Zhou. Sean $\overline{t}$ y $\overline{x}$ subconjuntos discretos de X y definamos

$$\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}} = \overline{\text{gen}}\left\{k_t :\ t \in \overline{t}\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_{k,\ \overline{x}} = \overline{\text{gen}}\left\{k_x :\ x \in \overline{x}\right\}.$$

Supondremos que $\{k_t\}_{t\in\overline{t}}$ y $\{k_x\}_{x\in\overline{x}}$ son marcos para $\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}}$ y $\mathcal{H}_{k,\ \overline{x}}$, respectivamente. Si F es el operador de síntesis de $\{k_t\}_{t\in\overline{t}}$ y G es el operador de síntesis de $\{k_x\}_{x\in\overline{x}}$, consideraremos los operadores: $K_{\overline{t},\overline{t}} = F^*F$, $K^{\overline{x},\overline{x}} = GG^*$ y $K_{\overline{x},\overline{t}} = K^*_{\overline{t},\overline{x}} = G^*F$. Finalmente, $\{\omega_x\}_{x\in\overline{x}}$ será una sucesión de números positivos acotada superiormente, y D_ω el correspondiente operador diagonal con respecto a la base canónica de $\ell^2(\overline{x})$. Comenzaremos escribiendo la noción suficiente información en este contexto:

Definición 5.2.15. Diremos que $\overline{x}$ provee suficiente información con respecto a $\overline{t}$ y ω si

$$\inf\{\|D_\omega^{1/2}K_{\overline{x},\overline{t}}(z)\| :\ z \in N(K_{\overline{t},\overline{t}})^\perp\ \|z\| = 1\} > 0.$$

Esto equivale a que el operador $D_\omega^{1/2}K_{\overline{x},\overline{t}}$ posea rango cerrado y $\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}} \cap \mathcal{H}_{k,\ \overline{x}}{}^\perp = \{0\}$.

Ahora, estamos listos para reescribir las Proposiciones 5.2.11 y 5.2.14 en este contexto:

Proposición 5.2.16. *Sea $f \in \mathcal{H}$ y $d = \{f(x)\}_{x\in\overline{x}}$. El problema de minimización*

$$\min_{h\in\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}}} \Big(\sum_{x\in\overline{x}} \omega_x |h(x) - f(x)|^2 + \alpha\|h\|^2_{\mathcal{H}} \Big), \tag{5.5}$$

posee una única solución $f_{\alpha,\omega}$ dada por

$$f_{\alpha,\omega} = \sum_{t\in\overline{t}} L_{\alpha,\omega}(y)(t)\ k_t,$$

donde $L_{\alpha,\omega} : \ell^2(\overline{x}) \to \ell^2(\overline{t})$ *es el operador*

$$L_{\alpha,\omega} = \Big(K_{\overline{t},\overline{x}} D_\omega K_{\overline{x},\overline{t}} + \alpha K_{\overline{t},\overline{t}}\Big)^\dagger K_{\overline{t},\overline{x}} D_\omega .$$

En particular, si suponemos que $\overline{x}$ *provee suficiente información con respecto a* $\overline{t}$ *y* ω*, obtenemos la siguiente estimación para el error de reconstrucción:*

$$\|f_{\alpha,\omega} - f\|_{\mathcal{H}} \leq \Big\|(1 - P_{A,\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}}})(f)\Big\|_{\mathcal{H}} + \left(\alpha \frac{\|K_{\overline{t},\overline{t}}\|}{\gamma(D_\omega^{1/2} K_{\overline{x},\overline{t}}) + \alpha\ \gamma(K_{\overline{t},\overline{t}})}\right) \|f\|_{\mathcal{H}} \tag{5.6}$$

donde $A = (K_{\overline{t},\overline{x}} D_\omega K_{\overline{x},\overline{t}} + \alpha P_{\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}}})$.

Observación 5.2.17. Sea $H = K_{\overline{t},\overline{x}} D_\omega K_{\overline{x},\overline{t}} + \alpha K_{\overline{t},\overline{t}}$. Entonces, la representación matricial de H con respecto a la base canónica de $\ell^2(\overline{t})$ es, para todo $t, s \in \overline{t}$

$$H(t,s) = \sum_{x \in \overline{x}} K(t,x)\ \omega_x K(x,s)\ +\ \alpha K(t,s).$$

Sea $H^\dagger = \big(H^\dagger(t,s)\big)_{s,t \in \overline{t}}$ la inversa generalizada de Moore-Penrose de H. Luego, en términos de $H^\dagger$, para todo $f \in \mathcal{H}$, la proyección oblicua $P_{A,\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}}}$ adopta la siguiente forma.

$$P_{A,\mathcal{H}_{k,\ \overline{t}}}(f) = \sum_{t \in \overline{t}} c_t\ k_t\ , \qquad \text{where } c_t = \sum_{s \in \overline{t}} H^\dagger(t,s) \left(\sum_{x \in \overline{x}} K(s,x)\ \omega_x f(x)\ +\ \alpha f(s)\right).$$

▲

Proposición 5.2.18. *Sean* $d = \{f(x)\}_{x \in \overline{x}}$ *y* $f_{\alpha,\omega}$ *como en la Proposición 5.2.16. Supongamos que* $\widehat{f}_{\alpha,\omega}$ *es el vector obtenido si usamos* $\widehat{d} = \{\widehat{d}_x\}_{x \in \overline{x}}$ *en lugar de los datos originales,* $y = \{f(x)\}_{x \in \overline{x}}$*. Entonces:*

$$\|\widehat{f}_{\alpha,\omega} - f_{\alpha,\omega}\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\frac{\|K_{\overline{t},\overline{t}}\|^{1/2} \|\omega\|_\infty \|K_{\overline{t},\overline{x}}\|}{\gamma(D_\omega^{1/2} K_{\overline{x},\overline{t}}) + \alpha\ \gamma(K_{\overline{t},\overline{t}})}\right) \Big\|\ d - \widehat{d}\ \Big\|_{\ell^2(\overline{x})}.$$

A continuación intoduciremos en nuestro modelo de muestreo y reconstrucción la noción de ruido. Para ello consideraremos una medida de probabilidad ρ definida en $X \times \mathbb{R}$ (resp. $X \times \mathbb{C}$). Para cada $x \in X$, por medio de ρ_x denotaremos a la probabilidad condicional de ρ respecto al evento $\{x\} \times \mathbb{R}$ (resp. $\{x\} \times \mathbb{C}$), y por medio de σ_x a la varianza de esta probabilidad condicional. Supondremos que para cada $x \in X$, ρ_x está soportada en el intervalo $[-M_x, M_x]$ (resp. $B_{M_x}(0)$) y que $M = \sum_{x \in X} M_x < \infty$. Finalmente, sea $\kappa = \left(\frac{\|K_{\overline{t},\overline{t}}\|^{1/2} \|\omega\|_\infty \|K_{\overline{t},\overline{x}}\|}{\gamma(D_\omega^{1/2} K_{\overline{x},\overline{t}}) + \alpha\ \gamma(K_{\overline{t},\overline{t}})}\right)$.

Corolario 5.2.19. *Sean $d = \{f(x)\}_{x\in\overline{x}}$ y $f_{\alpha,\omega}$ como en la Proposición 5.2.16. Supongamos que $f_{\alpha,\omega,\rho}$ es el vector obtenido si usamos $d_\rho = \{d_x + \eta_x\}_{x\in\overline{x}}$, donde las η_x son variables "aleatorias" cuyo valor de obtiene al azar según ρ_x. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, la probabilidad de que*

$$\|f_{\alpha,\omega,\rho} - f_{\alpha,\omega}\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa \sum_{x\in\overline{x}} \sigma_x^2 + \varepsilon$$

es $1 - \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{4\kappa M}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2\kappa M}}$.

Para demostrar este corolario necesitamos el siguiente resultado demostrado por Smale y Zhou en [111]

Proposición 5.2.20. *Si ξ es una variable aleatoria con varianza finita σ^2 tal que $|\xi - E(\xi)| \leq M$, entonces*

$$P\left(\{|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon M}{\sigma^2}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2M}}.$$

Demostración del Corolario 5.2.19. Basta tomar $\xi = \|f_{\alpha,\omega,\rho} - f_{\alpha,\omega}\|_{\mathcal{H}}$. Luego, por la Proposición 5.2.18

$$0 \leq \xi \leq \kappa \sum_{x\in\overline{x}} \eta_x^2.$$

En consecuencia,

$$E\xi \leq \kappa \sum_{x\in\overline{x}} \sigma_x^2.$$

Por otro lado, como $|\xi - E\xi| \leq 2(\kappa M)$, se tiene que

$$\mathrm{Var}(\xi) = E(|\xi - E\xi|^2) \leq 4\kappa^2 M^2.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} P\left(\left\{\|f_{\alpha,\omega,\rho} - f_{\alpha,\omega}\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa \sum_{x\in\overline{x}} \sigma_x^2 + \varepsilon\right\}\right) &\geq P\left(\{\xi \leq E\xi + \varepsilon\}\right) \\ &\geq P\left(\{|\xi - E(\xi)| \leq \varepsilon\}\right) \\ &\geq 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{4\kappa M}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2\kappa M}}. \end{aligned}$$

■

Observación 5.2.21. Estimaciones del mismo estilo se obtienen reemplazando la Proposición 5.2.20 por la desigualdad de Markov u otras semejantes. ▲

5.3 Un problema de momentos

A continuación estudiaremos un problema de momentos que está íntimamente relacionado con los procesos de reconstrucción antes mencionados. Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Buscamos $h \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\langle\, h,\ f_n\,\rangle = a_n \tag{5.7}$$

Siguiendo la terminología introducida por Young en [123], a la sucesión $\{\langle\, g,\ f_n\,\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ la denominaremos sucesión de momentos de g, mientras que al espacio de todas las sucesiones de momentos lo denominaremos espacio de momentos.

Está claro que el problema de momentos en general no siempre tiene solución. En efecto, basta notar que el espacio de momentos coincide con ℓ^2 si y sólo si $\mathcal{F}$ es una base de Riesz. De no ser así, para que el problema posea solución, la dependencia entre los vectores de $\mathcal{F}$ también debe manifestarse en los coeficients a_n.

Cuando dicha solución no existe, se busca la más próxima en algún sentido. Por ejemplo, respecto a la distancia usual de ℓ^2, i.e. se busca $g \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\,\langle\, g,\ f_k\,\rangle - a_k|^2 = \min_{h\in\mathcal{H}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\,\langle\, h,\ f_k\,\rangle - a_k|^2.$$

Pero también, si $D \in L(\ell^2(N))$ es un operador positivo e inversible tal que $De_n = \omega_n e_n$, entonces uno puede buscar la solución más próxima respecto a la distancia que se obtiene al reescalear el producto interno de $\ell^2(N)$ con D. Es decir, se puede buscar g_{D} tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k |\,\langle\, g_{D},\ f_k\,\rangle - a_k|^2 = \min_{h\in\mathcal{H}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k |\,\langle\, h,\ f_k\,\rangle - a_k|^2.$$

A lo largo de esta subsección, $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denotará la base canónica de ℓ^2. Al igual que en la sección 4.2 $\mathcal{D}$ denota el álgebra abeliana de todos los operadores diagonales con respecto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}^+$ el conjunto de operadores positivos e inversibles de $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ el conjunto de todas las proyecciones de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ el conjunto de proyecciones finito dimensionales de $\mathcal{D}$. Por una cuestión de simplicidad en la notación, a lo largo de esta sección supondremos que la sucesión de subconjuntos finitos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ asociada a los marcos de Riesz condicionales con los que trabajaremos es la canónica, i.e. $I_n = \{1, \dots, n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Comenzaremos con el siguiente resultado demostrado por Cazzasa y Christensen en [33].

Proposición 5.3.1. *Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un marco de Riesz condicionado para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de ℓ^2. Dado $D \in \mathcal{D}^+$ tal que $De_n = \omega_n e_n$, sea g_{D} tal que*

$$g_{D} = \arg\min_{h\in\mathcal{H}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k |\,\langle\, h,\ f_k\,\rangle - a_k|^2,$$

asociado al problema de momentos $\langle g, f_n \rangle = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Si* $g_{n,D}$ *representa la solución de mínima norma en* $\mathcal{H}$ *del problema truncado*

$$\min_{h\in\mathcal{H}} \sum_{k=1}^{n} \omega_k |\langle h,\ f_k \rangle - a_k|^2,$$

entonces $g_{n,D} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} g_D$.

Observación 5.3.2. En [33], Cazzasa y Christensen demuestran que la convergencia de $g_{n,D}$ a g_D para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ caracteriza a los marcos de Riesz condicionados. ▲

Basados en esta proposición y en el teorema de Ben-Tal y Teboulle , resulta:

Proposición 5.3.3. *Sea* $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un marco de Riesz condicionado para un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *y sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* ℓ^2. *Sea* $J(\mathcal{F})$ *el conjunto de los subconjuntos finitos* $I \subseteq \mathbb{N}$ *tales que* $\{f_i :\ i \in I\}$ *es linealmente independiente. Entonces, dado* $D \in \mathcal{D}^+$ *tal que* $De_n = \omega_n e_n$, *si* g_D *es la solución del problema de cuadrados mínimos*

$$\min_{h\in\mathcal{H}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_k |\langle h,\ f_k \rangle - a_k|^2,$$

asociado al problema de momentos $\langle g, f_n \rangle = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$g_D \in \overline{co\{g_I :\ I \in J(\mathcal{F})\}}^{\|\cdot\|},$$

donde g_I *es la única solución en el espacio generado por* $\{f_i :\ i \in I\}$ *del problema de momentos truncado* $\langle g, f_i \rangle$, $i \in I$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 5.3.1, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|g_D - g_{n,D}\| \leq \varepsilon$. Sea $Q_n \in L(\ell^2)$ la proyección ortogonal sobre el subespacio ℓ^2_n generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$, y sea $\mathcal{H}_n$ el subespacio generado por $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Como $TQ_n : \ell^2_n \to \mathcal{H}_n$ es suryectivo, $Q_n T^* : \mathcal{H}_n \to \ell^2_n$ resulta inyectivo. Luego, por el Teorema 4.1.2

$$g_{n,D} \in \mathrm{co}\{g_I :\ I \in J_n(\mathcal{F})\},$$

donde $J_n(\mathcal{F}) = \{I \in J(\mathcal{F}) :\ I \in \{1, \ldots, n\}\}$. ■

Capítulo 6

Complemento de Schur generalizado

En 1947, M.G. Krein [81] probó la existencia de un máximo (con respecto al orden usual) del conjunto $\mathcal{M}(A, \mathcal{S}) = \{C \in L(\mathcal{H})^+ : C \leq A\ ,\ R(C) \subseteq \mathcal{S}\}$. Krein usó este operador extremal en su teoría de extensión de operadores simétricos. El lector interesado puede ver el trabajo de Yu. L. Smul'jian [115] para más resultados en direcciones similares.

Varios años más tarde, W. N. Anderson Jr. [4] redescubrió, para espacios de dimensión finita, la existencia de este máximo que denotaremos $\Sigma\,(A, \mathcal{S})$ y llamaremos operador cortocircuito de A respecto de $\mathcal{S}$. Antes de esto, W. N. Anderson y R. J. Duffin [1] habían desarrollado la operación binaria denominada suma paralela: si $A, B \in L(\mathbb{C}^n)^+$ la suma paralela $A : B$ está definida por la fórmula

$$A : B = A(A + B)^\dagger B.$$

P. Fillmore y J. P. Williams [55] definieron la suma paralela de operadores positivos acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y extendieron muchos de los resultados de Anderson y Duffin. Debe mencionarse que su definición está basada en el teorema de factorización de Douglas (Teorema 2.1.1). Anderson y G. E. Trapp [5] definieron $\Sigma\,(A, \mathcal{S})$ para un operador positivo A sobre $\mathcal{H}$ y un subespacio cerrado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$, y probaron que $\Sigma\,(A, \mathcal{S})$ puede ser definido por medio de sumas paralelas y recíprocamente: si P es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}$, entonces $A : nP$ converge a $\Sigma\,(A, \mathcal{S})$ en la topología inducida por la norma de $L(\mathcal{H})$; y para $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, $A : B$ puede definirse como el operador cortocircuito de $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})^+$ respecto al subespacio $\mathcal{H} \oplus \{0\}$. Este es el enfoque que nosotros usaremos en este trabajo. El operador de cortocircuito no es otra cosa que una manifestación más del denominado complemento de Schur: si M es la matriz cuadrada de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde A y D son bloques cuadrados y D es inversible, el complemento de Schur clásico de D en M es $A - BD^{-1}C$ (ver [27], [35] y [102] para más resultados, aplicaciones y generalizaciones de esta noción). T. Ando [6] propuso una generalización del complemento de Schur que se encuentra más cercana a la idea de operadores cortocircuitos. Si A es una matriz compleja de $n \times n$ y $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$, A se dice **$\mathcal{S}$-complementable** si existen matrices M_r and M_l tales que $PM_r = M_r$, $M_lP = M_l$, $PAM_r = PA$ y $M_lAP = AP$. (Aquí P es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}$). Se tiene que $AM_r = M_lAM_r = M_lA$ y AM_r no dependen de la elección particular de M_r y M_l; Ando denominó $A_{\mathcal{S}} = AM_r$ la compresión de Schur $A_{/\mathcal{S}} = A - A_{\mathcal{S}} = A - AM_r$ el complemento de Schur de A con respecto a $\mathcal{S}$. El observó que, si A es una matriz positiva de $n \times n$ y $\mathcal{S}$ es el subespacio generado por los $n-k$ últimos vectores de la base canónica, entonces $A_{/\mathcal{S}}$ posee la forma

$$\begin{pmatrix} A - BD^{\dagger}C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto, su definición extiende la clásica de complementos de Schur. D Carlson y E. V. Haynworth [28] observaron que una construcción similar podía realizarse comenzando con $A \in C^{n\times m}$ y subespacios $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^n$ y $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^m$. Ellos definieron y estudiaron la noción de operadores complementables respecto al par $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Como Anderson y Duffin remarcaron en [1], la impedancia de una una red resistiva pura es una matriz positiva. Para estudiar redes con componentes inductivos y/o capacitivos, la suma paralela y la operación de cortocircuito deben ser extendidas a matrices y operadores no necesariamente positivos. C. R. Rao y S. K. Mitra [99] definieron y estudiaron la suma paralela de matrices de $m \times n$ y Mitra [97] usó sus resultados para definir una suerte de operador cortocircuito bilateral respecto a dos subespacios, uno en $\mathbb{C}^n$ y el otro en $\mathbb{C}^m$. Una característica en común en ambas extensiones es el uso de inversas generalizadas. Debe mencionarse que pueden aplicarse a problemas de regresión lineal [97], [98] y [95, Appendix], como así también a problemas de identificación [92] y [93].

