



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**

**Tesis Doctoral**

**PROYECCIONES OBLICUAS  
y  
COMPLEMENTOS DE SCHUR**

Aplicaciones a problemas de cuadrados mínimos, teoría de marcos y  
teoría de muestreo

JORGE ABEL ANTEZANA

**2006**

**Director: Dr. Demetrio Stojanoff  
Codirector: Dr. Gustavo Corach**

*A mis padres*

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1 Operadores sobre espacios de Hilbert</b>	<b>1</b>
1.1 Nociones básicas de la teoría de operadores . . . . .	1
1.1.1 Tres topologías localmente convexas . . . . .	2
1.1.2 Teorema espectral . . . . .	4
1.2 Ángulo entre subespacios cerrados . . . . .	6
1.3 Inversas generalizadas. . . . .	9
1.4 Módulo mínimo reducido . . . . .	11
<b>2 Proyecciones oblicuas y complemento de Schur</b>	<b>15</b>
2.1 Teorema de factorización de Douglas. . . . .	15
2.2 Complemento de Schur en espacios de Hilbert. . . . .	17
2.3 Proyecciones $A$ -autoadjuntas y compatibilidad . . . . .	23
2.4 Compatibilidad y el complemento de Schur. . . . .	27
<b>3 Marcos en espacios de Hilbert</b>	<b>29</b>
3.1 Definiciones básicas . . . . .	29
3.2 Marcos de Riesz y marcos de Riesz condicionados . . . . .	32
3.3 Marcos de Gabor. . . . .	33
3.4 Marcos con operador de síntesis idempotente . . . . .	35
<b>4 Proyecciones <math>A</math>-autoadjuntas y marcos de Riesz</b>	<b>39</b>
4.1 Problemas de cuadrados mínimos y proyecciones $A$ -autoadjuntas. . . . .	39
4.2 Proyecciones escaleadas en espacios de dimensión infinita. . . . .	44
4.3 Aplicaciones a la teoría de marcos . . . . .	55
<b>5 Proyecciones <math>A</math>-autoadjuntas en la teoría de muestreo</b>	<b>63</b>
5.1 Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo . . . . .	63
5.1.1 Generación de espacios con núcleo reproductivo . . . . .	64
5.2 Muestreo en espacios de Hilbert . . . . .	65
5.2.1 Nociones básicas . . . . .	65
5.2.2 Procesos de reconstrucción escaleados y regularizados . . . . .	70
5.2.3 Muestreo en espacios de Hilbert reproductivos . . . . .	74



5.3	Un problema de momentos . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Complemento de Schur generalizado</b>	<b>79</b>
6.1	Operadores complementables . . . . .	81
6.2	Complemento de Schur . . . . .	84
6.3	Suma y resta paralelas . . . . .	90
6.4	Fórmulas para el complemento de Schur bilateral . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Complemento de Schur espectral</b>	<b>97</b>
7.1	El orden espectral . . . . .	97
7.2	Definición del complemento de Schur espectral y sus propiedades básicas . .	99
7.3	Propiedades espectrales del $\rho(A, \mathcal{S})$ . . . . .	103
7.3.1	Algoritmo para calcular $\rho(A, \mathcal{S})$ en términos de la descomposición espectral de $A$ cuando $\dim \mathcal{H} < \infty$ . . . . .	106
7.4	El caso $\dim \mathcal{S} = 1$ . . . . .	108
7.4.1	Complejidad de Kolmogorov . . . . .	111
7.5	Algunos ejemplos. . . . .	114

# Introducción

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su producto interno y  $L(\mathcal{H})$  el álgebra de operadores lineales acotados definidos sobre  $\mathcal{H}$ , y  $L(\mathcal{H})^+$  el cono de operadores semidefinidos positivos. Entre los operadores de  $L(\mathcal{H})$ , el conjunto de proyecciones, i.e. el conjunto de los operadores  $Q \in L(\mathcal{H})$  tales que  $Q^2 = Q$ , ha sido extensamente estudiado desde los comienzos de la teoría espectral. La aplicación de las proyecciones en estadística, teoría de marcos y geometría compleja, entre otras áreas de la matemática, mantiene el interés en esta clase de operadores. Dentro del conjunto de proyecciones, se distingue el subconjunto de las autoadjuntas, denominadas usualmente ortogonales debido a la descomposición del espacio  $\mathcal{H}$  que inducen su rango y su núcleo. Es claro que este subconjunto depende fuertemente del producto interno, pues de este dependen las nociones de ortogonalidad y autoadjunción. Si  $A \in L(\mathcal{H})^+$  es inversible y definimos:

$$\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  resulta ser un producto interno equivalente al original desde el punto de vista métrico y topológico, pero la noción de ortogonalidad varía. Un momento de reflexión muestra que una proyección  $Q$  es autoadjunta respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  si y sólo si  $AQ = Q^*A$ . Evidentemente, que una proyección cumpla esta condición no es equivalente a que sea autoadjunta, razón por la cual el conjunto de proyecciones ortogonales respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  no coincide con el de proyecciones ortogonales respecto al producto interno original. Sin embargo, dado un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$ , existe una única proyección  $A$ -autoadjunta sobre  $\mathcal{S}$ . Dicha proyección está asociada a la descomposición  $\mathcal{H} = \mathcal{S} \dot{+} A(\mathcal{S})^\perp$ , donde, como fácilmente se puede comprobar,  $A(\mathcal{S})^\perp$  es el subespacio formado por los vectores de  $\mathcal{H}$  ortogonales a  $\mathcal{S}$  con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ .

Cuando el operador positivo  $A$  no es inversible, la existencia de una proyección sobre un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  que sea autoadjunta respecto al ahora pseudo-producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  es un problema más sutil e interesante. Dado  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , el conjunto

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{Q \in \mathcal{Q} : R(Q) = \mathcal{S}, AQ = Q^*A\},$$

puede contener un único elemento, infinitos o ninguno. Diremos que el par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible si  $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$  no es vacío. Si el par es compatible, en el conjunto  $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$  se distingue una proyección, que denominaremos  $P_{A, \mathcal{S}}$ , que es la asociada a la descomposición

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \dot{+} \left( A(\mathcal{S})^\perp \cap (\mathcal{S} \cap A(\mathcal{S})^\perp)^\perp \right).$$



La noción de compatibilidad, distintas caracterizaciones de la misma, como así también diversas fórmulas para la proyección  $P_{A,\mathcal{S}}$  han sido estudiadas por Corach, Maestripieri y Stojanoff en [44], [45] y [46]. En particular demostraron que la compatibilidad del par  $(A, \mathcal{S})$  se puede determinar a partir del ángulo de Dixmier entre los subespacios  $\overline{A(\mathcal{S})}$  y  $\mathcal{S}$ , o a partir del ángulo de Friedrich entre  $N(A)$  y  $\mathcal{S}$  si el operador  $A$  posee rango cerrado. Recordemos que dados dos subespacios cerrados  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , el ángulo de Dixmier entre estos subespacios es el ángulo en  $[0, \frac{\pi}{2}]$  cuyo coseno está definido por:

$$c_0[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{ |\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N} \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1 \}.$$

mientras que el ángulo de Friedrich entre ellos, es el ángulo en  $[0, \frac{\pi}{2}]$  cuyo coseno está definido por:

$$c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{ |\langle x, y \rangle| : x \in \mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}), y \in \mathcal{N} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1 \},$$

Un estudio desde el punto de vista geométrico de la variedad de proyecciones es realizado en [7]. Allí, entre otras cosas, se interpreta geoméricamente el conjunto de operadores positivos e inversibles  $A$  tales que una dada proyección  $Q$  resulta  $A$ -autoadjunta. Vale la pena recordar que dicho conjunto es no vacío, pues siempre el operador  $A = Q^*Q + (I - Q)^*(I - Q)$  se encuentra en dicho conjunto.

Las proyecciones están íntimamente relacionadas con las denominadas inversas generalizadas. Sean  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  dos espacios de Hilbert y denotemos por medio de  $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  al espacio de todos los operadores lineales y acotados de  $\mathcal{H}_1$  en  $\mathcal{H}_2$ . Dado  $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , se dice que  $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  es una inversa generalizada de  $T$  si

$$TBT = T \quad \text{y} \quad BTB = B.$$

Es relativamente fácil ver, a partir de la definición, que  $TB$  es una proyección cuyo rango es  $R(T)$  y  $BT$  es una proyección cuyo núcleo es  $N(T)$ . Aquella  $B$  para la cual tanto  $TB$  como  $BT$  son autoadjuntas se denomina inversa generalizada de Moore-Penrose, y suele denotarse  $T^\dagger$ . Cómo  $TB$  es una proyección sobre  $R(T)$ , es una condición necesaria para la existencia de inversas generalizadas que  $T$  tenga rango cerrado. Se puede ver que también es suficiente (ver sección 1.3 Teorema 1.3.2). Es interesante notar que si  $P$  es una proyección sobre  $R(T)$  y  $Q$  es una proyección cuyo núcleo es  $N(T)$  entonces

$$B = QT^\dagger P \tag{1}$$

es la inversa generalizada que cumple  $TB = P$  y  $BT = Q$ .

Resulta claro que, dado  $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , la inversa generalizada de Moore-Penrose dependerá de los (pseudo) productos internos que consideremos en los espacios  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ . Consideremos en  $\mathcal{H}_1$  la forma sesquilineal semidefinida positiva inducida por un operador semidefinido positivo  $A_1 \in L(\mathcal{H}_1)$  y en  $\mathcal{H}_2$  la forma sesquilineal semidefinida positiva inducida por un operador semidefinido positivo  $A_2 \in L(\mathcal{H}_2)$ . Luego, si los pares  $(A_1, N(T))$  y  $(A_2, R(T))$  son



compatibles, entonces existe una única inversa generalizada de  $T$ , que denotaremos  $T_{A_1, A_2}^\dagger$ , que satisface

$$TT_{A_1, A_2}^\dagger = P_{A_2, R(T)} \quad \text{y} \quad T_{A_1, A_2}^\dagger T = I - P_{A_1, N(T)}.$$

En efecto, de acuerdo a (1),  $T_{A_1, A_2}^\dagger = (I - P_{A_1, N(T)})T^\dagger P_{A_2, R(T)}$ .

Tanto las proyecciones como las inversas generalizadas han sido extensamente estudiadas durante los últimos 50 años y aparecen en numerosos problemas de matemática: problemas de cuadrados mínimos, teoría de marcos, teoría de muestreo, teoría de circuitos, etc.