A continuación resumiremos el contenido de este capítulo. En la primer sección estudiaremos la noción de *complementabilidad* en espacios de Hilbert y definimos el concepto de *complementabilidad débil* (ver Definición 6.1.5). También probamos en esta sección las propiedades básicas de las ternas complementables (débiles o no) y exhibimos algunos criterios para cada clase de complementabilidad. En la siguiente sección, bajo ciertas condiciones de complementabilidad entre el operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y los subespacios $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$, definimos el complemento de Schur bilateral $\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, y estudiamos las propiedades usuales de esta operación. Al igual que Mitra [94] probó para espacios finito dimensionales, nosotros demostramos que $\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es el máximo de cierto conjunto con respecto a cierto orden (denominado orden menos) en $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. El resto del capítulo está dedicado a las nociones de suma y resta paralela de operadores y su relación con el complemento de Schur bilateral. La suma paralela es definida siguiendo la idea de Anderson y Trapp: dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, diremos que A y B son **débilmente sumables en paralelo (resp. sumables en paralelo)** si la terna $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \in L\big(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2\big)$, $\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}$, $\mathcal{H}_2 \oplus \{0\}$ es débilmente complementable (resp. complementable). En este caso, definimos la **suma paralela** de A y B, denotada por $A : B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} A : B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \Big/ \ (\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\}) \ .$$

Estudiamos las propiedades de esta operación. Nuevamente, bajo ciertas hipótesis de sumabilidad, todas las propiedades del caso finito dimensional son recuperadas en nuestro contexto. Luego, definimos la noción de resta paralela, damos condiciones que aseguran su existencia y demostramos que puede expresarse en términos de la suma paralela, lo cual nos permite trasladar las propiedades de la suma a la resta paralela directamente. Finalmente, en la última sección extendemos al caso bilateral algunas conocidas fórmulas del complemento de Schur (operador cortocircuito) en términos de la suma y la resta paralela mostrando que, como para operadores positivos, estas operaciones pueden definirse una en termino de la otra.

6.1 Operadores complementables

La siguiente definición, atribuida a Carlson y Haynsworth [28], es una extensión de una definición dada por Ando para el caso en que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ (ver [6]). Recordamos al lector que en este trabajo el término proyección está reservado para los operadores idempotentes, mientras que proyección ortogonal es usado para aquellas proyecciones que además son autoadjuntas.

Definición 6.1.1. Dadas dos proyecciones $P_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $P_l \in L(\mathcal{H}_2)$, un operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se dice (P_r, P_l)-complementable si existen operadores $M_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $M_l \in L(\mathcal{H}_2)$ tales que

1. $(I - P_r)M_r = M_r\,, \quad (I - P_l)AM_r = (I - P_l)A,$
2. $(I - P_l)M_l = M_l \quad$ y $\quad M_lA(I - P_r) = A(I - P_r).$

Más adelante probaremos que esta noción sólo depende de las imágenes de los proyectores P_r y P_l. Al igual que en el caso finito dimensional, se tienen las siguientes caracterizaciones alternativas de la complementabilidad.

Proposición 6.1.2. *Sean $P_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $P_l \in L(\mathcal{H}_2)$ dos proyecciones cuyos rangos son $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ respectivamente. Dado $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es (P_r, P_l)-complementable.*
2. *$R(A_{21}) \subseteq R(A_{22})$ y $R(A_{12}^*) \subseteq R(A_{22}^*)$.*
3. *Existen dos proyecciones $\widehat{P} \in L(\mathcal{H}_1)$ y $\widehat{Q} \in L(\mathcal{H}_2)$ tales que :*

$$R(\widehat{P}^*) = \mathcal{S} \qquad R(\widehat{Q}) = \mathcal{T} \qquad R(A\widehat{P}) \subseteq \mathcal{T} \qquad y \qquad R((\widehat{Q}A)^*) \subseteq \mathcal{S}. \tag{6.1}$$

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$: Por la definición 6.1.1 se tiene que la descomposición matricial del operador M_r que inducen los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ tiene la forma

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} & M_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}.$$

Luego $A_{21} = A_{22}(M_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}})$, y por el teorema 2.1.1, $R(A_{21}) \subseteq R(A_{22})$. Un argumento similar muestra que $R(A_{12}^*) \subseteq R(A_{22}^*)$.

$2 \Rightarrow 3$: Sean E y F las soluciones reducidas de las ecuaciones $A_{21} = A_{22}X$ y $A_{12}^* = A_{22}^*X$, respectivamente. Notemos que $E \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$ y $F \in L(\mathcal{T}^\perp, \mathcal{T})$. Si definimos

$$\widehat{P} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -E & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \in L(\mathcal{H}_1) \qquad \text{y} \qquad \widehat{Q} = \begin{pmatrix} I & -F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\perp \end{array} \in L(\mathcal{H}_2)\ ,$$

cuentas no muy difíciles muestran que $\widehat{P}$ y $\widehat{Q}$ satisfacen todas las condiciones de (6.1).

$3 \Rightarrow 1$: Definamos $M_r = I - \widehat{P}$ y $M_l = I - \widehat{Q}^*$. Entonces, $R(M_r) = \mathcal{S}^\perp$ y $R(M_l) = \mathcal{T}^\perp$, por ende se satisfacen las condiciones 1. y 3. de la definición 6.1.1. Por otro lado,

$$(I-Q)AM_r = (I-Q)A(I-\widehat{P}) = (I-Q)A - (I-Q)A\widehat{P} = (I-Q)A, \quad \text{y}$$

$$M_lA(I-P) = (I-\widehat{Q}^*)A(I-P) = A(I-P) - \widehat{Q}^*A(I-P) = A(I-P).$$

Esto muestra que las condiciones 2. y 4. de la Definición 6.1.1 también se satisfacen. ■

La siguiente caracterización ha sido considerada en [45] para operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert abstractos.

Proposición 6.1.3. *Sean $P_r \in L(\mathcal{H}_1)$ y $P_l \in L(\mathcal{H}_2)$ dos proyecciones cuyos rangos son $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, respectivamente, y sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es (P_r, P_l)-complementable.*
2. *$\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp + A^{-1}(\mathcal{T})$ y $\mathcal{H}_2 = \mathcal{T}^\perp + A^{*-1}(\mathcal{S})$.*
3. *$c_0\left[\mathcal{S}, \overline{A^*(\mathcal{T}^\perp)}\right] < 1$ y $c_0\left[\mathcal{T}, \overline{A(\mathcal{S}^\perp)}\right] < 1$.*

Demostración.
$1 \iff 2$: Supongamos que A es (P_r, P_l)-complementable. Por la Proposición 6.1.2, existe una proyección P tal que $R(P^*) = \mathcal{S}$ y $R(AP) \subseteq \mathcal{T}$. Entonces, $N(P) = \mathcal{S}^\perp$ y $R(P) \subseteq A^{-1}(\mathcal{T})$. Luego $\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp + A^{-1}(\mathcal{T})$.
Reciprocamente, supongamos que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp + A^{-1}(\mathcal{T})$ y definamos $\mathcal{N} = \mathcal{S}^\perp \cap A^{-1}(\mathcal{T})$. Entonces $\mathcal{H}_1 = \mathcal{S}^\perp \oplus (A^{-1}(\mathcal{T}) \ominus \mathcal{N})$. Sea $\widehat{P}$ la proyección oblicua sobre $A^{-1}(\mathcal{T}) \ominus \mathcal{N}$ paralela a $\mathcal{S}^\perp$. Luego, $R(\widehat{P}^*) = N(\widehat{P})^\perp = R(I-\widehat{P})^\perp = \mathcal{S}$, y $R(A\widehat{P}) \subseteq \mathcal{T}$ pues $R(\widehat{P}) = A^{-1}(\mathcal{T}) \ominus \mathcal{N}$.
Un razonamiento similar muestra que la existencia de una proyección Q tal que $R(Q) = \mathcal{T}$ y $R((QA)^*) \subseteq \mathcal{S}$ es equivalente a la identidad $\mathcal{H}_2 = \mathcal{T}^\perp + A^{*-1}(\mathcal{S})$.
$2 \iff 3$: Es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.2.3 (item 3) y la identidad $A^*(\mathcal{T}^\perp)^\perp = A^{-1}(\mathcal{T})$. ■

Observación-Definición 6.1.4. La Proposición 6.1.3, como así también la Proposición 6.1.2, muestran que la noción de (P_r, P_l)-complementabilidad depende solamente de los subespacios $\mathcal{S} = R(P_l)$ y $\mathcal{T} = R(P_r)$. Por esta razón, de aquí en adelante diremos que un operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-**complementable** en vez de (P_r, P_l)-complementable. ▲

Sea $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dado un operador positivo $A \in L(\mathcal{H})$, si $A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S},\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S},\mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$, como hemos visto en la Proposición 2.1.4, la inclusión $R(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}}) \subseteq R\big((A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^{1/2}\big)$ siempre se verifica. Si el subespacio $\mathcal{S}$ posee dimensión finita, como

$$R(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}) = R\big((A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^{1/2}\big) = \overline{R(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})}, \tag{6.2}$$

resulta que el operador A es automaticamente $(\mathcal{S}, \mathcal{S})$-complementable. Sin embargo, en general, la serie de identidades descritas en (6.2) sólo se verifican si $A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}$ posee rango cerrado. Es por esta razón que resulta más o menos natural considerar la siguiente noción más débil de complementabilidad:

Definición 6.1.5. Sean $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$ subespacios cerrados. Diremos que un operador $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-**débilmente complementable** si

$$R(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}}) \subseteq R(|(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}) \quad \text{y} \quad R((A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^*) \subseteq R(|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2})\ ,$$

Observación 6.1.6. Observar que, por el Corolario 2.1.2, $R(|(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|) = R(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})$ y $R(|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|) = R\big((A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*\big)$. Por lo tanto, la noción de complementabilidad que acabamos de definir es en efecto más débil que la introducida anteriormente en la definición 6.1.1. Si $R(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})$ es cerrado, entonces ambas nociones coinciden. ▲

Una consecuencia inmediata del teorema 2.1.1 permite obtener las siguientes caracterizaciones de la complementabilidad débil.

Proposición 6.1.7. *Dado $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, y dos subespacios cerrados $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$,$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$, entonces son equivalentes:*

1. *A es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-débilmente complementable.*

2. *Si $A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp} = U|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|$ es la descomposición polar de $A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}$, entonces las ecuaciones*

$$A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} = |(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}UX \quad \text{y} \quad (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^* = |A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2}Y$$

tienen solución.

3. $\displaystyle\sup_{x\in\mathcal{S}} \frac{\|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}}\ x\|^2}{\langle\, |(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|\ x,\ x\,\rangle} < \infty$ *y* $\displaystyle\sup_{y\in\mathcal{T}} \frac{\|(A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^*\ y\|^2}{\langle\, |A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|\ y,\ y\,\rangle} < \infty.$

6.2 Complemento de Schur

Con el objeto de motivar la definición que daremos del complemento de Schur, recordemos que si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$, Anderson y Trapp [5] probaron que si $A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S},\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S},\mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$ entonces

$$\Sigma\left(\mathcal{S}, A\right) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S},\mathcal{S}} - C^*C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde C es la solución reducida de $(A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^{1/2}X = A_{\mathcal{S}^\perp,\mathcal{S}}$. Luego, parece natural extender la noción de complemento de Schur (u operador cortocircuito como lo denominaban Anderson y Trapp) del siguiente modo.

Definición 6.2.1. Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$ dos subespacios cerrados de modo que A es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-débilmente complementable. Si U es la isometría parcial de la descomposición polar de $A_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ y denotamos por medio de F y E a las soluciones reducidas de las ecuaciones

$$A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} = |(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}UX \quad \text{y} \quad (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^* = |A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2}X$$

respectivamente, entonces el **complemento de Schur bilateral** de A respecto de los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ es

$$\Sigma\left(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}\right) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} - F^*E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 6.2.2. Si $A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}$ tiene rango cerrado, entonces

$$\Sigma\left(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}\right) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} - A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp}(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^\dagger A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. ▲

En la siguiente proposición enumeramos algunas propiedades básicas del complemento de Schur bilateral que son consecuencia inmediata de la definición. Con el objeto de simplificar los enunciados y evitar repeticiones innecesarias, de aquí en más asumiremos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$ son subespacios cerrados dados y que A es un operador de $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ cuya representación matricial respecto a los subespacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ está dada por $\begin{pmatrix} A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} & A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} & A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$.

Proposición 6.2.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-débilmente complementable. Entonces:*

1. *$\forall \alpha \in \mathbb{C}$, αA es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-débilmente complementable, y $\Sigma\left((\alpha A), \mathcal{S}, \mathcal{T}\right) = \alpha(\Sigma\left(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}\right))$.*

2. *A^* es $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$-débilmente complementable, y $(\Sigma\left(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}\right))^* = \Sigma\left((A^*), \mathcal{T}, \mathcal{S}\right)$.*

3. *$\Sigma(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ es $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-débilmente complementable y $\Sigma(\Sigma(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{S},\mathcal{T}) = \Sigma(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$.*

4. *Si $A = A^*$ (resp. $A \geq 0$) y $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, entonces $\Sigma(A,\mathcal{S},\mathcal{S})$ es autoadjunto (resp. positivo semidefinido).*

La siguiente Proposición es una extensión a nuestro contexto de un resultado demostrado por Butler y Morley en [25]. Comenzaremos con un lema técnico. Recordemos que bola unitaria cerrada de un espacio de Hilbert es débilmente compacta de acuerdo al teorema de Alauglu (Proposición 1.1.4). Más aún, como esta topología es metrizable en espacios separables, toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Lema 6.2.4. *Sean $A,B \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ tales que $R(A^*) \subseteq R(|B|^{1/2})$. Supongamos que existe una sucesión $\{y_n\}$ en $\mathcal{H}_1$, $d \in \mathcal{H}_2$ y un número positivo M que satisfacen*

$$Ay_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} d\ , \quad By_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} 0\ , \quad \text{and} \quad \langle\, |B|y_n, y_n \,\rangle \leq M.$$

Entonces $d = 0$.

Demostración. Sea $a_n = |B|^{1/2}y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\|a_n\|^2 = \langle\, |B|y_n, y_n\,\rangle \leq M$. Por las observaciones previas, sabemos que existe $z \in \mathcal{H}_2$ y una subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la cual haciendo abuso de notación continuaremos denotando por medio $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$ débilmente. Sea $B = U|B|$ la descomposición polar de B. Como $By_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $B = (U|B|^{1/2})|B|^{1/2}$, se tiene que $z \in N(|B|^{1/2})$. Sea C la solución reducida de $A^* = |B|^{1/2}X$. Puesto que $Ay_n \xrightarrow[n\to\infty]{} d$, se tiene que $C^*z = d$. Luego, como $N(|B^{1/2}|) \subseteq N(C^*)$, concluimos que $d = 0$. ∎

Proposición 6.2.5. *Si $A \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-débilmente complementable, entonces, dado $x \in \mathcal{S}$ existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}^\perp$ y un número positivo M tal que*

$$A\begin{pmatrix} x \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Sigma(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \langle\, |A_{22}|y_n,\ y_n\,\rangle \leq M\ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Reciprocamente, si existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}^\perp$, $d \in \mathcal{T}$, y un número positivo M tal que

$$A\begin{pmatrix} x \\ z_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \langle\, |A_{22}|z_n,\ z_n\,\rangle \leq M, \tag{6.3}$$

entonces $\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \Sigma(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Demostración. Sean U la isometría de la descomposición polar de $A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}$ y sean E y F las soluciones reducidas de las ecuaciones

$$A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}} = |(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2}UX \quad \text{y} \quad (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^* = |A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2}X\ ,$$

respectivamente. Como $R(E) \subseteq \overline{R(U^*|(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2})} = \overline{R(|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2})}$, dado $x \in \mathcal{H}_1$ hay una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -Ex$. Entonces

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}}\; x + A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}\; y_n &= A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}}\; x + U\,|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2}|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n \\ &= A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}}\; x + |(A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^*|^{1/2} U(|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{y} \\ A_{\mathcal{T},\mathcal{S}}\; x + A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp} y_n &= A_{\mathcal{T},\mathcal{S}}\; x + F^*(|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n) \\ &= A_{\mathcal{T},\mathcal{S}}\; x + F^*(|A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}|^{1/2} y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\,(x). \end{aligned}$$

Finalmente, dado que la sucesión $\{|A_{22}|^{1/2} y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \langle\, |A_{22}| y_n,\, y_n \,\rangle < \infty$.

Reciprocamente, supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}^\perp$ la cual satisface (6.3). Si $w_n = y_n - z_n$, entonces $\langle\, |A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}| w_n,\, w_n \,\rangle \le K$. Por otro lado,

$$A_{\mathcal{T},\mathcal{S}}\; x + A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp}\; z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} d \quad \text{y} \quad A_{\mathcal{T},\mathcal{S}}\; x + A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp}\; y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\,.$$

En consecuencia, $A_{12}\, w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} d - \Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\,(x)$. Analogamente obtenemos que

$$A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp}\; w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto, usando el Lema 6.2.4, resulta que $d = \Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\,(x)$. ∎

Corolario 6.2.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-débilmente complementable. Entonces*

$$R(A)\cap\mathcal{T} \subseteq \quad R(\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})) \quad \subseteq \overline{R(A)}\cap\mathcal{T} \tag{6.4}$$
$$R(A^*)\cap\mathcal{S} \subseteq \quad R((\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T}))^*) \quad \subseteq \overline{R(A^*)}\cap\mathcal{S} \tag{6.5}$$

En particular, $R(\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})) = R(A)\cap\mathcal{T}$ y $R((\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T}))^*) = R(A^*)\cap\mathcal{S}$ si $R(A)$ es cerrado.

Demostración. En primer lugar demostraremos que $R(\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})) \subseteq \overline{R(A)}\cap\mathcal{T}$. Claramente, por definición, $R(\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})) \subseteq \mathcal{T}$. Por otro lado, dado $x \in \mathcal{H}_1$, por la Proposición 6.2.5, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}^\perp$ tal que $A\begin{pmatrix} Px \\ y_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego $R(\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})) \subseteq \overline{R(A)}$.

Para probar que $R(A)\cap\mathcal{T} \subseteq R(\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T}))$, tomemos $x \in R(A)\cap\mathcal{T}$, y sea $z \in \mathcal{H}_1$ tal que $Az = x$. Si P es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{S}$, entonces $A\begin{pmatrix} Pz \\ z - Pz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, y, por la Proposición 6.2.5, obtenemos que $\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\,(Pz) = x$. Las inclusiones relativas a $\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ se deducen del mismo modo, o bien, usando que $\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})^* = \Sigma\,(A^*,\mathcal{T},\mathcal{S})$ (ver Proposición 6.2.3). ∎

A continuación, y hasta el final de esta sección, estudiaremos el complemento de Schur bilateral de un operador A respecto de un par de subespacios $(\mathcal{S},\mathcal{T})$ en el caso particular donde operador A es $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-complementable.

Proposición 6.2.7. *Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable, entonces, para cada $x \in \mathcal{S}$ existe $y \in \mathcal{S}^\perp$ tal que*

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Más aún, existen proyecciones $P \in L(\mathcal{H}_1)$ y $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ de modo que

$$R(P^*) = \mathcal{S}\ , \quad R(Q) = \mathcal{T} \qquad \text{and} \qquad QA = AP = \Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})\ . \tag{6.6}$$

Demostración. Por la Proposición 6.1.2, existe una proyección $P \in L(\mathcal{H}_1)$ tal que $R(P^*) = \mathcal{S}$ y $R(AP) \subseteq \mathcal{T}$. La descomposición matricial de P con respecto a $\mathcal{S}$ es $\begin{pmatrix} I & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}$, donde I es la identidad en $\mathcal{S}$ y $E \in L(\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp)$. Si $x \in \mathcal{S}$ e $y = Ex$, entonces $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = AP\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}$. Si $z_n = y$ $\forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface (6.3). Luego, por la Proposición 6.2.5, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $AP = \Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. Análogamente puede probarse que existe una proyección $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ con $R(Q) = \mathcal{T}$ tal que $QA = \Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ ■

Observación 6.2.8. El hecho de que existan proyecciones $P \in L(\mathcal{H}_1)$ y $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ que satisfacen $AP = QA = \Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ fue demostrado para operadores positivos en [45]. En dicho trabajo, el papel de P lo jugan las proyecciones A-autoadjuntas. ▲

Corolario 6.2.9. *Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable, entonces*

$$R(\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = R(A) \cap \mathcal{T} \quad y \quad N(\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = \mathcal{S}^\perp + N(A).$$

Demostración. Por el Corolario 6.2.6, se tiene que $R(A) \cap \mathcal{T} \subseteq R(\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))$ y

$$\mathcal{S}^\perp + N(A) \subseteq \left(\mathcal{S} \cap \overline{R(A^*)}\ \right)^\perp \subseteq R(\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})\ ^*)^\perp = N(\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})).$$

Por otro lado, sean $P \in L(\mathcal{H}_1)$ y $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ proyecciones que satisfacen la ecuación (6.6). Luego, $R(\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = R(AP) \subseteq R(A)$, y

$$N(\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) = N(AP) = N(P) \oplus \Big(R(P) \cap N(A)\Big) \subseteq \mathcal{S}^\perp + N(A),$$

pues $N(P) = R(P^*)^\perp = \mathcal{S}^\perp$. ■

Observación 6.2.10. Si $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable, entonces, por el Corolario 6.2.9, los subespacios $\mathcal{S}^\perp + N(A)$, $\mathcal{S} + N(A)^\perp$, $\mathcal{T}^\perp + R(A)^\perp$ y $\mathcal{T} + \overline{R(A)}$ son cerrados. Más aún, si $R(A)$ es cerrado, entonces, por la Proposición 1.2.3, $A(\mathcal{S}^\perp)$, $A^*(\mathcal{T}^\perp)$, y $R(A_{22})$ también son cerrados. Por lo tanto, en el caso particular de operadores con rango cerrado, los métodos basados en el uso de inversas generalizadas pueden usarse. No obstante, los nuestros no sólo se aplican a operadores cuyos rangos no son cerrados, sino que también, permiten obtener la mayoría de las propiedades conocidas del complemento de Schur bajo la hipótesis de complementabilidad. ▲

El orden parcial menos. En [94], Mitra probó (para matrices en $\mathbb{C}^{m\times n}$) que $\Sigma\,(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ es el único máximo del conjunto

$$\mathcal{M}^-(A,\mathcal{S},\mathcal{T}) = \Big\{C \in \mathbb{C}^{m\times n}:\ C \leq^- A,\ \ R(C) \subseteq \mathcal{T} \quad \text{y} \quad R(C^*) \subseteq \mathcal{S}\Big\},$$

respecto al denominado orden parcial menos: $C \leq^- A$ si

$$R(C) \cap R(A-C) = \{0\} \quad \text{y} \quad R(C^*) \cap R(A^*-C^*) = \{0\}.$$

Un resultado similar puede ser obtenido en nuestro contexto. Para ello, primeramente es necesario extender la definición de orden menos a espacios de Hilbert de dimensión infinita:

Definición 6.2.11. Dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, deremos que A es menor que B respecto al orden (parcial) menos si:

$$\text{(a)}\quad c_0\left[\,\overline{R(A)},\ \overline{R(B-A)}\,\right] < 1 \qquad \text{y} \qquad \text{(b)}\quad c_0\left[\,\overline{R(A^*)},\ \overline{R(B^*-A^*)}\,\right] < 1\ .$$

En tal caso lo denotaremos $A \leq^- B$.

Observación 6.2.12. En el caso finito dimensional, la condición (a) es equivalente a $R(A)\cap R(B-A) = \{0\}$ y la condición (b) es equivalente a $R(A^*)\cap R(B^*-A^*) = \{0\}$. Por ende, la definition 6.2.11 extiende la definición ya existente en espacios de dimensión finita. Nótese también que $A \leq^- B$ si y sólo si $A^* \leq^- B^*$, por la simetría de las condiciones (a) y (b). ▲

La siguiente Proposición provee condiciones equivalentes a la condición (a) de la definición 6.2.11, las cuales son más simples de manipular. Un resultado similar para la condición (b) puede obtenerse adjuntando.

Proposición 6.2.13. *Dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $c_0\left[\,\overline{R(A)},\ \overline{R(B-A)}\,\right] < 1$.
2. *Existe una proyección $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ tal que $R(Q) = \overline{R(A)}$ y $A = QB$.*
3. *Existe una proyección $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ tal que $A = QB$.*

Demostración.
$1 \implies 2:$ Si $\mathcal{L} = \overline{R(A)} \oplus \overline{R(B-A)}$, entonces $\mathcal{L}$ es cerrado por la Proposición 1.2.3. Sea $Q \in L(\mathcal{H}_2)$ la proyección cuyo rango es $\overline{R(A)}$ y cuyo núcleo es $N(Q) = \overline{R(B-A)} \oplus \mathcal{L}^\perp$. Entonces, $QB = Q\Big((B-A)+A\Big) = QA = A$.
$2 \implies 3:$ Es clara.
$3 \implies 1:$ Como $A = QB$ y $B - A = (I-Q)B$, se tiene que $R(A) \subseteq R(Q)$ y $R(B-A) \subseteq R(I-Q) = N(Q)$. Por lo tanto, $c_0\left[\,\overline{R(A)},\ \overline{R(B-A)}\,\right] \leq c_0\,[\,R(Q),\ N(Q)\,] < 1$. ■

Corolario 6.2.14. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$.*

1. *Si $A \leq^- B$, entonces $R(A) \subseteq R(B)$ y $R(A^*) \subseteq R(B^*)$.*

2. *La relación $\leq^-$ es un orden parcial (i.e. es reflexiva, antisimétrica y transitiva).*

3. *Si $A \leq^- B$ y B es una proyección, entonces A es también una proyección.*

Demostración. Las primeras dos afirmaciones son una consecuencia inmediata de la Proposición 6.2.13. Por otro lado, si $A \leq^- B$ y $B^2 = B$, aplicando la Proposición 6.2.13 a los operadores A y B (resp A^* y B^*) resulta que existen proyecciones P y Q tales que $R(P^*) = \overline{R(A^*)}$, $R(Q) = \overline{R(A)}$ y $A = QB = BP$. Luego $A^2 = (QB)(BP) = QBP = A$. ■

Teorema 6.2.15. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable, y sea*

$$\mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \Big\{C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : \ C \leq^- A, \quad R(C) \subseteq \mathcal{T} \quad \text{y} \quad R(C^*) \subseteq \mathcal{S}\Big\}.$$

Entonces, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \max_{\leq^-} \ \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Demostración. Por las Proposiciones 6.2.7 y 6.2.13, sabemos que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \leq^- A$. Por otro lado, por el Corolario 6.2.9, $R(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})) \subseteq \mathcal{T}$ y $R((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))^*) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.

Por otro lado, dado $C \in \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$, existe una proyección $E \in L(\mathcal{H}_2)$ tal que $C = EA$. Sea $P \in L(\mathcal{H}_1)$ una proyección como en la Proposición 6.2.7 tal que $R(P^*) = \mathcal{S}$ y $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = AP$. La inclusión $R(C^*) \subseteq \mathcal{S}$ implica que $P^*C^* = C^*$. Por lo tanto

$$C = CP = EAP = E\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

Análogamente, existe una proyección F tal que $C^* = F(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}))^*$. En consecuencia, por la Proposition 6.2.13, $C \leq^- \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. ■

Corolario 6.2.16. *Sea $A \in L(\mathcal{H})$ una proyección, la cual es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable. Entonces $N(A) + \mathcal{S}^\perp$ es cerrado,*

$$\mathcal{H} = \Big(R(A) \cap \mathcal{T}\Big) \oplus \Big(N(A) + \mathcal{S}^\perp\Big) \ ,$$

y $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es la proyección dada por esta descomposición.

Demostración. Por el Teorema 6.2.15, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \leq^- A$. Luego, por el Corolario 6.2.14, $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ es una proyección. El resto del enunciado es consecuencia del Corolario 6.2.9. ■

El siguiente Corolario fue demostrado por Ando para operadores autoadjuntos (see [6]).

Corolario 6.2.17. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, y consideremos los subespacios cerrados $\mathcal{S}, \widehat{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{T}, \widehat{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{H}_2$. Entonces, asumiendo que cada operador es complementable con respecto al correspondiente par de subespacios, se tiene que:*

$$\Sigma\left((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})), \widehat{\mathcal{S}}, \widehat{\mathcal{T}}\right) = \Sigma\left(A, \mathcal{S} \cap \widehat{\mathcal{S}}, \mathcal{T} \cap \widehat{\mathcal{T}}\right). \tag{6.7}$$

Demostración. La demostración sigue las mismas lineas que la demostración de la Proposición 2.2.5, es decir, se prueba que $\mathcal{M}^-(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}), \widehat{\mathcal{S}}, \widehat{\mathcal{T}}) = \mathcal{M}^-(A, \mathcal{S} \cap \widehat{\mathcal{S}}, \mathcal{T} \cap \widehat{\mathcal{T}})$ y luego se usa el Teorema 6.2.15. ■

6.3 Suma y resta paralelas

Suma paralela

La noción de suma paralela ha sido desarrollada por Anderson y Duffin en [1]. La extensión, en el caso positivo, a espacios de Hilbert cualesquiera fue hecha por Anderson y Trapp en [5] (ver también [95] y [96]). La clave fue usar el complemento de Schur en la definición. En esta sección, definiremos la suma paralela entre operadores siguiendo las ideas de Anderson y Trapp (ver, en particular, [5] sección 4). Aún en el caso escalar, no cualquier par de operadores es sumable. Por lo tanto, es necesario definir el concepto de operadores sumables.

Definición 6.3.1. Dados $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, diremos que A y B son **débilmente sumables en paralelo** si:

1. $R(A) \subseteq R(|A^* + B^*|^{1/2})$ y $R(B) \subseteq R(|A^* + B^*|^{1/2})$.
2. $R(A^*) \subseteq R(|A + B|^{1/2})$ y $R(B^*) \subseteq R(|A + B|^{1/2})$.

En este caso, la **suma paralela** de A y B, denotada por $A : B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, es :

$$\begin{pmatrix} A : B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma\left(\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}, \mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\} \right).$$

Observación 6.3.2. Nótese que el par (A, B) es débilmente sumable en paralelo si y sólo si el operador $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}$ es $(\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\})$-débilmente complementable. Por lo tanto, la suma paralela esta bién definida. ▲

Proposición 6.3.3. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo y sean E_A, E_B, F_A y F_B, respectivamente, las soluciones reducidas de las ecuaciones*

$$A = |A^* + B^*|^{1/2} U X , \qquad B = |A^* + B^*|^{1/2} U X, \tag{6.8}$$
$$A^* = |A + B|^{1/2} X , \qquad B^* = |A + B|^{1/2} X, \tag{6.9}$$

donde U es la isometría parcial de la descomposición polar de $A + B$. Entonces:

$$A : B = F_A^* E_B = F_B^* E_A, \tag{6.10}$$

Demostración. Notemos que $|A^* + B^*|^{1/2} U = U |A + B|^{1/2}$. Luego, sumando en (6.8) y en (6.9), obtenemos

$$|A + B|^{1/2} = E_A + E_B, \quad \text{y} \quad |A^* + B^*|^{1/2} U = F_A^* + F_B^* ,$$

por la unicidad de la solución reducida. Por cómo fue definida, $A : B = A - F_A^* E_A$. Entonces

$$A : B = A - F_A^* E_A = F_A^* (|A + B|^{1/2} - E_A) = F_A^* E_B .$$

La otra igualdad se demuestra en forma similar. ■

Corolario 6.3.4. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo. Entonces, la suma paralela es conmutativa, es decir, $A : B = B : A$.*

Corolario 6.3.5. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo y supongamos que $A+B$ tiene rango cerrado. Entonces $A : B = A - A(A+B)^\dagger A = A(A+B)^\dagger B$.*

Una de las ventajas de haber definido la suma paralela usando el complemento de Schur bilateral es que de este modo, la suma paralela hereda varias de sus propiedades. Por ejemplo, el siguiente resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 6.2.5.

Proposición 6.3.6. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores débilmente sumables en paralelo y $x \in \mathcal{H}_1$. Entonces, existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un número positivo M tal que*

$$A(x + y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} A : B(x) \ , \quad B(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -A : B(x) \ ,$$

y $\langle\, |A + B| y_n, y_n \,\rangle \le M$. Reciprocamente, si existe $d \in \mathcal{H}_2$, una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}_1$ y un número real M tal que

$$A(x + y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d \ , \quad B(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -d \ , \quad \text{y} \quad \langle\, |A + B| y_n, y_n \,\rangle \le M \ ,$$

entonces $A : B(x) = d$.

Corolario 6.3.7. *Si $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ son débilmente sumables en paralelo, entonces*

$$R(A) \cap R(B) \subseteq R(A : B) \subseteq \overline{R(A)} \cap \overline{R(B)}$$

Demostración. Dado $x \in R(A) \cap R(B)$, sean $y, z \in \mathcal{H}_1$ tales que $Ay = Bz = x$. Entonces, $A((y + z) - z) = x = B(-z)$. Por lo tanto, tomando $w = y + z$ y $y_n = -z$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 6.3.6 se tiene que $A : B(w) = x$. Esto prueba la primer inclusión. La segunda resulta como consecuencia de la Proposición 6.3.6. ∎

Operadores sumables en paralelo

Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Como ya hemos remarcado en la Observación 6.3.2, el par (A, B) es débilmente sumable en paralelo si y solamente si

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix},$$

es $(\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\})$-débilmente complementable. Desde este punto de vista, es natural considerar pares de operadores (A, B) tales que M sea $(\mathcal{H}_1 \oplus \{0\}, \mathcal{H}_2 \oplus \{0\})$-complementable. En esta subsección estudiaremos tales pares de operadores.

Definición 6.3.8. Dado $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, diremos que A y B son **sumables en paralelo** si

$$R(A) \subseteq R(A + B) \quad \text{y} \quad R(A^*) \subseteq R(A^* + B^*) \ .$$

Nótese que estas condiciones implican que $R(B) \subseteq R(A + B)$ y $R(B^*) \subseteq R(A^* + B^*)$.

Esta noción es por supuesto más fuerte que la de ser débilmente sumable en paralelo. Por ejemplo, tomemos $A, D \in L(\mathcal{H})^+$ tales que $A \leq D$ pero $R(A) \nsubseteq R(D)$. Llamemos B a la diferencia $D - A \in L(\mathcal{H})^+$. Por el Teorema 2.1.1, $R(A) \subseteq R(A^{1/2}) \subseteq R(D^{1/2}) = R((A + B)^{1/2})$. Análogamente, como $B \leq D$, entonces también $R(B) \subseteq R(D^{1/2}) = R((A + B)^{1/2})$. Sin embargo, el par (A, B) no puede ser sumable paralelo pues $R(A) \nsubseteq R(A + B) = R(D)$. Ambas nociones coinciden, por ejemplo, $A + B$ posee rango cerrado

Claramente, para operadores sumables en paralelo, algunas de las propiedades que ya hemos demostrado pueden mejorarse. Mencionemos, a modo de ejemplo, las siguientes:

Proposición 6.3.9. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operadores paralelamente sumables y sea $x \in \mathcal{H}_1$. Entonces, existe $y \in \mathcal{H}_1$ tal que $A(x + y) = A : B(x)$ y $By = -A : B(x)$. Más aún, hay proyecciones $P \in L(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1)$, $Q \in L(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ tales que $R(P^*) = \mathcal{H}_1 \oplus \{0\}$, $R(Q) = \mathcal{H}_2 \oplus \{0\}$ y*

$$Q \begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} A : B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Usar la Proposición 6.2.7. ■

Corolario 6.3.10. *Si $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ son sumables en paralelo, entonces $R(A : B) = R(A) \cap R(B)$.*

Resta paralela

Dados dos operadores $A, C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, parece natural estudiar la existencia de una solución de la ecuación $A : X = C$, es decir, si existe un operador $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ paralelamente sumable con A tal que $A : B = C$. Para operadores positivo, esta pregunta ha sido estudiada, entre otros, por Anderson, Duffin y Trapp en [2], Anderson Morley y Trapp en[106], y por Pekarev en [105]. Claramente, la ecuación $A : X = C$ puede no admitir solución. En efecto, como hemos visto en el Corolario 6.3.10 una condición necesaria es que $R(C) \subseteq R(A)$ y $R(C^*) \subseteq R(A^*)$, o, equivalentemente, $R(C - A) \subseteq R(A)$ y $R((C - A)^*) \subseteq R(A^*)$.

En esta sección, demostraremos que si $R(C - A) = R(A)$ y $R((C - A)^*) = R(A^*)$, entonces existe una solución de la ecuación $A : X = C$. Más aún, encontraremos una solución distinguida, a la cual llamaremos *resta paralela* de los operadores C y A. Dado $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, sea $\mathcal{D}_A$ el conjunto de operadores definido por

$$\mathcal{D}_A := \{C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : \ R(C - A) = R(A) \ \text{ y } \ R((C - A)^*) = R(A^*)\}.$$

Proposición 6.3.11. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Entonces la aplicación $C \mapsto C : (-A)$ es una biyección entre los conjuntos $\mathcal{D}_A$ y $\mathcal{D}_{-A}$ cuya inversa es $D \mapsto D : A$.*

Demostración. Por la definición de sumabilidad en paralelo, es claro que $-A$ y C son sumables, para todo $C \in \mathcal{D}_A$. Sea E la solución reducida de $C - A = AX$ y sea Q la proyección sobre $\mathcal{H}_2 \oplus \{0\}$ tal que $Q \begin{pmatrix} -A & -A \\ -A & C - A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C : (-A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como

$$\begin{pmatrix} C : (-A) + A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & C - A \end{pmatrix} \ \text{ y } \ \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A & C - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$\begin{pmatrix} C:(-A)+A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ -I & 0 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $R(A) \subseteq R(C:(-A)+A)$. Como la otra inclusión siempre se verifica, concluimos que $R(A) = R(C:(-A)+A)$. Análogamente se prueba que $R(A^*) = R((C:(-A)+A)^*)$. Luego, la aplicación $\Phi : \mathcal{D}_A \to \mathcal{D}_{-A}$ dada por $\Phi(C) = C:(-A)$ está bien definida.