Como hemos notado, para utilizar las técnicas que involucran inversas generalizadas es necesario que los operadores involucrados posean rangos cerrados. Por otro lado, si uno quiere considerar una proyección sobre cierto subespacio, el mismo debe ser cerrado. Esto, en espacios de dimensión infinita, puede resultar un problema técnico importante. Es bien sabido que, en tales espacios, puede ocurrir que la suma de subespacios cerrados no sea un subespacio cerrado o que el producto de operadores con rango cerrado no sea un operador con rango cerrado. Esto hace que, en algunos casos, sea difícil generalizar a espacios de Hilbert cualesquiera propiedades y/o conceptos desarrollados en espacios de dimensión finita, donde todos los subespacios son cerrados. Sin embargo, obtener esta clase de generalizaciones resulta conveniente cuando los datos involucrados en el problema que estamos estudiando son arbitrariamente grandes en tamaño y/o dimensión.

Uno de los principales objetivos de este trabajo es mostrar una serie de casos donde la compatibilidad y la noción de ángulo entre subespacios son la clave para extender ciertos resultados clásicos del análisis matricial a espacios de Hilbert infinito dimensionales. Estos conceptos se hallan implícitos en espacios de dimensión finita, donde todo par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible y todo par de subespacios cerrados  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  posee ángulo de Friedrich no nulo. Es por esta razón que muchas veces pasan desapercibidos. Sin embargo, como veremos a lo largo de este trabajo, la extensión de ciertos resultados se basa en una correcta formulación de las condiciones de compatibilidad y de ángulos entre los subespacios intervinientes. Tal es el caso de conocido teorema de Ben-Tal Teboulle, que establece que las soluciones de los problemas de cuadrados mínimos escaleados se encuentran en la cápsula convexa de las soluciones de algunos subsistemas cuadrados no singulares del sistema sin escalear. Bajo hipótesis adecuadas de compatibilidad y de ángulos entre subespacios, en el capítulo 4 extenderemos este resultado a espacios de Hilbert de dimensión infinita. Como veremos, dicha extensión se relaciona con objetos que aparecen en la teoría de marcos y ciertos problemas de momentos. Por otro lado, una formulación correcta de las condiciones de compatibilidad nos permitirá extender la noción de complemento de Schur de matrices a operadores acotados entre espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , y sendos subespacios cerrados  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_2$  (ver capítulo 6). Extensiones de este tipo sólo habían sido hechas, para operadores positivos y un único subespacio por Anderson y Trapp [5]. La noción que nosotros definimos, bajo condiciones de compatibilidad que en espacios de dimensión finita se verifican automáticamente, extiende y unifica las antes mencionadas, y posee las mismas propiedades que el complemento de Schur de matrices. También introducimos la noción de complemento de Schur espectral, donde las proyecciones, a través de las denominadas resoluciones espectrales, también juegan un papel relevante.



El segundo de los objetivos que perseguimos en este trabajo es mostrar que, en algunos casos, las técnicas desarrolladas en torno a las proyecciones  $A$ -autoadjuntas, inversas generalizadas y las nociones de ángulo entre subespacios permiten un enfoque más sencillo de algunos problemas. Tal es el caso de ciertos modelos de muestreo y reconstrucción lineal de señales. En el capítulo 5 veremos como un enfoque basado en la técnicas antes mencionados nos permite mejorar ciertas estimaciones del error producido en el proceso de reconstrucción, como así también responder un interrogante planteado por Smale y Zhou en [111]. Un resumen más detallado de los resultados originales de este trabajo se encuentra en la segunda parte de esta introducción.

El trabajo se encuentra organizado del siguiente modo: en los capítulos 1, 2 y 3 se desarrollan los preliminares necesarios para los desarrollos posteriores mientras que en los capítulos 4, 5, 6 y 7 se concentran principalmente los resultados originales. A continuación describiremos brevemente como se hallan distribuidos los resultados preliminares. El capítulo 1 empieza con las definiciones y resultados básicos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert, continuando con la definición y propiedades elementales de la noción de ángulos entre subespacios, inversas generalizadas y módulo mínimo reducido. El capítulo 2 comienza con el teorema de factorización de Douglas, que constituye una herramienta importantísima que en varios casos sustituye el uso de inversas generalizadas. Posteriormente introducimos la noción de complemento de Schur, proyecciones  $A$ -autoadjuntas y compatibilidad recordando los resultados más importantes. Dicho capítulo concluye con una sección destinada a mostrar la forma en que la compatibilidad se relaciona con el complemento de Schur en el caso de operadores positivos, lo cual constituye la principal motivación para la generalización del complemento de Schur a espacios de Hilbert que realizaremos en el capítulo 6. Finalmente, en el capítulo 3 recordamos las definiciones básicas relacionadas con la teoría de marcos en espacios de Hilbert. En general no incluimos las demostraciones de los resultados mencionados en las secciones preliminares, salvo que las demostraciones sean novedosas. Tal es el caso de las secciones 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.2 y por su puesto la sección 3.4 donde también hay resultados nuevos.

## Descripción de los resultados originales del trabajo.

Los resultados originales de este trabajo se encuentran en la sección 3.4 y en los capítulos 4, 5, 6 y 7. Los mismos están basados en los trabajos [8], [9], [10], [11], [12], [13] y [14].

### Resumen de los resultados de la sección 3.4

En esta sección se trata de caracterizar aquellos marcos  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de cierto espacio de Hilbert tales que existe una extensión  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ , una base ortonormal  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{K}$  y una proyección  $Q \in L(\mathcal{K})$  (no necesariamente autoadjunta) tal que:

$$f_n = Q e_n. \quad (2)$$





Recordemos que dado un espacio de Hilbert (separable)  $\mathcal{H}$ , una sucesión  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ , o más generalmente, para cierto subespacio cerrado  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{H}$ , si existen constantes  $A, B > 0$  tales que, para todo  $f \in \mathcal{W}$ :

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \quad (3)$$

Las cotas óptimas  $A, B$  para la ecuación (3) se denominan cotas del marco  $\mathcal{F}$ . El marco se denomina ajustado si  $A = B$ , y se dice que se trata de un marco de Parseval si  $A = B = 1$ . El operador de síntesis asociado a  $\mathcal{F}$  es el operador  $T : \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$  definido por  $T(e_n) = f_n$ , donde  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  denota la base canónica de  $\ell^2$ . El exceso de  $\mathcal{F}$  es el número cardinal  $e(\mathcal{F}) = \dim N(T)$ .

Un conocido teorema de Han y Larson [65] establece que una sucesión  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  es un marco de Parseval para  $\mathcal{H}$  si y sólo si existe una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en una extensión  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$  tal que  $f_n = P_{\mathcal{H}} b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $P_{\mathcal{H}} \in L(\mathcal{K})$  es la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{H}$ . El principal resultado de esta sección extiende el teorema de Han y Larson del siguiente modo: un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$  con cotas  $1 \leq A \leq B$  proviene de un sistema ortonormal, no necesariamente completo, en una extensión  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ , a través de un proyección no necesariamente ortogonal de  $\mathcal{K}$  sobre  $\mathcal{H}$ . Si el exceso de  $\mathcal{F}$  es infinito, el sistema ortonormal puede elegirse completo. Para marcos con exceso finito y cotas  $1 \leq A \leq B$ , el sistema ortonormal puede elegirse completo si y sólo si  $\dim R(TT^* - I) \leq e(\mathcal{F})$ . Este resultado, en particular, completa un trabajo previo de Casazza, Han y Larson [34].

## Resumen de los resultados del capítulo 4

En este capítulo se estudian las denominadas proyecciones e inversas generalizadas escaleadas, las cuales son utilizadas en problemas de optimización, estadística y procesamiento de señales.

Frecuentemente, si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  real o compleja cuyas columnas son linealmente independientes y  $D$  es una matriz diagonal, entonces las inversas generalizadas escaleadas adoptan las formas  $(ADA^t)^{-1}AD$ ,  $(ADA^t)^\dagger AD$ ,  $(ADA^*)^{-1}AD$  or  $(ADA^*)^\dagger AD$ , de acuerdo al cuerpo asociado al problema y a las diferentes hipótesis de inversibilidad. Fórmulas análogas valen para las proyecciones escaleadas. En general  $D$  es una matriz positiva e inversible y  $A$  es una matriz de  $m \times n$  ( $m \geq n$ ) cuyas columnas son linealmente independientes.

En una serie de trabajos, Stewart [113], O'Leary [100], Ben-Tal y Taboulle [20], Hanke y Neumann [66], Forsgren [56], Gonzaga y Lara [62], Forsgren and Spörre [57], Wei [121], [120], [119], [118] han estudiado y calculado cantidades del tipo

$$\sup_{D \in \Gamma} \|\gamma(D, A)\|,$$

donde  $\Gamma$  denota cierto subconjunto de matrices positivas inversibles y  $\gamma(D, A)$  es alguna de las inversas generalizadas escaleadas mencionadas anteriormente. En los trabajos de Forsgren



y Spörre [56], [57], el lector encontrará abundante información sobre la historia y los motivos por los cuales se desea estimar esta clase de supremos.

No obstante, debemos decir que las referencias antes citadas sólo consideran el caso finito dimensional. Es por ello que, a lo largo del capítulo 4, nos propondremos extender estos resultados a espacios de Hilbert de dimensión infinita. Para ello, exhibiremos un enfoque diferente de esta teoría, válido aún en el contexto finito dimensional, basado en las técnicas y resultados sobre proyecciones  $A$ -autoadjuntas. El estudio de las proyecciones escaleadas desde el punto de vista de las proyecciones  $A$ -autoadjuntas nos permite obtener demostraciones más sencillas de algunos resultados ya conocidos; por otro lado, posee la ventaja de que estas demostraciones pueden ser fácilmente extendidas a contextos más generales, también importantes en las aplicaciones.

Un conocido resultado de Ben-Tal y Teboulle establece que las soluciones de los problemas de cuadrados mínimos escaleados se encuentran en la cápsula convexa de las soluciones de algunos subsistemas cuadrados no singulares. Remitimos al lector a los trabajos de Ben-Tal y Teboulle [20], o [56], [121] donde encontrará la siguiente formulación de este resultado. Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  ( $m \geq n$ ) cuyas columnas son linealmente independientes. Denotemos por medio de  $J(A)$  al conjunto de todas las proyecciones ortogonales diagonales de  $m \times m$  tales que  $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$  es biyectiva. Entonces, para cada matriz diagonal de  $m \times m$  positiva e inversible  $D$ ,

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D = \sum_{Q \in J(A)} \left( \frac{\det(D_Q)|\det(A_Q)|^2}{\sum_{P \in J(A)} \det(D_P)|\det(A_P)|^2} \right) A(QA)^{-1}Q \quad (4)$$

donde  $A_Q$  (resp.  $D_Q$ ) es  $QA$  (resp.  $QD$ ) considerada como una submatriz cuadrada de  $A$  (resp.  $D$ ).