Para probar que $\Phi^{-1}(D) = D : A$, tomemos $C \in \mathcal{D}_A$ y $x \in \mathcal{H}_1$. Existen $y, z \in \mathcal{H}_1$ tales que

$$C:(-A)(x+y) = \big(C:(-A)\big) : A(x) \ , \qquad Ay = -(C:(-A)) : A(x) \ ,$$

$$C(x+y+z) = C:(-A)(x+y) \ , \quad \text{and} \quad Az = -(C:(-A))(x+y).$$

Luego, $A(y+z) = 0$, lo cual implica que $C(y+z) = 0$. Por lo tanto

$$Cx = C(x+y+z) = C:(-A)(x+y) = (C:(-A)) : A(x) \ ,$$

lo cual completa la demostración. ■

Corolario 6.3.12. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Para cada $C \in \mathcal{D}_A$, la ecuación*

$$A : X = C$$

tiene solución. Más aún, $C:(-A)$ es la única solución que satisface

$$R(A+X) = R(A) \qquad \text{y} \qquad R((A+X)^*) = R(A^*) \ . \tag{6.11}$$

■

Definición 6.3.13. Dados $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $C \in \mathcal{D}_A$, la **resta paralela** entre los operadores A y C, denotada por $C \div A$, se define como la única solución de la ecuación $A : X = C$ que satisface (6.11).

Observación 6.3.14. Nótese que, de acuerdo a nuestra definición, se tiene que $C \div A = C:(-A)$; en particular, la mayoría de las propiedades de la suma paralela son heredadas por la resta paralela. ▲

6.4 Fórmulas para el complemento de Schur bilateral

En esta sección exhibiremos algunas fórmulas para el complemento de Schur bilateral en las cuales interviene la suma y la resta paralela. Como antes, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ denotan dos subespacios cerrados de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Comenzaremos con un Lema, el cual fue demostrado en [106] para pares de operadores positivos.

Lema 6.4.1. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable y $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ otro operador tal que los pares (A, B) y $(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}), B)$ son sumables en paralelo y la suma paralela $A : B$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable. Entonces*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B = \Sigma\big((A : B), \mathcal{S}, \mathcal{T}\big) \ .$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{S}$. Por la Proposición 6.3.9, existe $y \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(x + y) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x) \ , \quad \text{y} \quad By = -\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x).$$

Sea $z \in \mathcal{S}^{\perp}$ de modo que $A(x + y + z) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})(x + y)$. Entonces,

$$A(x + y + z) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x) \quad \text{y} \quad By = -\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x).$$

Luego, $A : B \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x)$, y por la Proposición 6.2.5, $\Sigma((A : B), \mathcal{S}, \mathcal{T})\, x = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : B(x)$. ■

El siguiente es un resultado técnico que será de gran utilidad.

Proposición 6.4.2. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable . Si $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ satisface $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, A y nB son sumables en paralelo.*

Primero demostraremos el siguiente lema.

Lema 6.4.3. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que $R(A) \subseteq \mathcal{T}$, $R(A^*) \subseteq \mathcal{S}$, $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $R(A + nB) = \mathcal{T}$ y $R((A + nB)^*) = \mathcal{S}$.*

Demostración. Basta demostrar que $\mathcal{T} \subseteq R(A + nB)$ y $\mathcal{S} \subseteq R((A + nB)^*)$, pues las otras inclusiones se verifican por hipótesis. Como $R(B^*) = \mathcal{S}$, el Teorema 2.1.1 asegura que $B^*B \geq \alpha P_{\mathcal{S}}$ para cierto $\alpha > 0$. Entonces

$$|A + nB|^2 = A^*A + n^2\, B^*B + n\,(A^*B + B^*A) \geq \Big(\alpha n^2 - n\, \|(A^*B + B^*A)\|\Big) P_{\mathcal{S}}.$$

Tomemos $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que $\alpha n^2 > n\,\|(A^*B + B^*A)\|$ para todo $n \geq n_1$. Por el Teorema 2.1.1, $\mathcal{S} \subseteq R(|A + nB|) = R((A + nB)^*)$, si $n \geq n_1$. Análogamente, se prueba que existe $\mathcal{T} \subseteq R((A + nB))$ para todo n mayor que cierto $n_2 \in \mathbb{N}$. En consecuencia, el lema queda demostrado tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. ■

Demostración de la Proposición 6.4.2. Tomemos, como en la Proposición 6.2.7, una proyección $P \in L(\mathcal{H}_1)$ tal que $AP = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ y $R(P^*) = \mathcal{S}$. Como $N(B) = \mathcal{S}^{\perp} = R(I - P)$, se tiene $B(I - P) = 0$ y $BP = B$. Por el Lemma 6.4.3 existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $R((\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) + nB)^*) = \mathcal{S}$, para todo $n \geq n_1$. Fijemos $n \geq n_1$. Dado $x \in \mathcal{H}_1$, hay un $y \in \mathcal{S}$ de modo que $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})\, x = (\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) + nB)y$. Si $z = Py + (I - P)x \in \mathcal{H}_1$, entonces

$$\begin{aligned} Ax &= A\big(Px + (I - P)x\big) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})\, x + A(I - P)x \\ &= \big(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) + nB\big)y + (A + nB)(I - P)x \\ &= (A + nB)Py + (A + nB)(I - P)x = (A + nB)z \ . \end{aligned}$$

Esto prueba la inclusión $R(A) \subseteq R(A + nB)$. Siguiendo un argumento parecido se prueba que existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $R(A^*) \subseteq R(A+nB)^*$ para $n \geq n_2$. Por ende, A y nB son sumables en paralelo para todo $n \geq \max\{n_1, \ n_2\}$. ■

Como hemos visto en la sección anterior, la suma paralela se define en términos del complemento de Schur bilateral. La siguiente proposición muestra una especie de relación inversa.

Proposición 6.4.4. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable. Si $B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ satisface $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

1. *El par $(A, \ nB)$ es sumable en paralelo para todo $n \geq n_0$.*

2. $\Sigma\,(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \lim\limits_{n\to\infty} A : (nB)$ *(en la topología inducida por la norma).*

En primer lugar, demostraremos el siguiente caso particular:

Lema 6.4.5. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que $R(A) \subseteq \mathcal{T}$, $R(A^*) \subseteq \mathcal{S}$, $R(B) = \mathcal{T}$ y $R(B^*) = \mathcal{S}$. Entonces, $A : (nB) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} A$.*

Demostración. El Lema 6.4.3 implica que existe $n_0 \geq 1$ tal que, para todo $n \geq n_0$, A y nB son sumables en paralelo. Fijemos $n \geq n_0$. Por definición, $A : (nB) = A - F_n^* E_n$, donde F_n y E_n son las soluciones reducidas de las ecuaciones

$$A^* = |A + nB|^{1/2} X \qquad \text{y} \qquad A = |(A + nB)^*|^{1/2} U_n X,$$

y U_n es la isometría parcial de la descomposición polar de $A + nB$. Mostraremos que $\|E_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (resp. $\|F_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), lo cual claramente implica la convergencia deseada. Por el Teorema 2.1.1,

$$\|E_n\| = \inf\big\{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ A^*A \leq \lambda |A + nB|\,\big\} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \ , \tag{6.12}$$

y existe $\alpha, \beta > 0$ tal que $A^*A \leq \beta P_{\mathcal{S}}$ y $B^*B \geq \alpha P_{\mathcal{S}}$. Entonces $(A^*A)^2 \leq \beta^2 P_{\mathcal{S}}$, y

$$\begin{aligned} |A + nB|^2 &= A^*A + n^2\, B^*B + n\,(A^*B + B^*A) \\ &\geq \big(\alpha n^2 - n\,\|(A^*B + B^*A)\|\big) P_{\mathcal{S}} \geq \frac{\alpha n^2 - n\,\|(A^*B + B^*A)\|}{\beta^2}\;(A^*A)^2 \ . \end{aligned}$$

Recordemos que por el teorema de Löwner, dado $r \in (0, 1]$, la función $f(x) = x^r$ es monótona de operadores, es decir si $0 \leq A \leq B$, entonces $A^r \leq B^r$. Por lo tanto, si n es suficientemente grande,

$$A^*A \leq \frac{\beta}{\big(\alpha n^2 - n\,\|(A^*B + B^*A)\|\big)^{1/2}} \;\; |A + nB| \ .$$

Luego, (6.12) implica que $\|E_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Analogamente, se prueba que $\|F_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ■

Demostración de la Proposición 6.4.4. Por la Proposición 6.4.2, tanto el par (A, nB) como el par $(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}), nB)$ son sumables en paralelo para todo n mayor que cierto n_0. Usando el Lema 6.4.1, para todo $n \geq n_0$, se tiene

$$A : nB = \Sigma((A : nB), \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : nB .$$

Entonces, por el Lema 6.4.5, haciendo que el operador $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ juegue el papel de A, obtenemos que $A : nB \xrightarrow[n \to \infty]{} \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. ■

El último resultado de esta sección relaciona la suma y resta paralela con el complemento de Schur bilateral.

Proposición 6.4.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-complementable. Entonces, dado un operador $L \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $R(L) = \mathcal{T}$ y $R(L^*) = \mathcal{S}$, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que:*

1. *A y nL son sumables en paralelo.*
2. *$\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in \mathcal{D}_{-nL}$.*
3. *$(A : nL) \div nL = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$.*

Demostración. Las primeras dos afirmación son consecuencias de la Proposición 6.4.2 y el Lema 6.4.3, respectivamente. Como $R\big((A : nL) \div nL\big) \subseteq \mathcal{T}$ y $R\big(((A : nL) \div nL)^*\big) \subseteq \mathcal{S}$ entonces, por el Lema 6.4.1,

$$(A : nL) \div nL = \Sigma\left(\big((A : nL) \div nL\big), \mathcal{S}, \mathcal{T}\right) = (\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : nL) \div nL.$$

Finalmente, por la Proposición 6.3.11,

$$(\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) : nL) \div nL = (\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \div -nL) : (-nL) = \Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \ ,$$

lo cual completa la demostración. ■

Observación 6.4.7. La Proposición 6.4.4 fue demostrada para operadores positivo por Anderson y Trapp en [5] y por Pekarev y Smul'jian en [106]. También fue estudiada por Mitra y Puri quienes probaron la fórmula $\Sigma(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \lim\limits_{n \to \infty} A : (nB)$ para matrices rectangulares (see [97]). No obstante, su demostración no puede extenderse a espacios de Hilbert de dimensión infinita pues sus técnicas involucran inversas generalizadas, que en nuestro contexto sólo existen si el operador en cuestión posee rango cerrado. Finalmente, el lector encontrará una mejora de la Proposición 6.4.6 para operadores positivos se encuentra en [106].

Capítulo 7

Complemento de Schur espectral

Dado un operador positivo A y un número $t > 0$, consideremos A^t y su complemento de Schur $\Sigma(\mathcal{S}, A^t)$. Resulta que la función $t \to \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t}$ es decreciente respeto al orden usual para $t \geq 1$. Su límite, respecto a la topología fuerte de operadores,

$$\rho(A, \mathcal{S}) = \lim_{m \to \infty} \Sigma(A^m, \mathcal{S})^{1/m},$$

es el principal objeto de estudio de este capítulo. Entre otras cosas, estudiaremos la conexión que existe entre $\rho(A, \mathcal{S})$ y el orden espectral introducido por Olson en [101], las propiedades espectrales de $\rho(A, \mathcal{S})$, como estas propiedades espectrales se vinculan con las de A y finalmente consideraremos su relación con la denominada complejidad de Kolmogorov, definida por J. I. Fujii y M. Fujii en [60].

7.1 El orden espectral

El preorden espectral fue introducido por Olson en [101] con el propósito de exhibir una relación de orden con respecto a la cual el espacio vectorial real de operadores autoadjuntos formara un retículo condicionalmente completo. En este trabajo sólo consideraremos el preorden espectral para operadores positivos, razón por la cual optamos por la siguiente definición del mismo:

Definición 7.1.1. Dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, diremos que A es menor que B respecto al orden espectral si para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $A^m \leq B^m$. En tal caso escribiremos $A \preceq B$. La relación $\preceq$ definida en $L(\mathcal{H})^+$ es un orden parcial denominado **orden espectral**.

Notación: A lo largo de este capítulo, dado un operador $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$, por medio de $\lambda_{\min}(A)$ (resp. $\lambda_{\max}(A)$) denotaremos al menor (resp. mayor) elemento del espectro de A.▲

Ejemplos 7.1.2. Dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ tales que $A \leq B$, se tiene:

1. Si $AB = BA$ entonces $A \preceq B$.

2. Si $\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B)$ entonces $A \preceq B$.

3. En $M_2(\mathbb{C})^+$, $A \preceq B$ si y sólo si $\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\min}(B)$ o bién $AB = BA$.

4. Si hay una matriz C tal que $A \leq C \leq B$, $AC = CA$ y $BC = CB$, entonces $A \preceq B$. ▲

Las siguientes caracterizaciones alternativas del orden espectral fueron demostradas por Olson en [101].

Teorema 7.1.3. *Sean $A, B \in L(\mathcal{H})^+$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $A \preceq B$,

(2) $\aleph_{[\lambda,\infty)}(A) \leq \aleph_{[\lambda,\infty)}(B)$ $(0 \leq \lambda < \infty)$,

(3) $f(A) \leq f(B)$ *para toda función continua y no decreciente* f *definida en* $[0, \infty)$.

Como consecuencia de la Proposición 1.1.12 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 7.1.4. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_{n+1} \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \overset{SOT}{\underset{n\to\infty}{\searrow}} A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_n^k \overset{SOT}{\underset{n\to\infty}{\searrow}} A^k$. En particular, $A \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente con respecto al orden espectral, existe $B \in L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_n^k \overset{\text{SOT}}{\underset{n\to\infty}{\searrow}} B$. Usando la Proposición 1.1.12 con la función $f(t) = t^{1/k}$, deducimos que $A_n \overset{\text{SOT}}{\underset{n\to\infty}{\searrow}} B^{1/k} = A$. Por lo tanto, $B = A^k$. ■

El siguiente teorema contiene más caracterizaciones alternativas del orden espectral, esta vez en espacios de dimensión finita.

Teorema 7.1.5. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$. Entonces, son equivalentes:*

1. $A \preceq B$
2. *Si $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \in \sigma(B)$ y $\lambda > \mu$, entonces $N(A - \lambda) \subseteq (N(B - \mu))^\perp$.*
3. *Existe $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ y una sucesión de matrices semidefinidas positivas $\{D_i\}_{0\leq i\leq k}$ tales que, $D_0 = A$, $D_k = B$, $D_i \leq D_{i+1}$ y $D_i D_{i+1} = D_{i+1} D_i$ $(i = 0, \cdots, k-1)$.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$: Cómo los espectros de A y B son discretos, existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

i.) f es creciente y continua.

ii.) $f(x) = 1$ si $x \geq \lambda$ y $f(x) = 0$ si $x \leq \mu$.

iii.) Si $x \in \sigma(A) \cup \sigma(B)$, entonces, $f(x) = 0$ o $f(x) = 1$.

Luego

$$N(A-\lambda) \subseteq R(f(A)) \subseteq R(f(B)) \subseteq N(B-\mu)^{\perp}.$$

$2 \Rightarrow 3$) Procedamos por inducción sobre la dimensión del espacio $\mathbb{C}^n$. Si $n=1$, es claramente verdadero.

Ahora, sea $n > 1$ y supongamos que la implicación ($2 \Rightarrow 3$) vale para matrices de $n-1 \times n-1$. Definamos el conjunto

$$N = \{\lambda \in \sigma(A) : \ \ \lambda > \lambda_{\min}(B)\}.$$

Si $N = \varnothing$, entonces, $A \leq \lambda_{\min}(B) I \leq B$. Por otro lado, si $N \neq \varnothing$, sea P la proyección sobre el subespacio $\bigoplus_{\lambda \in N} N(A-\lambda)$ y D_1 el operador definido por

$$D_1 = \lambda_{\min}(B)(I-P) + PA.$$

Como $PA = AP$, es claro que $AD_1 = D_1 A$ y $A \leq D_1$. Por otro lado, el par (D_1, B) también satisface (2). D_1 y B tienen un autovector en común x, el cual corresponde a $\lambda_{\min}(B)$ (pues $N(B - \lambda_{\min}(B)) \subseteq R(I-P)$). Sea $\mathcal{L}$ el subespacio generado por x. Entonces D_1 y B pueden representarse del siguiente modo

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(B) & 0 \\ 0 & \widehat{D_1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^{\perp} \end{array} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(B) & 0 \\ 0 & \widehat{B} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{L} \\ \mathcal{L}^{\perp} \end{array}.$$

Dado que $(\widehat{D_1}, \widehat{B})$ satisfacen (2), aplicando la hipótesis inductiva, existe una sucesión $\{\widehat{D_j}\}_{j=2,\cdots,k}$ $(k \leq n)$, tal que $\widehat{D_k} = \widehat{B}$ y $\widehat{D_j}\widehat{D_{j+1}} = \widehat{D_{j+1}}\widehat{D_j}$ $(j = 1, \cdots, k-1)$. Finalmente, la sucesión buscada es

$$\begin{aligned} D_0 &= A \\ D_j &= \begin{pmatrix} \lambda_{\min}(B) & 0 \\ 0 & \widehat{D_j} \end{pmatrix} \qquad\qquad (j = 1, \cdots, k). \end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$) Como $D_i D_{i+1} = D_{i+1} D_i$ $(i = 0, \cdots, k-1)$, se tiene que $A \preceq D_1 \preceq \cdots \preceq D_k \preceq B$. ■

Observación 7.1.6. La prueba original de la equivalencia entre (1) y (2) puede encontrarse en [101]. ▲

7.2 Definición del complemento de Schur espectral y sus propiedades básicas

En esta sección definiremos el complemento de Schur espectral y probaremos algunas de sus propiedades. Con el objeto de simplificar los enunciados, de aquí en más asumiremos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert dado, $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

Proposición 7.2.1. *La función* $t \mapsto \Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t}$, $t \in [1, \infty)$ *es decreciente.*

Demostración. Fijemos $t \geq 1$. Entonces, $\Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right) \leq A^t$. Como $0 \leq 1/t \leq 1$, del teorema de Löwner se deduce que $\Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t} \leq A$. Por otro lado, $R(\Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t}) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, por la definición de complemento de Schur, $\Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t} \leq \Sigma\left(A, \mathcal{S}\right)$. Ahora, dados $1 \leq r \leq s$, tomemos $t = s/r \geq 1$. Aplicando lo ya demostrado al operador A^r y a t, se tiene

$$\Sigma\left(A^r, \mathcal{S}\right) \geq \Sigma\left(A^{rt}, \mathcal{S}\right)^{1/t} = \Sigma\left(A^s, \mathcal{S}\right)^{r/s}.$$

Como $1/r \leq 1$, nuevamente por el teorema de Löwner, $\Sigma\left(A^r, \mathcal{S}\right)^{1/r} \geq \Sigma\left(A^s, \mathcal{S}\right)^{1/s}$. ■

Definición 7.2.2. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, el *complemento de Schur espectral* de A respecto de $\mathcal{S}$ está definido por

$$\rho\left(A, \mathcal{S}\right) = \inf_{t \geq 1} \Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t} = \lim_{t \to +\infty} \Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t},$$

donde el límite es repecto a la topología fuerte de operadores.