En la sección 4.1 mostramos que, para cada matriz diagonal, positiva e inversible  $D$  y  $Q \in J(A)$ , si  $\mathcal{S} = R(A)$ , entonces:

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D = P_{D,\mathcal{S}} \quad \text{y} \quad A(QA)^{-1}Q = P_{Q,\mathcal{S}}.$$

Recordemos que  $P_{D,\mathcal{S}}$  y  $P_{Q,\mathcal{S}}$  denotan, respectivamente, las proyecciones  $D$ -autoadjuntas y  $Q$ -autoadjuntas distinguidas, cuyo rango es  $\mathcal{S}$ . Luego, la fórmula de Ben-Tal y Teboulle's (4) puede reescribirse del siguiente modo: si  $R(A) = \mathcal{S}$ , para toda matriz diagonal, positiva e inversible  $D$ ,

$$P_{D,\mathcal{S}} \in \text{co}\{P_{Q,\mathcal{S}} : Q \in J(A)\}.$$

Esto implica, en particular, que  $\sup_{D \in \mathcal{D}_n^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| \leq \max_{Q \in J(A)} \|P_{Q,\mathcal{S}}\|$ . La misma desigualdad fue demostrada independientemente por O'Leary en [100], mientras la desigualdad inversa fue inicialmente demostrada por Stewart [113]. Una pequeña generalización del resultado de Stewart se demuestra en esta sección. También aquí, usando técnicas de proyecciones  $A$ -autoadjuntas, damos una demostración sencilla y conceptual de un resultado de Gonzaga and Lara [62] sobre proyecciones escaleadas.



En la sección 4.2, extendemos la noción de compatibilidad de un subespacio cerrado, con respecto a ciertos subconjuntos de  $L(\mathcal{H})^+$ . Dado  $\Gamma \subseteq L(\mathcal{H})^+$  y un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$ , decimos que  $\mathcal{S}$  es compatible con  $\Gamma$  si  $(D, \mathcal{S})$  es compatible para todo  $D \in \Gamma$  y se satisface la condición de Stewart:

$$\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D, \mathcal{S}}\| < \infty.$$

Fijada una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{D}$  denota el álgebra de operadores diagonales con respecto a  $\mathcal{B}$ , i.e.  $D \in \mathcal{D}$  si existe una sucesión acotada  $(\lambda_n)$  de números complejos tal que  $De_n = \lambda_n e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Consideremos:

1.  $\mathcal{D}^+$ , el conjunto de elementos positivos e inversibles en  $\mathcal{D}$  (i.e. todos los  $\lambda_n > \varepsilon$ , para algún  $\varepsilon > 0$ ),
2.  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ , el conjunto de las proyecciones en  $\mathcal{D}$  (i.e.  $\lambda_n = 0$  o  $1$ ),
3.  $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ , el conjunto de elementos en  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$  con rango finito,
4.  $\mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})$ , el conjunto de elementos  $Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$  tales que  $R(Q) \cap \mathcal{S}^\perp = \{0\}$ ,

demostramos que un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  es compatible con todos estos conjuntos o no lo es con ninguno. En el primer caso, diremos que  $\mathcal{S}$  es compatible con la base  $\mathcal{B}$  (o  $\mathcal{B}$ -compatible).

Damos una caracterización completa de los subespacios compatibles con  $\mathcal{B}$  en terminos del ángulo de Friedrichs, y obtenemos generalizaciones de los resultados de Ben-Tal y Teboulle y de Stewart y O'Leary.

A continuación resumimos los principales resultados de esta sección. Para ello, es necesario fijar algo de notación: sea  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Dado  $J \subseteq \mathbb{N}$ , por medio de  $\mathcal{H}_J$  denotamos el subespacio cerrado generado por el conjunto  $\{e_n : n \in J\}$  y por medio de  $P_J$  a la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{H}_J$ . Si  $J = \{1, \dots, n\}$ , usaremos  $\mathcal{H}_n$  y  $P_n$  en vez de  $\mathcal{H}_J$  y  $P_J$ . Entonces:

1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i.  $\mathcal{S}$  es compatible con  $\mathcal{D}^+$ ;
- ii.  $\sup\{c[\mathcal{S}, \mathcal{H}_J] : J \subseteq \mathbb{N}\} < 1$ ;
- iii.  $\sup\{c[\mathcal{S}, \mathcal{H}_J] : J \subseteq \mathbb{N} \text{ y } J \text{ es finito}\} < 1$ ;
- iv. Todos los pares  $(P_J, \mathcal{S})$  son compatibles y  $\sup\{\|P_{P_J, \mathcal{S}}\| : J \subseteq \mathbb{N}\} < \infty$ ;

En este caso, dado  $D \in \mathcal{D}^+$  resulta

$$P_{D, \mathcal{S}} \in \overline{\text{co}\{P_{Q, \mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})\}},$$

donde la clausura se toma respecto a la topología fuerte de operadores. En particular

$$\sup\{\|P_{D, \mathcal{S}}\| : D \in \mathcal{D}^+\} = \sup\{\|P_{P_J, \mathcal{S}}\| : J \subseteq \mathbb{N}\} = \left(1 - \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)]^2\right)^{-1/2}.$$



2.  $\mathcal{S}$  es compatible con  $\mathcal{B}$  si y sólo si

i.  $\mathcal{S} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n}$  y

ii. para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el subespacio  $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n$  es compatible con  $\mathcal{B}$  y existe  $M > 0$  tal que  $\sup\{\|P_{P_J, \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n}\| : J \subseteq \mathbb{N}\} \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Si  $\dim \mathcal{S} < \infty$ , entonces  $\mathcal{S}$  es compatible con  $\mathcal{B}$  si y sólo si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_n$ .

La noción de compatibilidad con una base ortonormal  $\mathcal{B}$  es bastante restrictiva. Sin embargo, la clase de subespacios que son compatibles con una base dada tiene interés propio. En efecto, como veremos en la sección 4.3, los subespacios de codimensión infinita  $\mathcal{B}$ -compatibles son los núcleos de los operadores de síntesis de los denominados marcos de Riesz (ver Capítulo 3 para las definiciones y [29], [30], [33], [36], [39] o [43] para más información y aplicaciones de los marcos de Riesz). En esta sección también estudiamos los denominados marcos de Riesz condicionados y la relación entre los marcos de Riesz y cierta clase de marcos duales.

## Resumen de los resultados del capítulo 5

En este capítulo aplicamos las técnicas de proyecciones  $A$ -autoadjuntas a los problemas de muestreo y reconstrucción de una señal. Básicamente, la teoría de muestreo estudia la posibilidad de reconstruir una función (señal) a partir de los valores que esta toma en cierta sucesión contenida en el dominio de la función. Si la función en cuestión  $h$  es un elemento de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , el proceso de muestreo puede pensarse como el resultado de considerar el producto interno de  $h$  con cierta sucesión  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de vectores de  $\mathcal{H}$ . La sucesión  $\{\langle h, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  que de este modo se obtiene constituye la información que brinda el muestreo de la señal, a partir de la cual, se intenta reconstruir  $h$ .

Puede decirse que la teoría moderna de muestreo comienza con el artículo de Claude Shannon *Communication in the presence of noise* publicado en 1949, en donde aparece el siguiente resultado (ver [110]):

... Si una señal  $f(t)$  no contiene frecuencias mayores que  $\omega$  ciclos por segundo, entonces  $f(t)$  está completamente determinada por sus valores  $f(n/2\omega)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , y puede ser reconstruida a partir de estos valores del siguiente modo:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{2\omega}\right) \frac{\sin \pi(2\omega t - n)}{\pi(2\omega t - n)} \quad (5)$$

Cuando Shannon publicó este resultado era consciente de que existían versiones equivalentes al mismo ya publicadas (él menciona esto en su artículo). Una de tales versiones apareció en un trabajo de Whittaker sobre funciones cardinales [122]. Por otro lado, en la literatura rusa, este resultado fue introducido en la teoría de comunicaciones por Kotelnikov (ver [82] [83]). Es por esto que hoy en día se lo conoce como el teorema de Whittaker-Shannon-Kotelnikov.

El hecho de que  $f(t)$  no contenga frecuencias mayores que  $\omega$  ciclos por segundo puede reformularse diciendo que la transformada de Fourier de  $f$  posee soporte en  $[-2\pi\omega, 2\pi\omega]$ . Se



puede ver que el conjunto de tales funciones, que denotaremos  $\mathcal{PW}$ , resulta un subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R})$ . Más aún, como posteriormente notara G. H. Hardy, el conjunto de las funciones  $\frac{\sin \pi(2\omega t - n)}{\pi(2\omega t - n)}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , es una base ortonormal del subespacio  $\mathcal{PW}$ . Dicha base posee la siguiente interesante propiedad:

$$f\left(\frac{n}{2\omega}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \pi(2\omega t - n)}{\pi(2\omega t - n)} dt = \left\langle f, \frac{\sin \pi(2\omega(\cdot) - n)}{\pi(2\omega(\cdot) - n)} \right\rangle. \quad (6)$$

Luego, en el teorema de Shannon, el espacio de Hilbert es el espacio  $\mathcal{PW}$ , denominado espacio de Paley-Wiener, y la sucesión respecto a la cual se realiza el muestreo es una base ortonormal.