Ejemplos 7.2.3. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ subespacios cerrados.

1. Si $A = P_{\mathcal{T}}$, entonces $\rho\left(A, \mathcal{S}\right) = \Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t} = P_{\mathcal{S} \cap \mathcal{T}}$, para todo $t \in [1, \infty)$.
2. Si $AP_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}}A$, entonces $\rho\left(A, \mathcal{S}\right) = \Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t} = P_{\mathcal{S}}A$, para todo $t \in [1, \infty)$. ▲

En la siguiente proposición resumimos algunas propiedades simples del complemento de Schur espectral.

Proposición 7.2.4. *Sea* $A \in L(\mathcal{H})^+$ *y sean* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{T}$ *subespacios cerrados de* $\mathcal{H}$. *Entonces:*

1. $R(\rho\left(A, \mathcal{S}\right)) \subseteq \overline{R(A)} \cap \mathcal{S}$.
2. $\rho\left(cA, \mathcal{S}\right) = c\,\rho\left(A, \mathcal{S}\right)$ *para todo* $c \in [0, +\infty)$.
3. *Si* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ *entonces* $\rho\left(A, \mathcal{S}\right) \leq \rho\left(A, \mathcal{T}\right)$.
4. $\Sigma\left(\rho\left(A, \mathcal{S}\right), \mathcal{S}\right) = \rho\left(A, \mathcal{S}\right)$ *y* $\rho\left(\Sigma\left(A, \mathcal{S}\right), \mathcal{S}\right) = \Sigma\left(A, \mathcal{S}\right)$.
5. $\rho\left(\rho\left(A, \mathcal{S}\right), \mathcal{S}\right) = \rho\left(A, \mathcal{S}\right)$.
6. $\rho\left(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}\right) \leq \rho\left(\Sigma\left(A, \mathcal{S}\right), \mathcal{T}\right)$.

Demostración.

1, 2 y 3. Estas propiedades pueden deducirse fácilmente de la definición de $\rho\left(A, \mathcal{S}\right)$ y la Proposición 2.2.3.

4. Como $R\left(\Sigma\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t}\right) \subseteq \mathcal{S}$, para cada $t \geq 1$ se tiene $R\left(\rho\left(A, \mathcal{S}\right)\right) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, $\Sigma\left(\rho\left(A, \mathcal{S}\right), \mathcal{S}\right) = \rho\left(A, \mathcal{S}\right)$.

5. Es una consecuencia directa de la identidad anterior.

6. Puede deducirse las siguientes desigualdades, validas para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\Sigma\left(A^{2^m}, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}\right) \leq \Sigma\left(\Sigma\left(A^{2^m}, \mathcal{S}\right), \mathcal{T}\right) \leq \Sigma\left(\Sigma\left(A, \mathcal{S}\right)^{2^m}, \mathcal{T}\right) .$$

   donde la última desigualdad se debe a que $\Sigma\left(A^{2^m}, \mathcal{S}\right) \leq \Sigma\left(A, \mathcal{S}\right)^{2^m}$, lo cual se deduce inductivamente a partir de la Proposición 2.2.4

■

El siguiente resultado es clave para el estudio del $\rho\left(A, \mathcal{S}\right)$.

Proposición 7.2.5. *Para todo* $t \in (0, \infty)$

$$\rho\left(A, \mathcal{S}\right)^t = \rho\left(A^t, \mathcal{S}\right)$$

En particular,$\rho\left(A, \mathcal{S}\right)^t \leq A^t$.

Demostración. Primeramente demostrémoslo para $t \geq 1$. Por la Proposición 1.1.12, la función $x \to x^r$ es continua respecto a la topología fuerte de operadores si $0 \leq r \leq 1$. Luego, dado $t \in (1, \infty)$, como $st \to \infty$ si $s \to \infty$, se tiene que

$$\rho\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t} = \left(\lim_{s\to\infty} \Sigma\left((A^t)^s, \mathcal{S}\right)^{1/s}\right)^{1/t} = \lim_{s\to\infty} \Sigma\left(A^{st}, \mathcal{S}\right)^{1/st} = \rho\left(A, \mathcal{S}\right),$$

donde los límites se toman respecto a la topología fuerte de operadores. Esto prueba para $t \geq 1$ que

$$\rho\left(A^t, \mathcal{S}\right) = \rho\left(A, \mathcal{S}\right)^t . \tag{7.1}$$

Ahora, si $t \in (0, 1)$,

$$\rho\left(A^t, \mathcal{S}\right) = \left(\rho\left(A^t, \mathcal{S}\right)^{1/t}\right)^t = \rho\left((A^t)^{1/t}, \mathcal{S}\right)^t = \rho\left(A, \mathcal{S}\right)^t ,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado (7.1) para $\dfrac{1}{t} \geq 1$. ■

A partir de este resultado, surge el siguiente teorema, el cual muestra que respecto al orden espectral, el complemento de Schur espectral posee una caracterización similar a la de Krein-Anderson-Trapp para el complemento de Schur tradicional que en este trabajo adoptamos como definición.

Teorema 7.2.6. *Si*

$$\mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A) = \ \{D \in L(\mathcal{H})^+ : \ \ D \preceq A, \ \ R(D) \subseteq \mathcal{S}\}$$

entonces $\rho\left(A, \mathcal{S}\right) = \max \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$, *donde el máximo es respecto a cualquiera de los ordenes, el usual o el espectral*

Demostración. En primer lugar, notemos que $\rho\,(A,\mathcal{S}) \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S},A)$. En efecto , $\rho\,(A,\mathcal{S})^m \leq A^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ por la Proposición 7.2.5, y $R(\rho\,(A,\mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$ casi por definición.
Sea $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S},A)$. Fijado $m \in \mathbb{N}$, como $D^m \leq A^m$, se tiene $\Sigma\,(D^m,\mathcal{S})^{1/m} \leq \Sigma\,(A^m,\mathcal{S})^{1/m}$. Dado que $\Sigma\,(D^m,\mathcal{S})^{1/m} = D$, tomando $m \to \infty$ obtenemos la desigualdad $D \leq \rho\,(A,\mathcal{S})$. Esto muestra que $\rho\,(A,\mathcal{S}) = \max \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S},A)$ para el orden usual. Por otro lado, si $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S},A)$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $D^k \preceq A^k$ y $D^k \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S},A^k)$. Aplicando lo ya demostrado a A^k, se obtiene

$$D^k \leq \rho\left(A^k,\mathcal{S}\right) = \rho\,(A,\mathcal{S})^k \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego $D \preceq \rho\,(A,\mathcal{S})$. ∎

Corolario 7.2.7. *Sean A y B operadores positivos tales que $A \preceq B$ y sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ subespacios cerrados. Entonces*

1. *Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\rho\,(A,\mathcal{S}) \preceq \rho\,(B,\mathcal{T})$.*
2. *$\rho\,(\rho\,(A,\mathcal{S})\,,\mathcal{T}) = \rho\,(A,\mathcal{S}\cap\mathcal{T})$.*

Demostración. Para (1) basta notar que $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{S},A) \subseteq \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{T},B)$. En cuanto a (2), la prueba es igual a la demostración de la Proposición 2.2.5. ∎

Otra aplicación del Teorema 7.2.6 es el siguiente resultado sobre convergencia de sucesiones de complementos de Schur espectrales.

Proposición 7.2.8. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L(\mathcal{H})^+$ tal que $A_{n+1} \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{SOT} A$, y sea $\{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios tales que $\mathcal{S}_{n+1} \subseteq \mathcal{S}_n$. Entonces*

$$\rho\,(A_n,\mathcal{S}_n) \underset{n\to\infty}{\overset{SOT}{\searrow}} \rho\,(A,\mathcal{S})\,,$$

donde $\mathcal{S} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

Demostración. Por el Corolario 7.2.7, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\rho\,(A_{n+1},\mathcal{S}_{n+1}) \preceq \rho\,(A_n,\mathcal{S}_n)$. Luego, existe un operador positivo L que es el límite en la topología fuerte de operadores de la sucesión $\{\rho\,(A_n,\mathcal{S}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por un lado, la Proposición 7.1.4 implica que $A \preceq A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Como también $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_n$, se obtiene $\rho\,(A,\mathcal{S}) \leq \rho\,(A_n,\mathcal{S}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $\rho\,(A,\mathcal{S}) \leq L$. Por otro lado, para cada $n > m$ y $k \geq 1$, por el Corolario 7.2.7 y la definición de complemento de Schur espectral,

$$L \leq \rho\,(A_n,\mathcal{S}_n) \leq \rho\,(A_n,\mathcal{S}_m) \leq \Sigma\left(A_n^k,\mathcal{S}_m\right)^{1/k}. \tag{7.2}$$

Firemos ahora $k \geq 1$. Por la Proposición 7.1.4, $A_n^k \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} A^k$. En consecuencia, por la Proposición 1.1.12,

$$\Sigma\left(A_n^k,\mathcal{S}_m\right)^{1/k} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} \Sigma\left(A^k,\mathcal{S}_m\right)^{1/k}. \tag{7.3}$$

Análogamente, usando la Proposición 2.2.9, se obtiene

$$\Sigma\left(A^k,\mathcal{S}_n\right)^{1/k} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\searrow}} \Sigma\left(A^k,\mathcal{S}\right)^{1/k}. \tag{7.4}$$

Luego, juntando las ecuaciones (7.2) (7.3) y (7.4), resulta $L \le \Sigma\left(A^k,\mathcal{S}\right)^{1/k}$. Finalmente, como esta desigualdad vale para todo k, tomando límite concluimos que $L \le \rho(A,\mathcal{S})$. ■

Como muestra el siguiente ejemplo, esta última Proposición en general no es cierta si la sucesión de subespacios no es decreciente.

Ejemplo 7.2.9. Consideremos un operador A, positivo, inyectivo pero no suryectivo. Sea $\mathcal{L}$ un subespacio de dimensión infinita de $\mathcal{H}$ tal que $R(A^{1/2}) \cap \mathcal{L} = \{0\}$ y tomemos una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ contenida en $\mathcal{L}$. Llamemos $\mathcal{S}_n$ al subespacio generado por los vectores $e_1,\dots,e_n$. Entonces, $P_{\mathcal{S}_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{SOT}}{\nearrow}} I$, pero, $\rho(A,\mathcal{S}_n) = \Sigma(A,\mathcal{S}_n) = 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, porque, como fue probado en [5], $R(\Sigma(A,\mathcal{S}_n)^{1/2}) = R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S}_n = \{0\}$. ▲

7.3 Propiedades espectrales del $\rho(A,\mathcal{S})$.

En esta sección estudiaremos las características espectrales del operador $\rho(A,\mathcal{S})$. Comenzaremos con el siguiente teorema que caracteriza su resolución espectral a izquierda.

Teorema 7.3.1. Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Entonces

$$f(\lambda) = \begin{cases} \aleph_{[\lambda,\infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}} & \lambda > 0 \\ I & \lambda \le 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

es una resolución espectral a izquierda y el operador asociado a la misma es $\rho(A,\mathcal{S})$. En otras palabras, para $0 < \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\aleph_{[\lambda,\infty)}(\rho(A,\mathcal{S})) = \aleph_{[\lambda,\infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}}.$$

Demostración. Claramente f es una resolución espectral a izquierda, lo cual se deduce facilmente del hecho de que la función $\lambda \mapsto \aleph_{[\lambda,\infty)}(A)$ lo es. Sea B el operador definido por la resolución espectral f. Por el Teorema 7.1.3, claramente $B \preceq A$ y todo $D \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S},A)$ satisface que $D \preceq B$. En efecto, supongamos que $0 \le D \preceq A$ y $R(D) \subseteq \mathcal{S}$. Entonces, para $\lambda > 0$, $\aleph_{[\lambda,\infty)}(D) \le \aleph_{[\lambda,\infty)}(A)$ y

$$\aleph_{[\lambda,\infty)}(D) \le \aleph_{(0,\infty)}(D) \le P_{\overline{R(D)}} \le P_{\mathcal{S}}.$$

Por lo tanto $\aleph_{[\lambda,\infty)}(D) \le \aleph_{[\lambda,\infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}} = \aleph_{[\lambda,\infty)}(B)$. Como $\aleph_{[\lambda,\infty)}(D) = I = \aleph_{[\lambda,\infty)}(B)$ para $\lambda \le 0$, obtenemos que $D \preceq B$ por el Teorema 7.1.3. Finalmente, como

$$\aleph_{[\lambda,\infty)}(\|A\|P_{\mathcal{S}}) = \begin{cases} 0 & \|A\| < \lambda \\ P_{\mathcal{S}} & 0 < \lambda \le \|A\| \\ I & \lambda \le 0 \end{cases},$$

se deduce que $B \preceq \|A\|\ P_S$ y, en particular, $R(B) \subseteq \mathcal{S}$. Luego, por el Teorema 7.2.6,

$$B = \max \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A) = \rho\,(A, \mathcal{S})\,.$$

■

Proposición 7.3.2. *Sea* $\mu = \min \sigma\,(A)$*, entonces*

$$\mu P \leq \rho\,(A, \mathcal{S})\,.$$

En particular, si A *es inversible, entonces* $\rho\,(A, \mathcal{S})$ *es inversible si lo consideramos actuando sobre* $\mathcal{S}$*.*

Demostración. Como $\mu^m = \min \sigma\,(A^m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $\mu^m P_{\mathcal{S}} \leq \mu^m I \leq A^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego , $\mu P_{\mathcal{S}} \preceq A$ y por el Teorema 7.2.6, la Proposición queda demostrada. ■

Observación 7.3.3. Dado un operador $A \in L(\mathcal{H})^+$, entonces $r \notin \sigma\,(A)$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[r-\varepsilon,\,+\infty)}(A) = \aleph_{[r+\varepsilon,\,+\infty)}(A)$. ▲

Proposición 7.3.4. *Si se considera a* $\rho\,(A, \mathcal{S})$ *como un operador de* $\mathcal{S}$*, entonces*

$$\sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S})) \subseteq \sigma\,(A)\,.$$

Demostración. Por la Proposición 7.3.2, si $0 \notin \sigma\,(A)$ entonces $0 \notin \sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S}))$. Por otro lado, si $r > 0$ y $r \notin \sigma\,(A)$, entonces por la observación 7.3.3, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[r-\varepsilon,\,+\infty)}(A) = \aleph_{[r+\varepsilon,\,+\infty)}(A)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\aleph_{[r-\varepsilon,\,+\infty)}(\rho\,(A, \mathcal{S})) &= P_{\mathcal{S}} \wedge \aleph_{[r-\varepsilon,\,+\infty)}(A)\\ &= P_{\mathcal{S}} \wedge \aleph_{[r+\varepsilon,\,+\infty)}(A)\\ &= \aleph_{[r+\varepsilon,\,+\infty)}(\rho\,(A, \mathcal{S})).\end{aligned}$$

En consecuencia, $r \notin \sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S}))$. ■

Proposición 7.3.5. *Sea* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *una función creciente y continua a derecha. Entonces*

$$f(\rho\,(A, \mathcal{S})) = \rho\,(f(A), \mathcal{S}) \tag{7.6}$$

Demostración. Dado $\lambda \geq 0$, como f es creciente y continua a derecha, existe $\eta \geq 0$ tal que $\{\mu :\ f(\mu) \geq \lambda\} = [\eta, +\infty)$ y, para todo $C \in L(\mathcal{H})^+$, $\aleph_{[\lambda,\infty)}(f(C)) = \aleph_{[\eta,\infty)}(C)$.

Si $\eta = 0$, entonces $\aleph_{[\lambda,\infty)}(f(\rho\,(A, \mathcal{S}))) = \aleph_{[\lambda,\infty)}(\rho\,(f(A), \mathcal{S})) = I$. Si $\eta > 0$, entonces

$$\aleph_{[\lambda,\infty)}(f(\rho\,(A, \mathcal{S}))) = \aleph_{[\eta,\infty)}(\rho\,(A, \mathcal{S})) = \aleph_{[\eta,\infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}}$$

$$= \aleph_{[\lambda,\infty)}(f(A)) \wedge P_{\mathcal{S}} = \aleph_{[\lambda,\infty)}(\rho\,(f(A), \mathcal{S})),$$

Esto muestra que $f(\rho\,(A, \mathcal{S}))$ y $\rho\,(f(A), \mathcal{S})$ poseen la misma resolución espectral (a izquierda). Por ende, $f(\rho\,(A, \mathcal{S})) = \rho\,(f(A), \mathcal{S})$ ■

Corolario 7.3.6. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ un operador de rango cerrado y $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado. Entonces $R(\rho\,(A, \mathcal{S})) = R(A) \cap \mathcal{S}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $R(\aleph_{[\varepsilon,\infty)}(A)) = R(A)$. Por la Proposición 7.3.4, se tiene que $R(\aleph_{[\varepsilon,\infty)}(\rho\,(A, \mathcal{S}))) = R(\rho\,(A, \mathcal{S}))$. Finalmente, aplicando la Proposición 7.3.5 para la función $f = \aleph_{[\varepsilon,\infty)}$ y comparando los rangos de ambos términos se obtiene el resultado buscado. ∎

El resto de esta sección esta destinado a dar distintas caracterizaciones del mínimo del espectro $\sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S}))$ como operador de $L(\mathcal{S})$.

Proposición 7.3.7. *Si consideramos a $\rho\,(A, \mathcal{S})$ actuando en $\mathcal{S}$, entonces*

$$\min \sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S})) = \max\{\lambda \geq 0 : A^m \geq \lambda^m P_{\mathcal{S}},\ \forall\ m \in \mathbb{N}\}. \tag{7.7}$$

Demostración. Notemos que $A^m \geq \lambda^m P_{\mathcal{S}}$, $m \in \mathbb{N}$, siy solamente si $\lambda P_{\mathcal{S}} \preceq A$. Por otro lado, como $P_{\mathcal{S}}$ y $\rho\,(A, \mathcal{S})$ conmutan, $\lambda P_{\mathcal{S}} \leq \rho\,(A, \mathcal{S})$ si y sólo si $\lambda P_{\mathcal{S}} \preceq \rho\,(A, \mathcal{S})$, si y sólo si $\lambda P_{\mathcal{S}} \in \mathcal{M}_\rho(\mathcal{S}, A)$ si y sólo si $\lambda P_{\mathcal{S}} \preceq A$. ∎

Teorema 7.3.8. *Si consideramos a $\rho\,(A, \mathcal{S})$ actuando en $\mathcal{S}$, entonces*

$$\begin{aligned}
\min \sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S})) &= \max\{\lambda \geq 0 : P_{\mathcal{S}} \leq \aleph_{[\lambda,\infty)}(A)\} \\
&= \min\{\mu \in \sigma\,(A) :\ R(\aleph_{[\mu,\mu+\varepsilon)}(A)) \not\subseteq \mathcal{S}^\perp\ \ \forall\, \varepsilon > 0\} \qquad (7.8) \\
&= \min\{\mu \in \sigma\,(A) :\ P_{\mathcal{S}}\ \aleph_{[\mu,\mu+\varepsilon)}(A) \neq 0\ \ \forall\, \varepsilon > 0\}.
\end{aligned}$$

Demostración. Para cualquier $B \in L(\mathcal{S})^+$, $\min \sigma\,(B) = \max\{\lambda \geq 0 : \aleph_{[\lambda,\infty)}(B) = I_{\mathcal{S}}\}$. Usando esta identidad, se obtiene $\lambda_0 = \min \sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S})) = \max\{\lambda \geq 0 : P_{\mathcal{S}} \leq \aleph_{[\lambda,\infty)}(A)\}$. Luego $P_{\mathcal{S}} \leq \aleph_{[\lambda_0,\infty)}(A)$ y $P_{\mathcal{S}} \not\leq \aleph_{[\lambda_0+\varepsilon,\infty)}(A)$ para cada $\varepsilon > 0$. Entonces, $\lambda_0 \in \{\mu \in \sigma\,(A) : P_{\mathcal{S}}\ \aleph_{[\mu,\mu+\varepsilon)}(A) \neq 0\ \ \forall\, \varepsilon > 0\}$, pues si $P_{\mathcal{S}}\ \aleph_{[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)}(A) = 0$, luego

$$P_{\mathcal{S}}\ \aleph_{[\lambda_0+\varepsilon,\infty)}(A) = P_{\mathcal{S}}\ \Big(\aleph_{[\lambda_0,\infty)}(A) - \aleph_{[\lambda_0,\lambda_0+\varepsilon)}(A)\Big) = P_{\mathcal{S}}\ \aleph_{[\lambda_0,\infty)}(A) = P_{\mathcal{S}},$$

i.e. $P_{\mathcal{S}} \leq \aleph_{[\lambda_0+\varepsilon,\infty)}(A)$. Si $\lambda_0 = 0$, entonces la ecuación (7.8) es claramente cierta, pues $[\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ es un abierto del $\sigma\,(\rho\,(A, \mathcal{S}))$. Si $\lambda_0 > 0$, sea $0 \leq \lambda < \lambda_0$ y $0 < \varepsilon < \lambda_0 - \lambda$. Entonces $\lambda + \varepsilon \leq \lambda_0$. Como $\lambda_0 = \max\{\lambda \geq 0 : P_{\mathcal{S}} \leq \aleph_{[\lambda,\infty)}(A)\}$, se tiene que $P_{\mathcal{S}}\aleph_{[\lambda,\infty)}(A) = P_{\mathcal{S}}\aleph_{[\lambda+\varepsilon,\infty)}(A) = P_{\mathcal{S}}$. En consecuencia

$$P_{\mathcal{S}} = P_{\mathcal{S}}\aleph_{[\lambda,\infty)}(A) = P_{\mathcal{S}}\aleph_{[\lambda,\lambda+\varepsilon)}(A) + P_{\mathcal{S}}\aleph_{[\lambda+\varepsilon,\infty)}(A) = P_{\mathcal{S}}\aleph_{[\lambda,\lambda+\varepsilon)}(A) + P_{\mathcal{S}}.$$

Por lo tanto $P_{\mathcal{S}}\aleph_{[\lambda,\lambda+\varepsilon)}(A) = 0$, lo cual prueba la ecuación (7.8). ∎

7.3.1 Algoritmo para calcular $\rho\,(A,\mathcal{S})$ en términos de la descomposición espectral de A cuando $\dim\mathcal{H}<\infty$

A continuación exhibiremos un algoritmo que dado el espectro y los autoespacios de una matriz A nos permite calcular el espectro y los autoespacios de la matriz $\rho\,(A,\mathcal{S})$. Comencemos con el siguiente resultado que es una consecuencia inmediata del Teorema 7.3.1

Proposición 7.3.9. *Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ y $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\bigoplus_{\mu\geq\lambda}\ker(\rho\,(A,\mathcal{S})-\mu) &= \bigoplus_{\mu\geq\lambda}\ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}, \quad y\\ \bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(\rho\,(A,\mathcal{S})-\mu) &= \bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$, $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$ y supongamos que $\sigma\,(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$ $(\lambda_1<\cdots<\lambda_m)$. Como, por la Proposición 7.3.4, $\sigma\,(\rho\,(A,\mathcal{S}))\subseteq\sigma\,(A)$, resulta que $\sigma\,(\rho\,(A,\mathcal{S}))=\{\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_p}\}$. El menor autovalor de $\rho\,(A,\mathcal{S})$ está caracterizado por el Teorema 7.3.8 del siguiente modo:

$$\lambda_{i_1}=\min\{\lambda\in\sigma\,(A):\ker(A-\lambda I)\nsubseteq\mathcal{S}^\perp\}.$$

Los otros pueden ser identificados del siguiente modo

$$\begin{aligned}\lambda_{i_2}&=\min\Big\{\lambda\in\sigma\,(A):\ \lambda>\lambda_{i_1}\ \text{ y }\ \bigoplus_{\mu\geq\lambda}\ker(\rho\,(A,\mathcal{S})-\mu)\neq\bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(\rho\,(A,\mathcal{S})-\mu)\Big\},\\ &\ \ \vdots\\ \lambda_{i_{k+1}}&=\min\Big\{\lambda\in\sigma\,(A):\ \lambda>\lambda_{i_k}\ \text{ y }\ \bigoplus_{\mu\geq\lambda}\ker(\rho\,(A,\mathcal{S})-\mu)\neq\bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(\rho\,(A,\mathcal{S})-\mu)\Big\},\end{aligned}$$

y finalmente

$$\lambda_{i_p}=\min\Big\{\lambda\in\sigma\,(A):\bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(\rho\,(A,\mathcal{S})-\mu)=\{0\}\Big\}.$$

Estas fórmulas pueden reescribirse, usando la Proposición 7.3.9 del siguiente modo:

$$\lambda_{i_2} = \min\Big\{\lambda \in \sigma(A):\ \lambda > \lambda_{i_1} \ \text{ y } \ \bigoplus_{\mu\geq\lambda} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S} \neq \bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}\Big\},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{i_{k+1}} = \min\Big\{\lambda \in \sigma(A):\ \lambda > \lambda_{i_k} \ \text{ y } \ \bigoplus_{\mu\geq\lambda} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S} \neq \bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}\Big\},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{i_p} = \min\Big\{\lambda \in \sigma(A): \bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(A-\mu)\cap\mathcal{S} = \{0\}\Big\}.$$

Una vez encontrados los autovalores de $\rho(A,\mathcal{S})$ y usando la Proposición 7.3.9, los autoespacios de $\rho(A,\mathcal{S})$ pueden escribirse del siguiente modo:

$$\ker(\rho(A,\mathcal{S})-\lambda_{i_p}) = \bigoplus_{\mu\geq\lambda_{i_p}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}, \text{ y}$$

$$\ker(\rho(A,\mathcal{S})-\lambda_{i_k}) = \Big(\bigoplus_{\mu\geq\lambda_{i_k}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}\Big)\cap\Big(\bigoplus_{\mu\geq\lambda_{i_{k+1}}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}\Big)^{\perp} k=1,\dots,p-1.$$

En síntesis, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 7.3.10. *Sea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ y sea $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathbb{C}^n$. Supongamos que $\sigma(A) = \{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$ ($\lambda_1<\cdots<\lambda_m$) y sean $i_1,\cdots,i_p$ los subíndices definidos por*

i. $\lambda_{i_1} = \min\{\lambda\in\sigma(A) : \ker(A-\lambda I) \nsubseteq \mathcal{S}^{\perp}\}$

ii. *Para $k=2,\dots,p-1$ definimos λ_{i_k} como el menor autovalor de A tal que $\lambda_{i_k}>\lambda_{i_{k-1}}$ y*

$$\bigoplus_{\mu\geq\lambda_{i_k}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S} \supsetneqq \bigoplus_{\mu>\lambda_{i_k}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S} \neq 0.$$

iii. $\lambda_{i_p} = \min\Big\{\lambda\in\sigma(A) : \bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(A-\mu I)\cap\mathcal{S} = \{0\}\ \Big\}.$

Entonces,

a. $\sigma(\rho(A,\mathcal{S})) = \{\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_p}\}$

b. $\|\rho(A,\mathcal{S})\| = \lambda_{i_p} = \min\Big\{\lambda\in\sigma(A) : \bigoplus_{\mu>\lambda}\ker(A-\mu I)\cap\mathcal{S} = \{0\}\ \Big\}\}$

c. *Si P_p es la proyección ortogonal sobre el subespacio*

$$\bigoplus_{\mu\geq\lambda_{i_p}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S},$$

y P_k ($k=1,\ldots,p-1$) es la proyección ortogonal sobre el subespacio

$$\Big(\bigoplus_{\mu\geq\lambda_{i_k}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}\Big)\cap\Big(\bigoplus_{\mu\geq\lambda_{i_{k+1}}} \ker(A-\mu)\cap\mathcal{S}\Big)^{\perp},$$

se tiene que:

$$\rho\,(A,\mathcal{S})=\sum_{k=1}^{p}\lambda_{i_k}\,P_k \tag{7.10}$$

En el ejemplo 7.5.1 de la sección 7.5 mostraremos como se usa el algoritmo antes descrito para calcular la matriz $\rho\,(A,\mathcal{S})$.

7.4 El caso $\dim\mathcal{S}=1$.

Notación: Supongamos que $\dim\mathcal{S}=1$ y sea $x\in\mathcal{S}$ un vector unitario. Dado $A\in L(\mathcal{H})^{+}$, existe $\lambda,\mu\geq 0$ tal que $\rho\,(A,\mathcal{S})=\lambda P_{\mathcal{S}}$ y $\rho\,(A,\mathcal{S})=\mu P_{\mathcal{S}}$. Denotaremos $\rho\,(A,x)=\lambda$ y $\Sigma\,(A,x)=\mu$.

Observación 7.4.1. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio generado por el vector unitario $x\in\mathcal{H}$. Hay varias maneras de calcular $\rho\,(A,x)$ en términos de $\rho\,(A,\mathcal{S})$, y análogamente $\Sigma\,(A,x)$ en términos de $\Sigma\,(A,\mathcal{S})$. A continuación mencionamos algunas de ellas:

1. Por el Teorema 7.3.8,

$$\begin{aligned}\rho\,(A,x)&=\min\sigma\,(\rho\,(A,\mathcal{S}))\\&=\min\Big\{\mu\in\sigma\,(A):\ P_{\mathcal{S}}\,\aleph_{[\mu,\mu+\varepsilon)}(A)\neq 0\ \ \forall\,\varepsilon>0\Big\}\\&=\min\Big\{\mu\in\sigma\,(A):\ \aleph_{[\mu,\mu+\varepsilon)}(A)x\neq 0\ \ \forall\,\varepsilon>0\Big\}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

2. Por la Proposición 7.3.7

$$\rho\,(A,x)=\max\{\lambda\geq 0:\langle A^n\eta,\eta\rangle\geq\lambda^n|\langle x,\eta\rangle|^2\ ,\ \ \forall\,n\in\mathbb{N},\ \eta\in\mathcal{H}\}.$$

3. También $\rho\,(A,x)=\|\rho\,(A,\mathcal{S})\,x\|=\langle\rho\,(A,\mathcal{S})\,x,x\rangle$. Fórmulas similares valen para el $\Sigma\,(A,x)$.

4. Por la Proposición 7.3.4, $\rho\,(A,x)\in\sigma\,(A)$. Más aún, por el Teorema 7.3.1 (o Teorema 7.3.8),

$$\rho\,(A,x)=\max\{\lambda\in\sigma\,(A):x\in R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(A))\}. \tag{7.12}$$

▲

Proposición 7.4.2. *Sean A, $B \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces $A \preceq B$ si y sólo si $\rho\,(A, x) \le \rho\,(B, x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Demostración. Una implicación es consecuencia del Corolario 7.2.7. Por otro lado, supongamos que $\rho\,(A, x) \le \rho\,(x, B)$ para todo vector unitario $x \in \mathcal{H}$. Dado $\lambda \ge 0$ tal que $\aleph_{[\lambda,\infty)}(A) \ne 0$, sea $y \in R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(A))$. Por la ecuación (7.12), $\lambda \le \rho\,(A, y)$. Como $\rho\,(A, y) \le \rho\,(B, y)$, resulta que $y \in R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(B))$. Luego, para todo $\lambda \ge 0$, $R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(A)) \subseteq R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(B))$. Por el Teorema 7.1.3, inferimos que $A \preceq B$. ■

Proposición 7.4.3. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y sea $\mathcal{S}$ el subespacio de $\mathcal{H}$ generado por el vector unitario x. Si A es inversible, entonces para $m \in \mathbb{N}$,*

$$\Sigma\left(x, A^{2m}\right)^{1/2m} = \|A^{-m}x\|^{-1/m} = \langle A^{-2m}x, x\rangle^{-1/2m}, \tag{7.13}$$

y

$$\rho\,(A, x) = \lim_{m\to\infty} \|A^{-m}x\|^{-1/m} = \inf_{m\in\mathbb{N}} \|A^{-m}x\|^{-1/m} \tag{7.14}$$

Si $R(A)$ es cerrado,

1. *Si $x \notin R(A)$, entonces $\rho\,(A, x) = 0$.*
2. *Si $x \in R(A)$ y $B = A^\dagger$, entonces*
$$\rho\,(A, x) = \lim_{m\to\infty} \|B^m x\|^{-1/m} = \inf_{m\in\mathbb{N}} \|B^m x\|^{-1/m}.$$

Demostración. Usando el Teorema 7.3.8, el caso rango cerrado fácilmente se reduce al inversible considerando A como un operador sobre su rango. Notemos que si $R(A)$ es cerrado, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[0,\varepsilon)}(A) = P_{N(A)}$. Por lo tanto $x \notin R(A)$ implica que $P_{\mathcal{S}}\aleph_{[0,\varepsilon)}(A) \ne 0$, y, por la observación 7.4.1, se tiene que $\rho\,(A, x) = 0$.

Supongamos entonces que A es inversible. Dado $m \in \mathbb{N}$, denotemos por medio de $\eta_m = A^{-m/2}x$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 2.2.3, si $\mathcal{M}_m = A^{-m/2}(\mathcal{S})$, entonces $\Sigma\,(A^m, \mathcal{S}) = A^{m/2}P_{\mathcal{M}_m}A^{m/2}$, y

$$\Sigma\,(A^m, x) = \|\Sigma\,(A^m, \mathcal{S})\,x\| = \|A^{m/2}P_{\mathcal{M}_m}A^{m/2}x\|.$$

Nótese que $\mathcal{M}_m$ es el subespacio generado por η_m, en consecuencia $P_{\mathcal{M}_m}\rho = \|\eta_m\|^{-2}\langle\rho, \eta_m\rangle\eta_m$, $\rho \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned}\Sigma\,(A^m, x) = \|A^{m/2}P_{\mathcal{M}_m}A^{m/2}\ x\| &= \left\|A^{m/2}\Big(\|\eta_m\|^{-2}\langle A^{m/2}\ x, \eta_m\rangle\eta_m\Big)\right\| \\ &= \|\eta_m\|^{-2}\|\langle x, x\rangle\ x\| = \|\eta_m\|^{-2}.\end{aligned}$$

Luego $\Sigma\,(x, A^{2m}) = \|A^{-m}x\|^{-2}$, de modo que

$$\Sigma\left(x, A^{2m}\right)^{1/2m} = \|A^{-m}x\|^{-1/m}\ , \quad m \in \mathbb{N}.$$

La ecuación (7.14) es ahora consecuencia de la observación 7.4.1 y la definición de $\rho\,(A, \mathcal{S})$. ■

Observación 7.4.4. La ecuación (7.13) y por ende la Proposición 7.4.3, pueden también deducirse de la siguiente fórmula: dado $B \in L(\mathcal{H})^+$ inversible y $x \in \mathcal{H}$ con $\|x\| = 1$,

$$\Sigma\,(B, x) = \langle B^{-1}x, x\rangle^{-1}.$$

Esta fórmula es la versión unidimensional de la caracterización del complemento de Schur en términos de la representación en bloques de la inversa de un operador (ver [91, Lema 4.7] o para una versión matricial de este resultado ver [75]). ▲

Dados $A, B \in L(\mathcal{H})^+$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\sigma_{sh}\,(A) &= \big\{\rho\,(A, x) : \|x\| = 1\big\},\\
\sigma_{+}\,(A) &= \big\{\lambda \in \sigma\,(A) : \exists\ (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}\ en\ \sigma\,(A)\ \ con\ \mu_n > \lambda\ \ y\ \ \mu_n \underset{n\to\infty}{\searrow} \lambda\big\}\\
&= \big\{\lambda \in \sigma\,(A) : \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \aleph_{(\lambda,\lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0\}\\
\sigma_{pt}(A) &= \big\{\lambda \in \sigma\,(A) : N(A - \lambda I) \neq \{0\}\big\},
\end{aligned}$$

Notemos que $\sigma_+\,(A)$ está constituido por aquellos puntos del $\sigma\,(A)$ que son límite por la derecha de otros puntos del espectro de A, mientras que $\sigma_{pt}(A)$ es el espectro puntual de A.

Proposición 7.4.5. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces*

$$\sigma_{sh}\,(A) = \sigma_+\,(A) \cup \sigma_{pt}(A) = \big\{\lambda \in \sigma\,(A) : \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \aleph_{[\lambda,\lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0\}.$$

En particular, $\sigma_{sh}\,(A)$ es denso en $\sigma\,(A)$ y es exactamente $\sigma\,(A)$ si $\dim \mathcal{H} < \infty$.

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma\,(A)$ y $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\sigma\,(A)$ tal que $\mu_n \searrow_{n\to\infty} \lambda$. Sea $\lambda_0 = \mu_1 + 1$ y $\lambda_n = \frac{1}{2}(\mu_{n+1} + \mu_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\mu_n \in (\lambda_n, \lambda_{n-1})$, entonces $\aleph_{(\lambda_n,\lambda_{n-1})}(A) \neq 0$. Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un vector unitario $x_n \in R(\aleph_{(\lambda_n,\lambda_{n-1})}(A))$, y consideremos el vector

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{2^n}\ .$$

Por la fórmula (7.12) y la construcción de x, es claro que $\rho\,(x, A) = \lambda$, pues $\lambda = \inf_n \mu_n = \inf_n \lambda_n$. Si $\lambda \in \sigma_{pt}(A)$, basta tomar $x \in N(A - \lambda I)$ y claramente $\rho\,(A, x) = \Sigma\,(A, x) = \lambda$.