Con el desarrollo del análisis no armónico, las bases ortonormales, en algunos casos, fueron reemplazadas por los denominados marcos. Esto, entre otras cosas, llevó a que se realizaran nuevos modelos de muestreo. Recientemente, S. Li y H. Ogawa [85], Y. Eldar [53], y Y. Eldar y T. Werther [54], entre otros, consideraron el siguiente esquema abstracto de muestreo (lineal): sean  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{M}$  dos subespacios cerrados de cierto espacio de Hilbert (separable)  $\mathcal{H}$ , y supongamos que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$ , donde  $\dot{+}$  significa que la suma es directa. Para  $\mathcal{M}$  consideramos un marco  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con respecto al cual se muestrean los elementos de  $\mathcal{H}$  y para  $\mathcal{W}$  se toma un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con respecto al cual se realiza el proceso de reconstrucción. Llamemos  $F$  y  $G$  a los operadores de síntesis de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  respectivamente. Bajo estas hipótesis, se puede probar que dado  $h \in \mathcal{H}$  existe un único  $h_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$  que satisface para todo  $n \in \mathbb{N}$  el siguiente requerimiento de consistencia:

$$\langle h, g_n \rangle = \langle h_{\mathcal{W}}, g_n \rangle. \quad (7)$$

Más aún, en [40] Christensen y Eldar demostraron que  $h_{\mathcal{W}} = F(G^*F)^\dagger G^*f$

Recientemente Smale y Zhou [111] propusieron cómo medir si los datos obtenidos al muestrear una señal con los elementos de  $\mathcal{G}$  son “suficientes” para reconstruirla con los elementos de  $\mathcal{F}$ . De acuerdo a esta medida,  $\mathcal{G}$  provee suficiente información con respecto a  $\mathcal{F}$  si

$$\inf \{ \|G^*F(z)\| : z \in N(F)^\perp \quad \|z\| = 1 \} > 0.$$

La condición de que  $\mathcal{G}$  provea suficiente información con respecto a  $\mathcal{F}$  es más débil que pedir que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$ . Esto plantea el problema de que no exista  $f \in \mathcal{W}$  que cumpla el requerimiento de consistencia (7). No obstante, si  $d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} = G^*(h)$ , se puede probar que el vector  $h_{\mathcal{W}}$ , antes definido, resuelve el siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h_{\mathcal{W}}, g_n \rangle - d_n|^2 = \min_{h \in \mathcal{W}} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2 \quad (8)$$

Mirado desde este punto de vista, el problema de reconstrucción puede verse como un problema de interpolación donde  $h_{\mathcal{W}}$  es el vector (función) que mejor ajusta al vector (a la función)  $h$  entre todos los vectores (funciones) de  $\mathcal{W}$ .



Un modelo un poco más general del proceso de reconstrucción, consiste en tomar  $\alpha > 0$  y una sucesión  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números positivos acotados superiormente. Luego, se pide que el vector que se obtenga tras la reconstrucción  $h_{\mathcal{W}, \alpha, \omega}$  minimice el siguiente problema de cuadrados mínimos:

$$\min_{h \in \mathcal{W}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n |\langle h, g_n \rangle - d_n|^2 + \alpha \|h\|^2 \right), \quad (9)$$

En este modelo, los datos obtenidos en el proceso de muestreo son ponderados por medio de los  $\omega_n$  mientras que el término  $\alpha \|h\|^2$  introduce una regularización del problema. Este problema fue estudiado por Smale y Zhou en [111] utilizando técnicas variacionales. Basados en estos métodos, cuando  $h \in \mathcal{W}$ , Smale y Zhou encontraron una estimación del error que introduce la regularización, dejando planteado problema de encontrar una estimación de la misma índole cuando  $h \notin \mathcal{W}$ .

En este trabajo, nosotros elegimos un enfoque del problema que utiliza las técnicas de las inversas generalizadas y las proyecciones  $A$ -autoadjuntas. Esto nos permite dar una posible respuesta al interrogante planteado por Smale y Zhou (Proposición 5.2.11), que mejora la obtenida en [111] en el caso en que  $h \in \mathcal{W}$ .

Por otro lado, nuestro enfoque permite vincular el modelo de Eldar y Werter con el de Smale y Zhou. Es un hecho interesante que el operador  $F(G^*F)G^*$ , encontrado por Eldar y Werter, resulte ser la proyección  $P_{GG^*, \mathcal{W}}$  y que  $(G^*F)G^* = F_{I, GG^*}^\dagger$ . Por otra parte, son estos mismos operadores los que están vinculados con el problema 8 bajo la hipótesis de que  $\mathcal{G}$  provee suficiente información respecto a  $\mathcal{F}$  (ver Proposiciones 5.2.6 y 5.2.8). Respecto a esta noción, en la Proposición 5.2.4, demostramos que las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\mathcal{G}$  provee suficiente información respecto a  $\mathcal{F}$ .
2.  $G^*F$  posee rango cerrado y  $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$ .
3.  $c_0[\mathcal{W}, \mathcal{M}^\perp] < 1$ .
4.  $c[\mathcal{W}^\perp, \mathcal{M}] < 1$  y  $\mathcal{W}^\perp + \mathcal{M} = \mathcal{H}$ .

Esto por un lado nos permite concluir que la medida de suficiente información de Smale y Zhou relaja las hipótesis de que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} + \mathcal{M}^\perp$  de Christensen y Eldar en el siguiente sentido: si bien  $\mathcal{W} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$  se permite que la suma de los mismos pueda ser un subespacio cerrado propio de  $\mathcal{H}$ . Por otro lado, de los items 3 y 4 resulta claro que la condición de suficiente información no depende de los marcos  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  elegidos, sino que sólo depende de una cuestión de ángulos entre los subespacios  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{M}$ .

Dado que los procesos de muestreo suelen modelarse en los denominados espacios de Hilbert reproductivos, al comienzo del capítulo damos un brevísimo resumen de la teoría de estos espacios y en la sección 5.3 reescribimos los resultados antes mencionados en el contexto de estos espacios.

El capítulo concluye con el estudio del siguiente problema de momentos: dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $\mathcal{H}$  y  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ , nos preguntamos si existe  $g \in \mathcal{H}$  tal que:

$$\langle g, f_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Siguiendo la terminología introducida en [123], a la sucesión  $\{\langle g, f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  la denominaremos sucesión de momentos de  $g$ , mientras que al espacio de todas las sucesiones de momentos lo denominaremos espacio de momentos. La sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  puede provenir del muestreo de una función, o bien ser los datos a partir de los cuales se quiere ajustar una función. Luego, este problema está directamente relacionados con los problemas de reconstrucción e interpolación antes discutidos.

Está claro que el problema momentos en general no siempre tiene solución. En efecto, basta notar que el espacio de momentos coincide con  $\ell^2$  si y sólo si  $\mathcal{F}$  es una base de Riesz. De no ser así, para que el problema posea solución, la dependencia entre los vectores de  $\mathcal{F}$  también debe manifestarse en los coeficientes  $a_n$ . Cuando dicha solución no existe, se busca la más próxima en algún sentido. Por ejemplo, con respecto a la distancia usual de  $\ell^2$ , i.e. se busca  $g \in \mathcal{H}$  tal que:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle g, f_k \rangle|^2 = \min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} |\langle h, f_k \rangle|^2.$$

Pero también, si  $D \in L(\ell^2(N))$  es un operador positivo e inversible tal que  $De_n = \omega_n e_n$ , podemos buscar la solución más próxima con respecto a la distancia que se obtiene al reescalar el producto interno de  $\ell^2(N)$  con  $D$ , es decir, buscar  $g_D$  tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle g, f_k \rangle|^2 = \min_{h \in \mathcal{H}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_k |\langle h, f_k \rangle|^2.$$

Sea  $J(\mathcal{F})$  el conjunto formado por los subconjuntos finitos  $I$  de  $\mathbb{N}$  tales que los vectores  $\{f_i : i \in I\}$  son linealmente independiente, y sea  $g_I$  el único vector de  $\mathcal{H}$  que satisface

$$\langle g_I, f_i \rangle = a_i \quad \forall i \in I,$$

Entonces, el principal resultado de esta última sección es una aplicación de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, y muestra que si el marco  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz, o equivalentemente, si el espacio de momentos es compatible con la base canónica de  $\ell^2$ , entonces  $g_D \in \overline{\text{co}\{g_I : I \in J(\mathcal{F})\}}^{\|\cdot\|}$ .

## Resumen de los resultados del capítulo 6

El capítulo 6 está dedicado a generalizar dos operaciones, relacionadas con la teoría de circuitos: la suma paralela de matrices y el complemento de Schur de matrices (o matriz cortocircuito). En [1], W. N. Anderson Jr. y R. J. Duffin definieron, para matrices semidefinidas positivas  $A$  y  $B$  la suma paralela  $A : B = A(A + B)^\dagger B$ . La motivación para estudiar esta operación, y su nombre, provienen del siguiente hecho: si dos  $n$ -puertos puramente resistivos, con matrices de impedancia  $A$  y  $B$ , son conectados en paralelo (ver figura 1), entonces  $A : B$  es la matriz de impedancia de la conexión en paralelo. Deber mencionarse que la matriz de impedancia de un puerto puramente resistivo es semidefinida positiva. Por otro lado, en [4]



Anderson definió, para una matriz de  $n \times n$  positiva  $A$  y un subespacio  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{C}^n$ , la matriz cortocircuito de  $A$  por  $\mathcal{S}$ , que nosotros denotaremos  $\Sigma(A, \mathcal{S})$ . Supongamos que  $A$  es una matriz de bloques  $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ , donde  $A_{11}$  es un bloque de  $k \times k$  y  $A_{22}$  es un bloque de  $(n - k) \times (n - k)$ . Si  $\mathcal{S}$  es el subespacio generado por los primeros  $k$  vectores de la base canónica, entonces

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{\dagger}A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde recordemos que  $\dagger$  denota la inversa generalizada de Moore-Penrose. (Algunos autores definen  $\Sigma(A, \mathcal{S})$  como la transformación lineal de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$  omitiendo los ceros). El nombre cortocircuito proviene del hecho de que esta operación produce la impedancia de un n-puerto resistivo cuando algunas de sus entradas son cortocircuitadas a tierra (ver figura 2).

Aquí  $A$  es la impedancia del puerto original y  $\Sigma(A, \mathcal{S})$  es la impedancia del mismo luego de haber cortocircuitado algunas de sus entradas. Ambas operaciones han sido estudiadas, para operadores (semidefinidos) positivos, en el contexto de espacios de Hilbert (ver la nota histórica al comienzo del capítulo 6).

En este capítulo extendemos la noción de complemento de Schur a operadores acotados entre dos espacios de Hilbert diferentes, dado un subespacio cerrado fijo en cada uno de ellos. La solución que obtenemos, que denominamos complemento de Schur bilateral, utiliza la noción de complementabilidad débil, que es un refinamiento de un concepto definido por T. Ando [6] en dimensión finita y generalizada por D. Carlson y E. V. Haynworth [28]. El complemento de Schur bilateral ha sido estudiado en dimensión finita por S. K. Mitra y M. L. Puri [97] (ver también los trabajos de H. Goller [61] y Mitra y Prasad [95], quienes refinaron algunos resultados de [97]). Sin embargo, sus métodos dependen fuertemente de la existencia de inversas generalizadas, razón por la cual no pueden ser utilizadas para operadores que no poseen rango cerrado.

El segundo objetivo es extender la noción suma paralela a pares de operadores lineales acotados entre espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ . En espacios de dimensión finita esto ha sido estudiado por C. R. Rao y S. K. Mitra [99], y Mitra y K. M. Prasad [95]. No obstante, nuevamente las inversas generalizadas son la principal herramienta que ellos utilizan.

El capítulo está organizado del siguiente modo: en la sección 6.1 recordamos la definición de complementabilidad, damos diversas caracterizaciones de la misma, algunas de las cuales son originales aún en dimensión finita, y concluimos introduciendo la noción de complementabilidad débil. A partir de la complementabilidad débil, en la sección 6.2 definimos el complemento de Schur bilateral, definición que extiende y unifica las actualmente conocidas, y demostramos las propiedades usuales. La sección 6.3 está destinada al estudio de la suma y diferencia paralelas. Una de la principales ventajas de nuestro enfoque es que la diferencia paralela se puede expresar en términos de la suma paralela, razón por la cual, hereda todas sus propiedades automáticamente y no es necesario, como usualmente se hacía, demostrar cada una de ellas nuevamente. Finalmente, en la sección 6.4 exhibimos algunas fórmulas del complemento de Schur en términos de la suma y diferencia paralela.



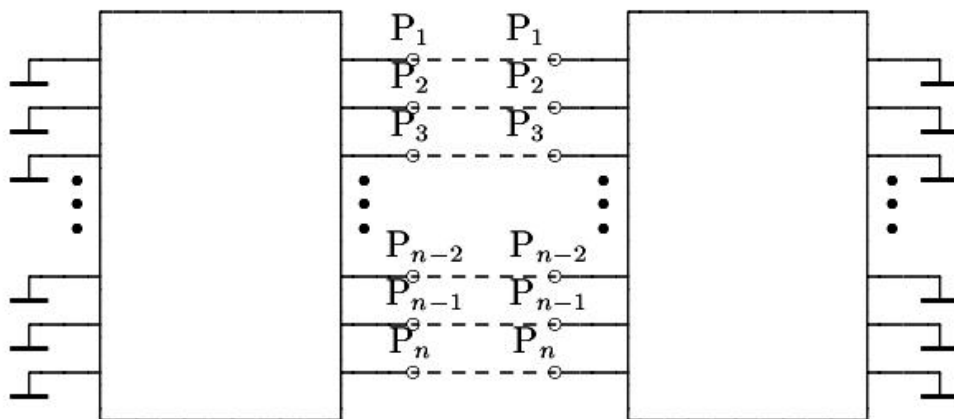


Figura 1: Esquema de la conexión en paralelo de dos n-puertos.

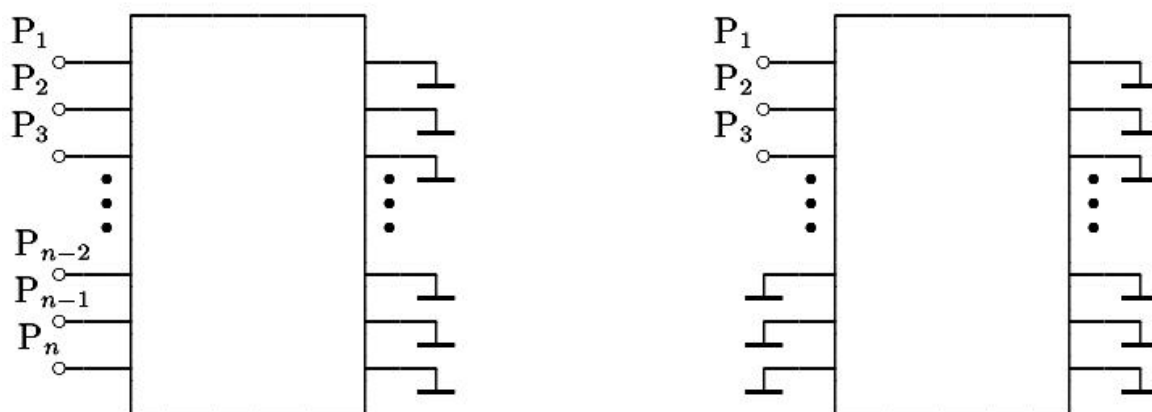


Figura 2:



## Resumen de los resultados del capítulo 7

Finalmente, y continuando con el estudio del complemento de Schur, dado un operador  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , si  $\Sigma(A, \mathcal{S})$  denota el complemento de Schur de  $A$  con respecto a  $\mathcal{S}$ , entonces, la aplicación  $t \rightarrow \Sigma(A^t, \mathcal{S})^{1/t}$ , definida para  $t > 0$ , es decreciente respecto al orden usual. Por lo tanto, existe el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , al cual denotaremos  $\rho(A, \mathcal{S})$  y llamaremos complemento de Schur espectral. Este operador será el objeto de estudio de este capítulo.

Las propiedades del complemento de Schur espectral están íntimamente relacionadas con el denominado orden espectral. Recordemos que dados  $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ , se dice que  $A$  es menor que  $B$  respecto al orden espectral, lo cual denotaremos por medio de  $A \preceq B$ , si  $A^m \leq B^m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . El orden espectral fue extensamente estudiado por M. P. Olson en [101], donde demostró, entre otras, la siguiente caracterización del mismo: dados  $A, B \in L(\mathcal{H})^+$ , entonces  $A \preceq B$  si y sólo si  $f(A) \leq f(B)$  para toda función continua y creciente  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

En la primera sección del capítulo 7 recordamos esta y otras caracterizaciones del orden espectral. En particular, si el espacio  $\mathcal{H}$  tiene dimensión finita, exhibimos una nueva caracterización del orden espectral que se basa en la siguiente observación: si  $A, B \in L(\mathcal{H})$ ,  $A \leq B$  y  $AB = BA$  entonces  $A \preceq B$ . Nuestra caracterización asegura que si  $A, B$  son matrices de  $n \times n$  semidefinidas positivas, entonces  $A \preceq B$  si y sólo si existen  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$  y una sucesión de matrices semidefinidas positivas  $\{D_i\}_{0 \leq i \leq k}$  tales que,  $D_0 = A$ ,  $D_k = B$ ,  $D_i \leq D_{i+1}$  y  $D_i D_{i+1} = D_{i+1} D_i$  ( $i = 0, \dots, k-1$ ).

En la sección 7.2 demostramos las propiedades básicas del  $\rho(A, \mathcal{S})$ . Por ejemplo, demostramos que para todo  $t > 0$ ,

$$\rho(A^t, \mathcal{S}) = \rho(A, \mathcal{S})^t. \quad (10)$$

Esta propiedad, que no es compartida por el complemento de Schur  $\Sigma(A, \mathcal{S})$ , es una de las principales razones para estudiar el operador  $\rho(A, \mathcal{S})$ .

Por otro lado, el orden espectral permite obtener una caracterización del complemento de Schur espectral que se vincula con la definición de Krein, Anderson y Trapp del complemento de Schur:  $\rho(A, \mathcal{S})$  es el mayor elemento  $D \in L(\mathcal{H})^+$  (con respecto a ambos órdenes  $\leq$  y  $\preceq$ ) tal que  $D \preceq A$  y  $R(D) \subseteq \mathcal{S}$  (ver Teorema 7.2.6). Esto nos permite obtener, entre otros, los siguientes resultados: dados  $A, B \in L(\mathcal{H})^+$  y dos subespacios cerrados  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{H}$ ,

1. Si  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$  entonces  $\rho(A, \mathcal{S}) \preceq \rho(A, \mathcal{T})$ .
2. Si  $A \preceq B$  entonces  $\rho(A, \mathcal{S}) \preceq \rho(B, \mathcal{S})$ .
3.  $\rho(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = \rho(\rho(A, \mathcal{S}), \mathcal{T})$ .

Por otro lado, estudiamos las propiedades espectrales del operador  $\rho(A, \mathcal{S})$  (sección 7.3). El principal resultado da una caracterización completa de  $\rho(A, \mathcal{S})$  en términos de la resolución espectral a izquierda de  $A$ : para todo  $\lambda > 0$

$$\aleph_{[\lambda, \infty)}(\rho(A, \mathcal{S})) = \aleph_{[\lambda, \infty)}(A) \wedge P_{\mathcal{S}}, \quad (11)$$



donde si  $P$  y  $Q$  son dos proyecciones ortogonales, entonces  $P \wedge Q$  denota la proyección a la intesección de los rangos de  $P$  y  $Q$ . En particular, a partir de esta identidad podemos deducir los siguientes resultados (en ellos consideramos a  $\rho(A, \mathcal{S})$  actuando sobre  $\mathcal{S}$ ):

1.  $\sigma(\rho(A, \mathcal{S})) \subseteq \sigma(A)$ .
2.  $f(\rho(A, \mathcal{S})) = \rho(f(A), \mathcal{S})$ , para toda función  $f$  definida en  $[0, +\infty)$  creciente, positiva y continua a derecha.
3.  $\lambda_{\min}(A)P_{\mathcal{S}} \leq \rho(A, \mathcal{S})$ , donde  $\lambda_{\min}(C) = \min \sigma(C)$ , para  $C \in L(\mathcal{H})^+$ .
4.  $\lambda_{\min}(\rho(A, \mathcal{S})) = \min\{\mu \in \sigma(A) : P_{\mathcal{S}} \aleph_{[\mu, \mu+\varepsilon)}(A) \neq 0 \ \forall \varepsilon > 0\}$ .

Por otro lado, (11) nos permite elaborar, para matrices, un algoritmo (finito) que a partir de la descomposición espectral de  $A$  obtiene la de  $\rho(A, \mathcal{S})$ .