Supongamos ahora que $\lambda \in \sigma\,(A)$ pero $\lambda \notin \sigma_+\,(A) \cup \sigma_{pt}(A)$. Esto significa que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\aleph_{[\lambda,\lambda+\varepsilon)}(A) = 0$. Por lo tanto, para cada vector unitario x, es imposible que

$$\lambda = \max\{\mu \in \sigma\,(A) : x \in R(\aleph_{[\mu,\infty)}(A))\},$$

pues si $x \in R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(A))$, entonces $x \in R(\aleph_{[\lambda+\varepsilon,\infty)}(A))$. ■

Observación 7.4.6. Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ no es inversible, entonces $0 \in \sigma\,(A)$. Si el cero es un punto aislado del espectro de A, entonces A tiene rango cerrado. En consecuencia, $N(A) \neq \{0\}$. De no ser así, $\aleph_{(0,\varepsilon)}(A) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Esto muestra que $0 \in \sigma_{sh}\,(A)$. Más generalmente, para $A \in L(\mathcal{H})^+$, se tiene que $\lambda_{min}(A) = \min \sigma\,(A) \in \sigma_{sh}\,(A)$. Por otro lado, por la Proposición 7.4.5, $\|A\| \in \sigma_{sh}\,(A)$ si y sólo si $\|A\|$ es un autovalor de A.

Observación 7.4.7. Dado $A \in L(\mathcal{H})^+$, denotemos por medio de $R_0(A)$ al subespacio

$$R_0(A) = \bigcup_{\lambda > 0} R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(A)).$$

Si $R(A)$ es cerrado, entonces $R_0(A) = R(A)$, pues el cero es un punto aislado del espectro de A. Si $R(A)$ no es cerrado, entonces $R_0(A)$ está propiamente incluido en $R(A)$, pero denso en $\overline{R(A)}$. Este subespacio resulta particularmente interesante pues, por la fórmula (7.12), si $x \in \mathcal{H}$ es un vector unitario, entonces $\rho\,(A, x) \neq 0$ si y sólo si $x \in R_0(A)$. ▲

7.4.1 Complejidad de Kolmogorov

Dada una matriz inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^+$ y un vector unitario $x \in \mathbb{C}^n$, J. I. Fujii y M. Fujii [60] definieron la **complejidad de Kolmogorov** del siguiente modo:

$$K\,(A, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\langle\, A^n x, x\,\rangle)}{n} = \log \lim_{n\to\infty} \langle\, A^n x, x\,\rangle^{1/n} . \tag{7.15}$$

Usando la fórmula (7.13), se puede ver que el límite es en realidad un supremo; y se tiene la identidad

$$K\,(A, x) = \log \rho\left(A^{-1/2}, x\right)^{-2} = \log \rho\left(A^{-1}, x\right)^{-1} . \tag{7.16}$$

Usando las fórmulas (7.11) y (7.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \exp K\,(A, x) &= \min\left\{\lambda \in \sigma\,(A) : x \in R(\aleph_{(-\infty,\lambda]}(A))\right\} \\ &= \max\left\{\mu \in \sigma\,(A) :\ \aleph_{(\mu-\varepsilon,\mu]}(A)x \neq 0 \ \ \forall\, \varepsilon > 0\right\} . \end{aligned} \tag{7.17}$$

Con estas identidades en mente, lo hecho hasta aquí nos permite generalizar la noción de complejidad de Kolmogorov en dos direcciones: la primer es a espacios de Hilbert de dimensión infinita y/o subespacios no necesariemente unidimensionales; la segunda es a operadores no necesariamente inversibles.

La extensión de la complejidad de Kolmogorov, para operadores inversibles, a subespacios cerrados de dimensión mayor que uno puede realizarse a través de la ecuación (7.16). Nótese que la misma noción de complemento de Schur espectral es, en cierto sentido, una generalización de la complejidad de Kolmogorov a espacios cerrados (no necesariamente unidimensionales) de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Definida de esta forma, la extensión hereda del complemento de Schur espectral, mutatis mutandis, la mayoría de sus propiedades.

La extensión para operadores no inversibles no es tan directa. Sin embargo, las técnicas que pueden utilizarse son muy similares a las desarrolladas en la sección anterior. A continuación definiremos la complejidad de Kolmogorov para operadores no inversibles y probaremos algunas de sus propiedades.

Definición 7.4.8. Dado $x \in \mathcal{H}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$, se define

$$k(A,x) = \lim_{n\to\infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n} .$$

Observar que $k(A,x) = \exp K(A,x)$ si $K(A,x)$ está definido.

Observación 7.4.9. Sea $x \in \mathcal{H}$ y $A \in L(\mathcal{H})^+$. Entonces:

1. si $\|x\| = 1$, la sucesión $\langle A^n x, x \rangle^{1/n}$ es creciente y $\lim_{n\to\infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}$ existe para todo $x \in \mathcal{H}$,

2. $k(A,x) = k(A,ax)$ para todo $0 \neq a \in \mathbb{C}$,

3. $k(A,x) = k\big(A, \aleph_{[\lambda,\infty)}(A)x\big)$ para todo $\lambda > 0$ tal que $\aleph_{[\lambda,\infty)}(A)x \neq 0$.

En efecto, por la desigualdad de Hölder para estados (también puede apelarse a la desigualdad de Jensen, ver [15]), si $\|x\| = 1$, $p \geq 1$ y $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\langle A^p x, x \rangle^{1/p} \langle I^q x, x \rangle^{1/q} = \langle A^p x, x \rangle^{1/p} \geq \langle Ax, x \rangle .$$

Aplicando esta desigualdad a A^n con $p = (n+1)/n$, se obtiene que

$$\langle A^n x, x \rangle^{1/n} \leq \left\langle A^{n+1} x, x \right\rangle^{1/n+1} .$$

El segundo ítem es consecuencia de que $|a|^{2/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Finalmente, para demostrar el tercer ítem, supongamos que $\|x\| = 1$ y sean $x_1 = \aleph_{[\lambda,\infty)}(A)x$ y $x_2 = x - x_1$. Entonces, como $\aleph_{[\lambda,\infty)}(A)$ conmuta con A, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \langle A^n x_1, x_1 \rangle &\leq \langle A^n x_1, x_1 \rangle + \langle A^n x_2, x_2 \rangle = \langle A^n x, x \rangle \\ &\leq \langle A^n x_1, x_1 \rangle + \lambda^n \leq (1 + \|x_1\|^{-2}) \langle A^n x_1, x_1 \rangle . \end{aligned}$$

Esto muestra que $k(A,x) = k(A,\xi_1)$, pues $(1 + \|\xi_1\|^{-2})^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. ▲

Recordemos que, dado $A \in L(\mathcal{H})^+$ $R_0(A) = \bigcup_{\lambda>0} R(\aleph_{[\lambda,\infty)}(A))$.

Proposición 7.4.10. *Sea $A \in L(\mathcal{H})^+$ y $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$. Entonces $k(A,x) \neq 0$ si y sólo si $P_{\overline{R(A)}}\, x \in R_0(A)$. Más aún, la ecuación (7.17) vale en general:*

$$\begin{aligned} k(A,x) &= \min\left\{\lambda \in \sigma(A) : x \in R(\aleph_{(-\infty,\lambda]}(A))\right\} \\ &= \max\Big\{\mu \in \sigma(A) :\ \aleph_{(\mu-\varepsilon,\mu]}(A)x \neq 0 \ \ \forall\, \varepsilon > 0\Big\} \qquad (7.18) \\ &= \sup\Big\{\mu \in \sigma(A) :\ \aleph_{[\mu,\infty)}(A)x \neq 0\Big\} . \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\lambda = \sup\Big\{\mu \in \sigma(A) : \aleph_{[\mu,\infty)}(A)x \neq 0\Big\}$. Supongamos que $\mu > \lambda$. Entonces $x \in R(\aleph_{(-\infty,\mu]}(A))$, de modo que $\langle A^n x, x \rangle \leq \mu^n \|x\|^2$ para $n \in \mathbb{N}$, y $k(A,x) \leq \mu$.

Por otro lado, si $\mu < \lambda$ entonces $\aleph_{[\mu,\infty)}(A)x = \xi_1 \neq 0$, y, por la observación 7.4.9, $k(A,x) = k(A,\xi_1) \geq \mu$, pues $\langle A^n \xi_1, \xi_1 \rangle \geq \mu^n \|\xi_1\|^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $k(A,x) = \lambda$. Las otras igualdades quedan a cargo del lector. ■

Por la Proposición 7.3.4, se tiene que $\sigma_{sh}(A) \subseteq \sigma(A)$ y , por lo tanto, si A es inversible,

$$\Big\{k(A,x) : \|x\| \neq 0\Big\} = \Big\{\rho\left(A^{-1},x\right)^{-1} : \|x\| = 1\Big\} \subseteq \sigma\left(A^{-1}\right)^{-1} = \sigma(A).$$

Como veremos a continuación, la otra inclusión no es cierta en general:

Proposición 7.4.11. *Si $A \in L(\mathcal{H})^+$ es inversible, entonces*

$$\begin{aligned}\Big\{k(A,x) : \|x\| \neq 0\Big\} &= \sigma_-(A) \cup \sigma_{pt}(A) \\ &= \Big\{\lambda \in \sigma(A) : \aleph_{(\lambda+\varepsilon,\lambda]}(A) \neq 0 \ , \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \Big\},\end{aligned}$$

donde $\sigma_-(A)$ es el conjunto de puntos en $\sigma(A)$ que son límite por izquierda de alguna sucesión de $\sigma(A) \setminus \{\lambda\}$. El conjunto $\Big\{k(A,x) : \|x\| = 1\Big\}$ es denso en $\sigma(A)$.

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 7.4.5 (aplicada a A^{-1}) y de la identidad

$$\Big\{k(A,x) : \|x\| \neq 0\Big\} = \Big\{k(A,x) : \|x\| = 1\Big\} = \Big\{\rho\left(A^{-1},x\right)^{-1} : \|x\| = 1\Big\}.$$

■

Observaciones 7.4.12.

1. La proposición 7.4.11 es cierta para un $A \in L(\mathcal{H})^+$ cualquiera. La demostración es similar a la prueba de la Proposición 7.4.5, usando la ecuación (7.18) en vez de (7.12).

2. Sea $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base canónica de $\mathcal{H}$, y consideremos los operadores diagonales e inversibles $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ definidos por

$$A(e_n) = \big(2 + \frac{1}{n}\big)e_n \quad , \quad B(e_n) = \big(2 - \frac{1}{n}\big)e_n \ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Es fácil ver, usando las proposiciones 7.4.5 y 7.4.11, que $2 \notin \Big\{k(A,x) : \|x\| = 1\Big\}$ y $2 \notin \sigma_{sh}(B)$.

3. Si $C \in L(\mathcal{H})^+$, entonces $\|C\| \in \Big\{k(C,x) : \|x\| = 1\Big\}$ y $\lambda_{min}(C) \in \sigma_{sh}(C)$. Por otro lado, si A y B son como en el ejemplo anterior, entonces $\|B\| = 2 \notin \sigma_{sh}(B)$ y $\lambda_{min}(A) = 2 \notin \Big\{k(A,x) : \|x\| = 1\Big\}$.

Observación 7.4.13 (Operadores con rango cerrado). Supongamos que $A \in L(\mathcal{H})^+$ es un operador con rango cerrado. Entonces, $k(A,x)$ y $\rho(A,x)$ pueden calcularse explícitamente en términos de $\rho\left(A^\dagger, x\right)$. Más precisamente,

1. Si $x \in R(A)$ es un vector unitario, entonces, por la Proposición 7.4.3, podemos deducir que $k(A,x) = \rho\left(A^{\dagger}, x\right)^{-1}$.

2. Sea $x \in \mathcal{H} \backslash (N(A) \cup R(A))$. Por la Proposición 7.4.3, $\rho(A,x) = \rho\left(A^{\dagger}, x\right) = 0$. Por otro lado, si $P = P_{R(A)}$, entonces $P\xi \neq 0$ y

$$k(A,x) = \lim_{n\to\infty} \langle A^n Px, Px \rangle^{1/n} = k\left(A, \frac{P\xi}{\|P\xi\|}\right) = \rho\left(A^{\dagger}, \frac{P\xi}{\|P\xi\|}\right)^{-1} \neq 0.$$

7.5 Algunos ejemplos.

En primer lugar mostraremos un ejemplo donde $\rho(A,\mathcal{S})$ es calculado explícitamente.

Ejemplo 7.5.1. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix},$$

y el subespacio generado por los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$. Los autovalores de A son 4, 6 y 12, y sus autovectores son $(-1,0,1)$, $(1,1,1)$ y $(1,-2,1)$ respectivamente.

Comencemos calculando el espectro de $\rho(A,\mathcal{S})$. De acuerdo al Teorema 7.3.8 el menor autovalor de $\rho(A,\mathcal{S})$ es el mínimo elemento del espectro de A tal que

$$\ker(A - \lambda I) \not\subseteq \mathcal{S}^{\perp}.$$

Como puede ser fácilmente chequeado, este valor es 4. Cómo se explicó en la subsección 7.3.1 , el segundo autovalor de $\rho(A,\mathcal{S})$ es el menor autovalor μ de A que satisfaga

$$\mathcal{S} \cap \bigoplus_{\lambda \geq \mu} \ker(A-\lambda) \subsetneq \mathcal{S} \cap \bigoplus_{\lambda \geq 4} \ker(A-\lambda) = \mathcal{S}.$$

Este número es 6. Luego, por un argumento de dimensión, el espectro de $\rho(A,\mathcal{S})$ es $\{4,6\}$.

Usaremos la parte (d) del Teorema 7.3.10 para calcular los autovectores asociados a cada autovalor. Un autovector para el autovalor 6 es un vector no nulo en

$$\mathcal{S} \cap \operatorname{Span}\{(1,1,1),(1,-2,1)\},$$

por ejemplo, $(0,1,0)$. Por otro lado, un autovector para el autovalor 4 puede encontrarse buscando un vector en $\mathcal{S}$ ortogonal a $(0,1,0)$, por ejemplo el $(1,0,0)$. De este modo, obtenemos

$$\rho(A,\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a la Proposición 7.2.6, $\rho(A,\mathcal{S}) \preceq A$. En consecuencia, por el Teorema 7.1.5 existe matrices intermedias D_1 y D_2, tales que

a. $\rho(A, \mathcal{S}) \leq D_1 \leq D_2 \leq A$ y

b. $\rho(A, \mathcal{S})\, D_1 = D_1\, \rho(A, \mathcal{S})$, $D_1 D_2 = D_2 D_1$ y $D_2 A = A D_2$.

Siguiendo el algoritmo sugerido por la inducción usada para demostrar ($2 \Rightarrow 3$) en la Proposición 7.1.5 obtenemos

$$D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

▲

En los siguientes dos ejemplos, calculamos el espectro y las resoluciones espectrales de $\rho(A, \mathcal{S})$, en dos casos particulares:

Ejemplo 7.5.2. Sea $M_x \in L(L^2([0,1]))$ el operador definido por

$$M_x(f)(t) = tf(t),$$

y sea $\mathcal{S}$ el complemento ortogonal del subespacio de las funciones constantes. Aseguramos que $\sigma(\rho(M_x, \mathcal{S})) = [0,1]$. Como por la Proposición 7.3.4 $\sigma(\rho(M_x, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(M_x)$, es suficiente probar que $(0,1) \in \sigma(\rho(M_x, \mathcal{S}))$. Tomemos $r \in (0,1)$. Entonces, por el Teorema 7.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} R(\aleph_{[r,+\infty)}(\rho(M_x, \mathcal{S}))) &= R(\aleph_{[r,+\infty)}(M_x)) \cap \mathcal{S} \\ &= \left\{ f \in L^2([0,1]) : f|_{[0,r)} \equiv 0, \text{ y } \int_0^1 f(t)\, dt = 0 \right\} \end{aligned}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, si definimos $f_{r,\varepsilon}(t) = (t - r)\aleph_{[r-\varepsilon, r+\varepsilon)}(t)$, entonces

$$f_{r,\varepsilon} \in R\Big(\aleph_{[r-\varepsilon,+\infty)}(\rho(M_x, \mathcal{S}))\Big) \quad \text{but} \quad f_{r,\varepsilon} \notin R\Big(\aleph_{[r+\varepsilon,+\infty)}(\rho(M_x, \mathcal{S}))\Big),$$

lo cual muestra, por la observación 7.3.3, que $r \in \sigma(\rho(M_x, \mathcal{S}))$. ▲

Ejemplo 7.5.3. Sea $\mathcal{H} = \ell^2$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su base ortonormal canónica. Si $w = (1, 2^{-1}, 2^{-2}, \dots)$, sea $\mathcal{S}$ el complemento ortogonal del subespacio generado por w. En $L(\ell^2)^+$ consideremos el operador compacto A definido del siguiente modo:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \otimes e_n$$

donde $(x \otimes y)z = \langle z, y \rangle x$, para $x, y, z \in \mathcal{H}$. Obtendremos las descomposición espectral de $\rho(A, \mathcal{S})$. Como $\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(A)$, el espectro de $\rho(A, \mathcal{S})$ también es discreto. En realidad, $\rho(A, \mathcal{S})$ es compacto, lo cual puede deducirse fácilmente de que $\rho(A, \mathcal{S}) \preceq A$. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ los autovalores de $\rho(A, \mathcal{S})$ ordenados en forma decreciente.