El caso  $\dim \mathcal{S} = 1$  es particularmente interesante y es por eso que dedicamos la sección 7.4 a estudiarlo. Si  $\mathcal{S}$  es el subespacio generado por el vector unitario  $x$ , denotamos por medio de  $\rho(x, A)$  al único número no negativo tal que  $\rho(A, \mathcal{S}) = \rho(x, A) P_{\mathcal{S}}$ . A continuación resumimos algunos de los resultados obtenidos:

1. Si  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $x \in \mathcal{H}$  es un vector unitario, entonces

$$\rho(x, A) = \min \left\{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{[\mu, \mu+\varepsilon)}(A)x \neq 0 \ \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

2.  $\rho(x, A) = \max\{\lambda \in \sigma(A) : x \in R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A))\}$ .
3. Si  $A$  es inversible, entonces  $\rho(x, A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^{-m}x\|^{-1/m} = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|A^{-m}x\|^{-1/m}$ .
4. Si  $R(A)$  es cerrado y  $x \in R(A)$ , entonces,  $\rho(x, A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|(A^\dagger)^m x\|^{-1/m}$ , donde  $A^\dagger$  denota la inversa generalizada de Moore-Penrose de  $A$ . Si  $x \notin R(A)$ , entonces  $\rho(x, A) = 0$ .
5. Si  $\sigma_{sh}(A) = \{\rho(x, A) : \|x\| = 1\}$ , entonces

$$\sigma_{sh}(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_{pt}(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \forall \varepsilon > 0, \aleph_{[\lambda, \lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0\},$$

donde  $\sigma_{pt}(A)$  denota el espectro puntual de  $A$ , i.e el conjunto de autovalores de  $A$  y  $\sigma_+(A)$  es el conjunto de puntos en  $\sigma(A)$  que son límite por derecha de alguna sucesión de  $\sigma(A) \setminus \{\lambda\}$ . Esto muestra que  $\sigma_{sh}(A)$  es denso en  $\sigma(A)$ , pero  $\sigma_{sh}(A) \neq \sigma(A)$  en general.

6.  $\rho(x, A) \neq 0$  si y sólo si  $x \in R_0(A) := \bigcup_{\lambda > 0} R(\aleph_{[\lambda, \infty)}(A)) \subseteq R(A)$ .

En [60], J. I. Fujii and M. Fujii definieron la complejidad de Kolmogorov:

$$K(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\langle A^n x, x \rangle)}{n} = \log \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}. \quad (12)$$



para una matriz positiva e inversible  $A$  y un vector unitario  $x$ , y demostraron varias propiedades de  $K$ . Se puede probar que, si  $\mathcal{S}$  es el subespacio generado por  $x$ , entonces

$$K(A, x) = \log \rho(x, A^{-1})^{-1}.$$

Esto muestra que el complemento de Schur espectral puede utilizarse para generalizar el concepto de complejidad de Kolmogorov en dos sentidos: por un lado, a operadores (inversibles) sobre espacios de dimensión infinita; por otro lado, a subespacios  $\mathcal{S}$  no necesariamente unidimensionales. En ambos casos, la extensión de la complejidad de Kolmogorov hereda, mutatis mutandis, las propiedades del complemento de Schur espectral.

Finalmente, se analiza qué ocurre con la complejidad de Kolmogorov si el operador  $A \in L(\mathcal{H})^+$  no es inversible. En tal caso, dado  $x \in \mathcal{H}$  y  $A \in L(\mathcal{H})^+$ , denotamos por

$$k(A, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n},$$

de modo que,  $k(A, x) = \exp K(A, x)$  si  $K(A, x)$  está definido como en la ecuación (12). Nuestra definición no utiliza logaritmos para evitar el valor  $-\infty$ .

Si  $x \in \mathcal{H}$  y  $A \in L(\mathcal{H})^+$ , demostramos:

1. Si  $\|x\| = 1$ , entonces la sucesión  $\langle A^n x, x \rangle^{1/n}$  es creciente. Por lo tanto, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A^n x, x \rangle^{1/n}$ .
2.  $k(A, x) = k(A, ax)$  para todo  $0 \neq a \in \mathbb{C}$ .
3.  $k(A, x) = k(A, \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)x)$  para todo  $\lambda > 0$  tal que  $\aleph_{[\lambda, \infty)}(A)x \neq 0$ .
4.  $k(A, x) \neq 0$  (i.e.  $K(A, x) \neq -\infty$ ) si y sólo si  $P_{\overline{R(A)}} x \in R_0(A) \setminus \{0\}$ .
5. Si  $x \neq 0$ , entonces  $k(A, x) \in \sigma(A)$ . Más aún,

$$\{k(A, x) : x \neq 0\} = \{\lambda \in \sigma(A) : \aleph_{(\lambda+\varepsilon, \lambda]}(A)x \neq 0, \forall \varepsilon > 0\},$$

que es denso en  $\sigma(A)$ .

6.  $k(A, x) = \min \{\lambda \in \sigma(A) : x \in R(\aleph_{(-\infty, \lambda]}(A))\}$

$$= \max \left\{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{(\mu-\varepsilon, \mu]}(A)x \neq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \right\}$$

$$= \sup \left\{ \mu \in \sigma(A) : \aleph_{[\mu, \infty)}(A)x \neq 0 \right\}.$$

7. Si el  $R(A)$  es cerrado, entonces

i. Si  $x \in R(A)$  entonces  $k(A, x) = \rho(x, A^\dagger)^{-1}$ .

ii. Si  $x \notin R(A)$ , pero  $Px \neq 0$ , donde  $P = P_{R(A)}$ , entonces

$$k(A, x) = k(A, Px) = \rho\left(\frac{Px}{\|Px\|}, A^\dagger\right)^{-1}.$$

# Capítulo 1

## Operadores definidos en espacios de Hilbert.

### 1.1 Nociones básicas de la teoría de operadores

En esta sección expondremos algunos resultados básicos sobre espacios de Hilbert y el álgebra de operadores acotados sobre dicho espacio, aprovechando esto para introducir la notación básica necesaria para discutir los temas de esta tesis.

A lo largo de este trabajo  $\mathcal{H}$  denotará un espacio de Hilbert complejo cuyo producto interno simbolizaremos por medio de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . El álgebra de operadores (lineales) acotados será denotada por  $L(\mathcal{H})$ , la subálgebra (real) de operadores autoadjuntos por  $L_{sa}(\mathcal{H})$ , el grupo de operadores inversibles por  $GL(\mathcal{H})$  y el cono de operadores positivos por  $L(\mathcal{H})^+$ . Dado  $A \in L(\mathcal{H})$ ,  $R(A)$  denota el rango o imagen de  $A$ ,  $N(A)$  el núcleo de  $A$ ,  $A^*$  el adjunto de  $A$ ,  $\sigma(A)$  el espectro de  $A$ ,  $\rho(A)$  el radio espectral de  $A$  y  $\|A\|$  la norma espectral de  $A$ . Si  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ ,  $\lambda_{min}(A) = \min \sigma(A) = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$ . Por otro lado, dados dos operadores autoadjuntos  $A$  y  $B$ ,  $A \leq B$  si  $B - A \in L(\mathcal{H})^+$ . De aquí en adelante, cuando nos refiramos al orden usual nos estaremos refiriendo a este orden inducido por el cono de operadores positivos.

Dado un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ ,  $P_{\mathcal{S}}$  denotará la proyección ortogonal (i.e. autoadjunta) sobre  $\mathcal{S}$ . Si  $P$  y  $Q$  son proyecciones ortogonales,  $P \wedge Q$  denota la proyección ortogonal sobre  $R(P) \cap R(Q)$ . Si  $B \in L(\mathcal{H})$  satisface que  $P_{\mathcal{S}} B P_{\mathcal{S}} = B$ , consideraremos la compresión de  $B$  a  $\mathcal{S}$ , (i.e. la restricción de  $B$  a  $\mathcal{S}$  como un operador lineal de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$ ), y diremos que pensamos a  $B$  actuando sobre  $\mathcal{S}$ . Usualmente haremos esto cuando querramos considerar el espectro de  $B$  sólo en término de su acción sobre  $\mathcal{S}$ . Por ejemplo, si  $B \geq \lambda P_{\mathcal{S}}$  para cierto  $\lambda > 0$ , entonces  $0 \notin \sigma(B)$ , si pensamos a  $B$  actuando en  $\mathcal{S}$ . Por otro lado, usaremos el hecho de que todo par de subespacios cerrados  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  de  $\mathcal{H}$  induce una representación de los elementos de  $L(\mathcal{H})$  por matrices de  $2 \times 2$  en bloques, del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T} & \\ & \mathcal{T}^\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{T}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{T}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

de modo tal que si  $P$  y  $Q$  son las proyecciones ortogonales sobre  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$  respectivamente



$A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} = QAP : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp} = QA(1 - P) : \mathcal{S}^\perp \rightarrow \mathcal{T}$ , etc. Cuando recurramos a este tipo de representación matricial, nos referiremos a la descomposición que induce el par  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ , o simplemente la descomposición inducida por  $\mathcal{S}$  cuando  $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ . Recíprocamente, dados operadores  $A_{\mathcal{T},\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp} : \mathcal{S}^\perp \rightarrow \mathcal{T}$ , etc., es posible definir un operador  $A \in L(\mathcal{H})$ , al cual denotaremos en forma matricial como en (1.1). En forma análoga, cuando los operadores estén definidos de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  en otro  $\mathcal{H}_2$ , construiremos operadores en  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  a los cuales representaremos en forma matricial. Notar que cuando  $\mathcal{S} = \mathcal{T}$  (resp.  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ )

$$\begin{pmatrix} (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}})^* & (A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}})^* \\ (A_{\mathcal{T},\mathcal{S}^\perp})^* & (A_{\mathcal{T}^\perp,\mathcal{S}^\perp})^* \end{pmatrix},$$

es la matriz que representa a  $A^*$ .

En general, usaremos letras mayúsculas para los operadores, letras minúsculas para los vectores y letras griegas minúsculas para los escalares.

### 1.1.1 Tres topologías localmente convexas

Recordemos rápidamente algunos aspectos elementales sobre las topologías localmente convexas en espacios vectoriales. En primer lugar recordemos que una **seminorma** en un espacio vectorial (complejo)  $\mathcal{V}$  es una función  $p : \mathcal{V} \rightarrow [0, +\infty)$  tal que:

- $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  y todo  $x \in \mathcal{V}$ .
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  para todo  $x, y \in \mathcal{V}$ .

Sea  $\{p_i : i \in I\}$  una familia de seminormas definidas en  $\mathcal{V}$ . La topología en  $\mathcal{V}$  inducidas por estas seminormas es la menor topología con respecto a la cual cada una de ellas es continua en el origen; en esta topología, una red  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de vectores de  $\mathcal{V}$  converge a  $x \in \mathcal{V}$  si y sólo si  $p_\alpha(x - x_\alpha) \rightarrow 0$  para cada  $i \in I$ . Las topologías inducidas por seminormas se denominan **topologías localmente convexas**, mientras que el espacio vectorial dotado de una tal topología se denomina **espacio localmente convexo**.

**Observación 1.1.1.** Usualmente se suele pedir también que  $\bigcap_{i \in I} \{x \in \mathcal{V} : p_i(x) = 0\} = \{0\}$  con el objetivo de que la topología en cuestión resulte Hausdorff. ▲

#### Topología débil en $\mathcal{H}$

**Definición 1.1.2.** La topología débil en  $\mathcal{H}$  es la topología localmente convexa definida por la familia de seminormas  $\{\rho_x : x \in \mathcal{H}\}$ , donde para todo  $x \in \mathcal{H}$

$$\rho_x(y) = |\langle x, y \rangle| \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Es claro que una red  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x \in \mathcal{H}$  débilmente, lo cual notaremos  $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ , si para todo  $y \in \mathcal{H}$  se verifica que

$$\langle x_\alpha, y \rangle \xrightarrow{\alpha} \langle x, y \rangle.$$



En particular si la red  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  converge a  $x \in \mathcal{H}$  en norma, entonces también lo hace respecto a la topología débil (por ello la denominación débil). Por otro lado, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.1.3.** *Sea  $T \in L(\mathcal{H})$ ,  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una red de vectores de  $\mathcal{H}$  y  $x \in \mathcal{H}$ . Luego, si  $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w} x$  entonces  $Tx_\alpha \xrightarrow[\alpha]{w} Tx$ .*

Un conocido resultado de Alaoglu establece que la bola unitaria del espacio dual de un espacio de Banach es compacta con la topología débil estrella. En el caso de espacios reflexivos, como por ejemplo los espacios de Hilbert, dicho resultado se extiende a la topología débil.

**Teorema 1.1.4.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Entonces, la bola unitaria cerrada, i.e.  $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$ , resulta compacta respecto a la topología débil.*

Finalmente, notemos que si el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es separable, i.e posee una base ortonormal numerable, la topología débil es metrizable en subconjuntos acotados de  $\mathcal{H}$ . En efecto, dado  $R > 0$ , sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un conjunto numerable denso en la bola cerrada de radio  $R$ . Entonces  $d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow [0, +\infty)$  definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle (x - y), x_n \rangle|,$$

es una métrica, la cual define en  $\{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq R\}$  una topología que coincide con la inducida por la topología débil del espacio  $\mathcal{H}$ .

### Topologías débil y fuerte de operadores

**Definición 1.1.5.** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. La **topología débil de operadores** es la topología localmente convexa definida sobre  $L(\mathcal{H})$  por las seminormas  $\{p_{x,y} : x, y \in \mathcal{H}\}$ , donde  $p_{x,y}(A) = |\langle Ax, y \rangle|$  para todo  $A \in L(\mathcal{H})$ . La **topología fuerte de operadores** es la topología definida en  $L(\mathcal{H})$  por la familia de seminormas  $\{p_x : x \in \mathcal{H}\}$ , donde  $p_x(A) = \|Ax\|$  para todo  $A \in L(\mathcal{H})$ .

Al igual que la topología débil en  $\mathcal{H}$ , las topologías débil y fuerte de operadores son metrizables en conjuntos acotados si el espacio  $\mathcal{H}$  es separable. También es fácil ver que una red  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de operadores de  $L(\mathcal{H})$  converge a un operador  $A \in L(\mathcal{H})$  en la topología débil de operadores, lo cual denotaremos  $A_\alpha \xrightarrow[\alpha]{\text{wOT}} A$ , si y sólo si, para todo  $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle A_\alpha x, y \rangle \xrightarrow[\alpha]{} \langle Ax, y \rangle.$$

Análogamente, se puede ver que  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  converge al operador  $A$  en la topología fuerte de operadores, lo cual denotaremos  $A_\alpha \xrightarrow[\alpha]{\text{SOT}} A$ , si y sólo si, para todo  $x \in \mathcal{H}$

$$\|A_\alpha x\| \xrightarrow[\alpha]{} \|Ax\|.$$

La siguiente proposición relaciona las convergencias antes mencionadas con el orden usual de operadores.



**Proposición 1.1.6.** *Sea  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente (resp. decreciente) de operadores autoadjuntos acotados superiormente (resp. inferiormente). Entonces, existe  $T \in L(\mathcal{H})$  tal que  $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$  en la topología fuerte de operadores.*

Como mencionamos anteriormente, el teorema de Alaoglu establece que la bola unitaria del dual de un espacio de Banach es débil estrella compacta. En el caso de  $L(\mathcal{H})$ , su predual resulta ser el espacio de los operadores traza. Luego, por un argumento de densidad, se puede ver que en subconjuntos acotados de  $L(\mathcal{H})$  la convergencia débil estrella basta testearla con los operadores de rango uno. A partir de esta observación, no es difícil verificar que, en los subconjuntos acotados, la topología débil estrella inducida por los operadores traza coincide con la topología débil de operadores. De aquí el siguiente resultado:

**Teorema 1.1.7.** *Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Entonces, la bola unitaria cerrada de  $L(\mathcal{H})$ , i.e.  $\{T \in L(\mathcal{H}) : \|T\| \leq 1\}$ , resulta compacta respecto a la topología débil de operadores.*

### 1.1.2 Teorema espectral

Probablemente uno de los teoremas más importantes en la teoría de espacios de Hilbert es el teorema espectral para operadores autoadjuntos. Dado un conjunto localmente compacto  $X$ , por medio de  $\mathcal{B}(X)$  denotaremos al conjunto de funciones definidas en  $X$ , medibles Borel y acotadas.

**Teorema 1.1.8 (Cálculo funcional).** *Dado  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ , existe una única aplicación  $\phi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(\mathcal{H})$  tal que:*

1.  $\phi$  es un  $*$ -morfismo (i.e.  $\phi$  es un morfismo de álgebras tal que  $\phi(\bar{f}) = \phi(f)^*$ ).
2.  $\|\phi(f)\| \leq \|f\|_\infty$ , en particular  $\phi$  es continua.
3. Si  $f(t) = t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $\phi(f) = A$ .
4. Si  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  puntualmente y la sucesión  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada, entonces  $\phi(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{WOT} \phi(f)$ .
5. Si  $Ax = \lambda x$  entonces  $\phi(f)x = f(\lambda)x$ .
6. Si  $f \geq 0$  entonces  $\phi(f) \geq 0$ .
7. Si  $AB = BA$ , para toda  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\phi(f)B = B\phi(f)$ .

Con el objeto de simplificar la notación escribiremos  $f(A)$  en vez de  $\phi(f)$ . Otra manera de formular el teorema espectral tiene que ver con las denominadas medidas espectrales que definimos a continuación:

**Definición 1.1.9.** Sea  $X$  un conjunto,  $\mathfrak{X}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  y  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. Una medida espectral es una función  $E : \mathfrak{X} \rightarrow L(\mathcal{H})$  tal que:





- Para cada  $\Delta \in \mathfrak{X}$ ,  $E(\Delta)$  es una proyección ortogonal.
- $E(\emptyset) = 0$  y  $E(X) = I$ .
- $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$  para todo  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{X}$ .
- Si  $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son subconjuntos de  $\mathfrak{X}$  dos a dos disjuntos, entonces

$$E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n),$$

donde la convergencia de la serie es respecto a la topología fuerte de operadores.

Notemos que en particular, si definimos  $E_{x,y} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y \rangle,$$

entonces  $E_{x,y}$  resulta una medida compleja de variación total menor o igual a  $\|x\|\|y\|$ .

A partir del Teorema 1.1.8, es fácil ver que dado  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ , se puede definir una medida espectral sobre los borelianos de la recta del siguiente modo:

$$E(\Delta) = \aleph_{\Delta}(A),$$

donde  $\aleph_{\Delta}$  denota la función característica del conjunto  $\Delta$ . La recíproca también vale, y ese es el contenido de la siguiente versión del teorema espectral.

**Teorema 1.1.10 (Medidas espectrales).** *Dada una medida espectral  $E$  definida en los borelianos de la recta y con soporte compacto, existe un único operador  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$  tal que*

$$E_A(\Delta) = \aleph_{\Delta}(A).$$

Una notación muy utilizada que vincula ambos teoremas es la siguiente: sea  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ ,  $E$  su medida espectral y  $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible borel y acotada, entonces:

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f dE.$$

Esta notación está motivada por el hecho de que para cada  $x, y \in \mathcal{H}$  se tiene:

$$\langle f(A)x, y \rangle = \int_{\sigma(A)} f dE_{x,y}.$$

Asociadas a las medidas espectrales se encuentran las resoluciones espectrales.

**Definición 1.1.11.** Dada una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathcal{H})$ , diremos que  $f$  es una resolución espectral a derecha (resp. a izquierda) si



1. Existen  $m, M \in \mathbb{R}$  tales que  $f(\lambda) = 0$  si  $\lambda < m$  y  $f(\lambda) = I$  si  $\lambda > M$  (resp.  $f(\lambda) = I$  para  $\lambda < m$  y  $f(\lambda) = 0$  para  $\lambda > M$ ).
2.  $f(\lambda)$  es una proyección ortogonal (i.e. autoadjunta), para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
3. Si  $\lambda \leq \mu$  entonces  $f(\lambda) \leq f(\mu)$  (resp.  $f(\lambda) \geq f(\mu)$ ) respecto al orden usual.
4.  $f$  es continua a derecha (resp. a izquierda).

Las resoluciones espectrales son algo así como el correlato no conmutativo de las funciones de acumulación. Un resultado clásico de la teoría espectral, similar al teorema 1.1.10, asegura que dada una resolución espectral  $f$ , existe un único operador  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$  tal que  $f$  es su resolución espectral, lo cual significa que

$$f(\lambda) = E_A((-\infty, \lambda]) = \aleph_{(-\infty, \lambda]}(A) \quad (1.2)$$

(resp.  $f(\lambda) = E_A([\lambda, \infty)) = \aleph_{[\lambda, \infty)}(A)$ ). Recíprocamente, si  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ , la función  $f$  definida por la ecuación (1.2) es una resolución espectral a derecha (resp. a izquierda).

La relación entre resoluciones espectrales a izquierda y a derecha esta dada por la siguiente identidad: si  $A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ , entonces  $E_A([-\lambda, \infty)) = E_{-A}((-\infty, \lambda])$ . Por otro lado, si  $f$  es una resolución espectral a izquierda, entonces  $g(\lambda) = f(-\lambda)$  es una resolución espectral a derecha. Luego, si  $A$  es el operador asociado a  $g$ , entonces  $-A$  es el operador asociado a  $f$ .

Cabe mencionar que si  $\dim \mathcal{H} < \infty$  los teoremas espectrales antes mencionados se reducen al conocido teorema espectral para matrices autoadjuntas de álgebra lineal. En tal caso, recordemos que  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ , donde  $\sigma_p(A)$  denota el conjunto de autovalores de  $A$  también conocido con el nombre de espectro puntual de  $A$ . El lector interesado en más detalles sobre la teoría espectral de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert, como así también en otros cálculos funcionales es remitido a los excelentes libros de Kadison y Ringrose [78] y Pedersen [104].