Por el Teorema 7.3.1, $\lambda_1 < 1$ pues $e_1 \notin \mathcal{S}$. Sin embargo, el subespacio $\mathcal{T}$ generado por e_1 y e_2 interseca a $\mathcal{S}$, pues $\dim \mathcal{S}^\perp = 1$. Por lo tanto, $\lambda_1 = 1/2$. Más aún, por el Teorema 7.3.1,

$$\ker(\rho\,(A,\mathcal{S}) - \frac{1}{2}\ ) = \Big[\ker(A - \frac{1}{2}\ ) \oplus \ker(A-1)\Big] \cap \mathcal{S} = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}.$$

Es fácil ver que $\ker(\rho\,(A,\mathcal{S}) - \frac{1}{2}\ )$ es el subespacio generado por $f_1 = e_1 - 2e_2$. Continuando en forma similar, el subespacio generado por e_1, e_2 y e_3 interseca a $\mathcal{S}$ y la intersección tiene dimensión dos. Esto implica que $\lambda_2 = 1/3$ con multiplicidad uno. Por otro lado, para encontrar un autovector f_2 asociado a λ_2, basta buscar un vector generado por e_1, e_2 y e_3 que sea ortogonal a f_1 y a w. Tomemos, por ejemplo, $f_2 = e_1 + (1/2)e_2 - (21/2)e_3$. Continuando del mismo modo, obtenemos que

$$\sigma\,(\rho\,(A,\mathcal{S})) = \{1/n :\ n \geq 2\} \cup \{0\},$$

cada autovalor tiene multiplicidad uno, y los correspondientes autovectores son:

$$\begin{array}{lcllllllll}
f_1 & = & (1\ , & -2\ , & 0\ , & \dots & & & &) \\
f_2 & = & (1\ , & 1/2\ , & -5\ , & 0\ , & \dots & & &) \\
f_3 & = & (1\ , & 1/2\ , & 1/4\ , & 21/2\ , & 0\ , & \dots & &) \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & \\
f_n & = & (1\ , & 1/2\ , & 1/4\ , & \dots\ , & 1/2^{n-1}\ , & \frac{-(4^n-1)}{3\cdot 2^{n-2}}\ , & \dots &) \\
\vdots & & & & & & \vdots & & &
\end{array}$$

▲

Ahora exhibiremos algunos ejemplos que muestran que algunas hipótesis no pueden relajarse. Tal es el caso de las hipótesis de la Proposición 7.2.7, donde hemos probado que dado un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{H}$ y A, B en $L(\mathcal{H})^+$ tales que $A \preceq B$, entonces $\rho\,(A,\mathcal{S}) \leq \rho\,(B,\mathcal{S})$. Esta proposición puede fallar si pedimos $A \leq B$ en vez de $A \preceq B$, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.5.4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y consideremos el subespacio unidimensional $\mathcal{S}$ generado por el vector $(1,0)$. Claramente, $A \leq B$; por otro lado, $\rho\,(A,\mathcal{S}) = P_{\mathcal{S}}$ y algunos cálculos muestran que $\rho\,(B,\mathcal{S}) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,P_{\mathcal{S}} < P_{\mathcal{S}}$. ▲

En la Proposición 7.2.8, la hipótesis de que la sucesión sea decreciente respecto al orden espectral no puede reemplazarse por decreciente respecto al orden usual, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.5.5. Consideremos la siguiente sucesión de matrices:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1+1/m & 1/m \\ 1/m & 1/m \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \ , \quad m \in \mathbb{N}.$$

Es claro que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq A_{m+1} \leq A_m$, y $\lambda_{min}(A_m) \leq \langle\, A_m e_2, e_2 \,\rangle = 1/m$. Por otro lado, $A_m \xrightarrow[n\to\infty]{} P$, la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por el vector $(1, 0)$.

Sea $\mathcal{S} = R(P)$. Entonces, como $\mathcal{S}$ no reduce a las matrices A_m $\rho\,(A_m, \mathcal{S}) = \lambda_{min}(A_m)P \leq \frac{1}{m}P$, por lo que $\rho\,(A_m, \mathcal{S}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Sin embargo, $\rho\,(P, \mathcal{S}) = P$. ▲

Bibliografía

[1] W. N. Anderson Jr. y R.J. Duffin, Series and parallel addition of matrices, J. Math. Anal. Appl. 11 (1963), 576-594.

[2] W. N. Anderson Jr., R. J. Duffin, y G. E. Trapp, Parallel substraction of matrices, Proc. Nat. Acad. Sci. 69 (1972), 2530-2531.

[3] W. N. Anderson Jr., D. T. Duffin, y G. E. Trapp, Characterization of parallel substraction, Proc. Nat. Acad. Sci. 76 (1979), 3599-3601.

[4] W. N. Anderson, Shorted operators, SIAM J. Appl. Math. 20 (1971), 520-525.

[5] W. N. Anderson y G. E. Trapp, Shorted operators II, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975), 60-71.

[6] T. Ando, Generalized Schur complements, Linear Algebra Appl. 27 (1979), 173-186.

[7] E. Andruchow, G. Corach and D. Stojanoff, Geometry of oblique projections, Studia Math. 137 (1999) 61-79.

[8] J. Antezana y G. Corach, Sampling theory, oblique projections and a question by Smale and Zhou, preprint.

[9] J. Antezana, G. Corach y D. Stojanoff, Spectral shorted matrices, Linear Algebra Appl. 381 (2004), 197-217.

[10] J. Antezana, G. Corach y D. Stojanoff, Spectral shorted operators, Integral Equations Operator Theory (en prensa).

[11] J. Antezana, G. Corach y D. Stojanoff, Bilateral shorted operadtors, Linear Algebra Appl. (en prensa)

[12] J. A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz y D. Stojanoff, Weighted projections and Riesz frames, Linear Algebra Appl. 402 (2005), 367-389.

[13] J. A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz y D. Stojanoff, Nullspaces and frames, J. Math. Anal. Appl. 309 (2005), 709-723.

[14] J. A. Antezana, G. Corach, M. Ruiz y D. Stojanoff, Oblique projections and frames, Proc. Amer. Math. Soc. (en prensa).

[15] J. Antezana, P. Massey y D. Stojanoff, Jensen inequalities and majorization, preprint.

[16] E. Andruchow, G. Corach y D. Stojanoff, Geometry of oblique projections. Studia Math. 137 (1999), 61-79.

[17] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337-404.

[18] R. Balan, P. Casazza, C. Heil y Z. Landau, Deficits and excesses of frames, Advances in Computational Mathematics 18 (2003) 93-116.

[19] A. Ben-Israel y T. N. E. Greville, Generalized inverses. Theory and applications. Second edition. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 15. Springer-Verlag, New York, 2003

[20] A. Ben-Tal y M. Teboulle, A geometric property of the least squares solutions of linear equations, Linear Algebra Appl. 139 (1990), 165-170.

[21] R. Bhatia, Matrix Analysis, Berlin-Heildelberg-New York , Springer 1997.

[22] E. Y. Bobrovnikova y S.A. Vavasis, A norm bound for projections with complex weights, Linear Algebra Appl. 307 (2000), 69-75.

[23] C. A. Butler y T. D. Morley, A note on the shorted operator, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 9 (1988), 147-155.

[24] R. Bouldin; The product of operators with closed range, Tohoku Math. J. 25 (1973), 359-363.

[25] C. A. Butler y T. D. Morley, A note on the shorted operator, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 9 (1988), 147-155.

[26] S. L. Campbell y C. D. Meyer Jr., Generalized inverses of linear transformations, Corrected reprint of the 1979 original. Dover Publications, Inc., New York, 1991.

[27] D. Carlson, What are Schur complements, anyway?, Linear Algebra Appl. 74 (1986), 257-275.

[28] D. Carlson y E. V. Haynworth, Complementable and almost definite matrices, Linear Algebra Appl. 52/53 (1983), 157-176.

[29] P. G. Casazza, The art of frame theory. Taiwanese J. Math. 4 (2000), 129-201.

[30] P.G. Casazza, Characterizing Hilbert space frames with the subframe property, Illinois J. Math. 41 (1997), 648-666.

[31] P. G. Casazza y O. Christensen, Hilbert space frames containing a Riesz basis and Banach spaces which have no subspace isomorphic to c_0. J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), 940-950.

[32] P. G. Casazza y O. Christensen, Frames containing a Riesz basis and preservation of this property under perturbations. SIAM J. Math. Anal. 29 (1998), 266-278.

[33] P.G. Casazza y O. Christensen, Riesz frames and approximation of the frame coefficients, Approx. Theory Appl. N.S. 14 (1998), 1-11.

[34] P.G. Casazza, D. Han y D.R.Larson, Frames for Banach spaces, Contemp. Math. 247 (1999), 149-182.

[35] R. W. Cottle, Manifestations of the Schur complement, Linear Algebra Appl. 8 (1974), 189-211.

[36] O. Christensen, Frames and the projection method, Appl. Comput. Harmon. Anal. 1 (1993), 50-53.

[37] O. Christensen, Frames and pseudo-inverses, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), 401-414.

[38] O. Christensen, An introduction to frames and Riesz bases, Birkhäuser, Boston, 2003.

[39] O. Christensen, Frames containing a Riesz basis and approximation of the frame coefficients using finite-dimensional methods, J. Math. Anal. Appl. 199 (1996), 256-270.

[40] O. Christensen y Y. Eldar, Oblique dual frames and shift-invariant spaces, Appl. Comput. Harmon. Anal. 17 (2004) 48–68.

[41] O. Christensen, An introduction to frames and Riesz bases, Birkhäuser, Boston, 2003.

[42] O. Christensen y Y. Eldar, Characterization of oblique dual frames pairs, preprint.

[43] O. Christensen y A. Lindner, Decomposition of Riesz frames and wavelets into a finite union of linearly independent sets, Lin. Alg. Appl. 355 no. 1 (2002), 147-159.

[44] G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff , Oblique projections and Schur complements, Acta Sci. Math. (Szeged), 67 (2001) 337-356.

[45] G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff, Generalized Schur complements and oblique projections, Linear Algebra and its Applications 341 (2002), 259-272.

[46] G. Corach, A. Maestripieri y D. Stojanoff, Oblique projections and abstract splines, J. Approx. Theory 117 (2002), 189–206.

[47] I. Daubechies, A. Grossmann e Y. Meyer; Painless nonorthogonal expansions. J. Math. Phys. 27 (1986), 1271-1283.

[48] F. Deutsch, The angle between subspaces in Hilbert space, in "Approximation theory, wavelets and applications" (S. P. Singh, editor), Kluwer, Netherlands, 1995, 107-130.

[49] J. Dixmier, Etudes sur les variétés et opérateurs de Julia, avec quelques applications, Bull. Soc. Math. France 77 (1949), 11-101.

[50] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) 413-416.

[51] R. J. Duffin, Elementary operations which generate network matrices, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1963), 645-658.

[52] R. J. Duffin y A. C. Schaeffer; A class of nonharmonic Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. 72, (1952). 341-366.

[53] Y. C. Eldar, Sampling with arbitrary sampling and reconstruction spaces and oblique dual frame vectors, J. Fourier Anal. Appl. 9 (2003), 77-96.

[54] Y. C. Eldar y T. Werther, General Framework for Consistent Sampling in Hilbert Spaces, International Journal of Wavelets, Multiresolution, and Information Processing, 3 (2005), 347-359.

[55] P. A. Fillmore y J. P. Williams, On operator ranges, Advances in Math. 7 (1971) 254-281.

[56] A. Forsgren, On linear least-squares problems with diagonally dominant weight matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 17 (1996), 763-788.

[57] A. Forsgren y G. Spörre, On weighted linear least-squares problems related to interior methods for convex quatratic programming, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 23 (2001), 42-56.

[58] M. Foster, An application of the Wiener-Kolmogorov smoothing theory to matrix inversion, J. SIAM 9 (1961), 387-392

[59] K. Friedrichs, On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. I. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 321-364 .

[60] Jun Ichi Fujii y Masatoshi Fujii, Kolmogorov's complexity for positive definite matrices, Special issue dedicated to Professor T. Ando. Linear Algebra Appl. 341 (2002), 171-180.

[61] H. Goller, Shorted operators and rank decomposition matrices, Linear Algebra Appl. 81 (1986), 207-236.

[62] C. C. Gonzaga y H. J. Lara, A note on properties of condition numbers, Linear Algebra Appl. 273 (1997), 269-273.

[63] K. H. Gröchenig, Foundations of time-frecuency analysis, Birkhäuser, Boston, 2000.

[64] P. R. Halmos, Two subspaces, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), 381-389.

[65] D. Han y D.R.Larson, Frames, bases and group representations, Mem. Amer. Math. Soc. 147 (2000), no. 697.

[66] M. Hanke y M. Neumann, The geometry of the set of scaled projections, Linear Algebra Appl., 190 (1993), 137-148.

[67] R. E. Harte y M. Mbekhta, On generalized inverses in C^*-algebras II, Studia Math. 106 (1992), 129-138.

[68] S. Hassi y K. Nordström, On projections in a space with an indefinite metric, Linear Algebra Appl. 208/209 (1994), 401-417.

[69] V. Havin y B. Jöricke, The uncertainty principle in harmonic analysis. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 28, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[70] E. Haynsworth, Determination of the inertia of a partitioned Hermitian matrix, Linear Algebra Appl. 1 (1968), 73-81.

[71] C. E. Heil y D.F. Walnut, Continuous and discrete wavelet transforms, SIAM Rev. 31 (1989), 628-666.

[72] D. A. Herrero, Approximation of Hilbert space operators. Vol. 1. Second edition. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 224, New York, 1989.

[73] A. E. Hoerl, Application of ridge analysis to regression problems, Chemical Engineering Progress, 58 (1962), 54-59.

[74] J. R. Holub, Pre-frame operators, Besselian frames and near-Riesz bases in Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994) 779-785.

[75] R.A. Horn y C.R. Johnson, Matrix analysis, Cambridge University Press, 1985.

[76] S. Izumino, The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law, Tohoku Math. J. 34 (1982), 43-52.

[77] S. Izumino, Convergence of generalized inverses and splines projectors, J. Approx. Theory 38 (1983), 269-278.

[78] R. Kadison y J. R. Ringrose, "Fundamentals of the Theory of Operator Algebras", I, Academic Press, New York 1984.

[79] T. Kato, Perturbation theory of linear operators, (second edition) Springer, New York, 1984.

[80] S. Kayalar y H. Weinert, Error bounds for the method of alternating projections, Math. Control Signal Systems 1 (1988), 43-59.

[81] M. G. Krein, The theory of self-adjoint extensions of semibounded Hermitian operators and its applications, Mat. Sb. (N. S.) 20 (62) (1947), 431-495.

[82] V. A. Kotel'nikov, On the transmission capacity of ether and wire in electrocommunications, Izd. Red. Upr. Svyazzi RKKA (Moscow) 1933.

[83] V. A. Kotel'nikov, On the transmission capacity of ether and wire in electrocommunications, Reprint in Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications, J.J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira, Eds. Boston, MA: Birkhauser, 2000.

[84] S. Li, A theory of generalized multiresolution structure and pseudoframes of translates, J. Fourier Anal. Appl. 7 (2001), 23-40.

[85] S. Li y H. Ogawa, Pseudoframes for subspaces with applications, J. Fourier Anal. Appl. 10 (2004), 409-431.

[86] S. Li, y H. Ogawa, Pseudo-duals of frames with applications, Appl. Comput. Harmon. Anal. 11 (2001), 289-304.

[87] Chi-Kwong Li y Roy Mathias, Extremal characterizations of the Schur complement and resulting inequalities, SIAM Rev. 42 (2000), 233-246.

[88] Chi-Kwong Li y Roy Mathias, Some interlacing theorems on the Schur complement, Linear and Multilinear Algebra 44 (1998), no. 4, 373-382.

[89] P. Linnell, Von Neumann algebras and linear independence of translates, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 3269-3277.

[90] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, Math. Zeit. 38 (1934), 177-216.

[91] P. Massey y D. Stojanoff, Generalized Schur Complements and P-complementable Operators, Linear Algebra Appl. (to appear).

[92] T. Mathew y S. K. Mitra, Shorted operators and the identification problem -the real case, IEEE Trans. Circuits and Systems 31 (1984), 299-300.

[93] S. K. Mitra, Shorted operators and the identification problem, IEEE Trans. Circuits and Systems 29 (1982), 581-583.

[94] S. K. Mitra, The minus partial order and the shorted matrix, Linear Algebra Appl. 83 (1986), 1-27.

[95] S. K. Mitra y K. M. Prasad, The nonunique parallel sum, Linear Algebra Appl. 259 (1997), 77-99.

[96] S. K. Mitra y M. L. Puri, On parallel sum and difference of matrices, J. Math. Anal. Appl. 44 (1973), 92-97.

[97] S. K. Mitra y M. L. Puri, Shorted matrices - An extended concept and some applications, Linear Alg. Appl. 42 (1982), 57-79.

[98] S. K. Mitra y S. Puntanen, The shorted operator statistically interpreted, Calcutta Statist. Assoc. Bull. 40 (1990/91), 97-102.

[99] C. R. Rao y S. K. Mitra, Generalized inverses of matrices and its applications, Wiley, New York, 1971.

[100] D. P. O'Leary, On bounds for scaled projections and pseudoinverses, Linear Algebra Appl. 132 (1990), 115-117.

[101] M. P. Olson, The selfadjoint operators of a von Neumann algebra form a conditionally complete lattice, Proc. Amer. Math. Soc., 28 (1971) 537-544.

[102] D. V. Ouellette, Schur complements and statistics, Linear Algebra Appl. 36 (1981), 187-295.

[103] G.K. Pedersen, C*-algebras and their automorphism groups, Academic Press, London, 1979.

[104] G. K. Pedersen, Analysis now. Graduate Texts in Mathematics, 118. Springer-Verlag, New York, 1989.

[105] E. L. Pekarev, Shorts of operators and some extremal problems, Acta Sci. Math. (Szeged) 56 (1992), 147-163.

[106] E. L. Pekarev y J. L. Smul'jan, Parallel addition and parallel substraction of operators, Math. USSR Izvestija 10 (1976), 351-370.

[107] D. L. Phillips, A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, J Assoc Comput Mach 9 (1962), 84-97.

[108] V. Ptak, Extremal operators and oblique projections, Casopis Pest Mat. 110 (1985), 343-350.

[109] S. Saitoh, Theory of reproducing kernels and its applications, London, Longman (1988).

[110] C. E. Shannon, Communication int he presence of noise, Proc. IRE 137 (1949), 10-21.

[111] S. Smale y D. X. Zhou, Shannon sampling and function reconstruction from point values, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (2004), 279-305.

[112] S. Smale y D. X. Zhou, Shannon sampling and function reconstruction from point values, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (2004), 279-305.

[113] G. W. Stewart, On scaled projections and pseudoinverses, Linear Algebra Appl. 112 (1989), 189-193.

[114] G. W. Stewart, On the perturbation of pseudo-inverses, projections, and linear squares problems, SIAM Rev. 19 (1977), 634-662.

[115] J. L. Smul'jan, A Hellinger operator integral. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 49 (91) 1959 381-430. English transl. AMS Transl. 22 (1962), 289-337.

[116] A. N. Tikhonov, Solution of incorrectly formulated problems andthe regularization method, Soviet Math Dokl 4 (1963), 1035-1038. English translation of Dokl Akad Nauk SSSR 151 (1963), 501-504.

[117] A. N. Tikhonov and V. A. Arsenin, Solutions of Ill-posed Problems. Winston and Sons, Washington (1977).

[118] M. Wei, The analysis for the total least squares problem with more than one solution. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 13 (1992), 746-763.

[119] M. Wei, Upper bound and stability of scaled pseudoinverses, Numer. Math. 72 (1995), 285–293.

[120] M. Wei, Equivalent Formulae for the supremum and stability of weighted pseudoinverses, Math. of Computation, 220 (1997), 1487-1508.

[121] M. Wei y A. R. De Pierro, Upper perturbation bounds of weighted projections, weighted and constrained least squares problems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 21 (2000), no. 3, 931-951.

[122] J. M. Whittaker, The Fourier theory of the cardinal functions, Proc. Math. Soc. Edinburgh 1 (1929), 169-176.

[123] R. M. Young, An introduction to nonharmonic Fourier series (revised first edition) Academic Press, San Diego, 2001.