Teniendo a mano el teorema espectral, podemos mencionar el siguiente resultado que será de gran utilidad. El lector interesado encontrará una demostración del mismo en [103] (Proposición 2.3.2).

**Proposición 1.1.12.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(0) = 0$  y  $|f(t)| \leq \alpha|t| + \beta$  para ciertas constantes positivas  $\alpha$  y  $\beta$ . Entonces, si  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una red en  $L_{sa}(\mathcal{H})$  tal que  $A_\lambda \xrightarrow[\lambda]{SOT} A \in L_{sa}(\mathcal{H})$ , se tiene que  $f(A_\lambda) \xrightarrow{SOT} f(A)$ , i.e.  $f : L_{sa}(\mathcal{H}) \rightarrow L_{sa}(\mathcal{H})$  es continua respecto a la topología SOT. En particular  $f(t) = t^r$  para  $0 \leq r \leq 1$  es SOT-continua en  $L(\mathcal{H})^+$ .*

## 1.2 Ángulo entre subespacios cerrados

A continuación consideraremos dos nociones de ángulo entre subespacios de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Sugerimos al lector interesado referirse al trabajo de Deutsch [48] como así



también a los libros de Kato [79] y Havin and Jöricke [69] para más detalles. A lo largo de esta sección  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  serán dos subespacios cerrados fijos de  $\mathcal{H}$ . Por medio de  $\tilde{\mathcal{M}}$  y  $\tilde{\mathcal{N}}$  denotaremos a los subespacios definidos del siguiente modo:

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \ominus (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}).$$

Por otro lado,  $\mathcal{M}_1 = \{\xi \in \mathcal{M} : \|\xi\| = 1\}$ .

**Definición 1.2.1 (Friedrichs).** El ángulo de Friedrichs entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  es el ángulo en  $[0, \pi/2]$  cuyo coseno está definido por

$$c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{|\langle \xi, \eta \rangle| : \xi \in \tilde{\mathcal{M}}, \eta \in \tilde{\mathcal{N}} \text{ and } \|\xi\| = \|\eta\| = 1\}.$$

El seno de este ángulo se define de la forma usual como  $s[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = (1 - c[\mathcal{M}, \mathcal{N}])^{1/2}$ .

**Definición 1.2.2 (Dixmier).** El ángulo de Dixmier entre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  es el ángulo en  $[0, \pi/2]$  cuyo coseno está definido por

$$c_0[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \sup\{|\langle \xi, \eta \rangle| : \xi \in \mathcal{M}, \eta \in \mathcal{N} \text{ and } \|\xi\| = \|\eta\| = 1\}$$

**Proposición 1.2.3.**

1.  $0 \leq c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] \leq c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] \leq 1$
2.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c_0[\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{N}] = c_0[\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{N}}] = c_0[\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{N}}]$
3.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{N}, \mathcal{M}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp]$
4.  $c_0[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}\|^{1/2}$ .
5.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \|P_{\mathcal{M}}P_{\tilde{\mathcal{N}}}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} - P_{(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})}\| = \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp}\|$ .

*Demostración.* La mayoría de estos resultados sobre ángulos son consecuencia inmediatamente de la definición. La única excepción es la identidad  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp]$ , la cual será demostrada más adelante cuando hayamos definido ciertas nociones que nos permitirán dar una demostración corta y conceptual (ver Proposición 1.4.4). ■

**Proposición 1.2.4.** El seno entre los subespacios  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  puede caracterizarse del siguiente modo:

$$s[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = d(\tilde{\mathcal{M}}_1, \mathcal{N}) = d(\tilde{\mathcal{N}}_1, \mathcal{M}).$$



*Demostración.* Por la Proposición 1.2.3, podemos suponer que  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ , i.e.,  $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$ . Por la definición del seno y la Proposición 1.2.3,  $s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]^2 = 1 - \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\|^2$ . Por otro lado,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{M}_1, \mathcal{N})^2 &= \inf\{\|P_{\mathcal{N}^\perp} x\|^2 : x \in \mathcal{M}_1\} = \inf\{1 - \|P_{\mathcal{N}} x\|^2 : x \in \mathcal{M}_1\} \\ &= 1 - \sup\{\|P_{\mathcal{N}} x\|^2 : x \in \mathcal{M}_1\} = 1 - \|P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}\|^2 = 1 - \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\|^2, \end{aligned}$$

puesto que  $d(x, \mathcal{N}) = \|P_{\mathcal{N}^\perp} x\|$ , para cada  $x \in \mathcal{H}$ . ■

**Observación 1.2.5.** Sea  $\mathcal{M}$  un subespacio cerrado y  $\mathcal{N}$  un subespacio tal que  $\dim \mathcal{N} < \infty$  y  $\mathcal{N} \not\subseteq \mathcal{M}$ . Entonces  $\tilde{\mathcal{N}}_1$  es compacta (y  $\neq \emptyset$ ), y por lo tanto  $0 < d(\tilde{\mathcal{N}}_1, \mathcal{M}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ , o sea que  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] < 1$ . Sin embargo, si ambos subespacios tienen dimensión infinita, bien puede pasar que  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  tengan “ángulo nulo” aunque  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ . Agregar ejemplo y comentario sobre cómo son todos los ejemplos de pares de subespacios con ángulo malo.

**Corolario 1.2.6.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  es cerrado.
2.  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] < 1$ .
3. Existe  $c_0 > 0$  tal que, para  $\xi \in \mathcal{M}$  y  $\eta \in \tilde{\mathcal{N}}$ ,  $\|\xi + \eta\| \geq c_0 \|\xi\|$ .

Más aún, la mejor constante para (3) es  $c_0 = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$ , pues  $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus \tilde{\mathcal{N}}$ . Cuentas no muy complicadas muestran que

$$c_0 = \sup\{c \geq 0 : \|\xi + \eta\| \geq c\|\xi\|, \forall \xi \in \mathcal{M}, \eta \in \mathcal{N}\} = d(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}].$$

Supongamos que  $c_0 > 0$ . Dada una sucesión  $\xi_n + \eta_n \in \mathcal{M} + \mathcal{N}$  que converge a  $\rho$ , entonces  $\|\xi_n - \xi_m\| \leq c_0^{-1} \|\xi_n + \eta_n - \xi_m - \eta_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ . Por lo tanto,  $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi \in \mathcal{M}$  y  $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho - \xi \in \mathcal{N}$ . Luego,  $\rho \in \mathcal{M} + \mathcal{N}$ . Recíprocamente, si  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$  es cerrado, entonces la proyección  $Q$  de  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$  sobre  $\mathcal{M}$  definida por  $Q(\xi + \eta) = \xi$  es acotada. En consecuencia, podemos tomar  $c_0 = \|Q\|^{-1} > 0$ . ■

**Corolario 1.2.7 (Ljance-Ptak).** *Supongamos que  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$  y sea  $Q \in L(\mathcal{H})$  la proyección sobre  $\mathcal{M}$  con núcleo  $\mathcal{N}$ . Entonces*

$$\|Q\| = \left(1 - \|P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\|^2\right)^{-1/2} = \left(1 - c[\mathcal{M}, \mathcal{N}]\right)^{-1/2} = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]^{-1} \quad (1.3)$$

*Demostración.* La fórmula (1.3) se deduce de la última parte de la prueba anterior. ■

Dadas dos proyecciones ortogonales  $P$  y  $Q$ , muchas veces estamos tentados a pensar que la proyección sobre  $R(P) \cap R(Q)$  es simplemente  $PQ$ . Lamentablemente esto sólo es cierto cuando  $P$  y  $Q$  conmutan. En general, lo que se puede decir es lo siguiente:



**Proposición 1.2.8 (Kayalar-Weinert [80]; ver también [48]).** Sean  $P$  y  $Q$  dos proyecciones ortogonales definidas sobre  $\mathcal{H}$ . Entonces,

$$\|(PQ)^k - P \wedge Q\| = c[R(P), R(Q)]^{2k-1}$$

donde, como ya hemos mencionado anteriormente,  $P \wedge Q$  denota la proyección ortogonal sobre  $R(P) \cap R(Q)$ .

*Demostración.* Sean  $\tilde{P} = P(1 - P \wedge Q)$  y  $\tilde{Q} = Q(1 - P \wedge Q)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \|(PQ)^k - P \wedge Q\|^2 &= \|(PQ)^k(1 - P \wedge Q)\|^2 = \|(\tilde{P}\tilde{Q})^k\|^2 \\ &= \|(\tilde{Q}\tilde{P})^k(\tilde{P}\tilde{Q})^k\| = \|(\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q})^{2k-1}\| = \|\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q}\|^{2k-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la Proposición 1.2.3, se tiene que  $\|\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{Q}\| = c[R(P), R(Q)]^2$ . Por lo tanto

$$\|(PQ)^k - P \wedge Q\|^2 = c[R(P), R(Q)]^{2(2k-1)},$$

lo cual concluye la demostración. ■

## 1.3 Inversas generalizadas.

**Definición 1.3.1.** Dados  $A, B \in L(\mathcal{H})$ , decimos que  $B$  es una inversa generalizada de  $A$  si

$$ABA = A \quad \text{y} \quad BAB = B.$$

Al conjunto de inversas generalizadas de  $A$  lo denotaremos por medio de  $GI(A)$ . ▲

**Teorema 1.3.2.** Sea  $A \in L(\mathcal{H})$ .

1. Si  $B \in GI(A)$ , entonces

i  $AB$  es un proyector (oblicuo) con  $R(AB) = R(A)$ .

ii  $BA$  es un proyector (oblicuo) con  $N(BA) = N(A)$ .

2.  $A$  tiene rango cerrado si y sólo si  $GI(A) \neq \emptyset$ .

3. En tal caso, para cada par  $P, Q \in L(\mathcal{H})$  de proyectores oblicuos tales que  $R(P) = R(A)$  y  $N(Q) = N(A)$ , existe un único  $B \in GI(A)$  tal que  $AB = P$  y  $BA = Q$ .

*Demostración.*

1. Sea  $B \in GI(A)$ . Entonces

$$(BA)^2 = BABA = BA \quad \text{y} \quad (AB)^2 = ABAB = AB.$$

Es claro que  $R(AB) \subseteq R(A)$ . Pero también  $R(A) = R(ABA) \subseteq R(AB)$ . Por otra parte,  $N(A) \subseteq N(BA) \subseteq N(ABA) = N(A)$ .



2. Si  $B \in GI(A)$ , entonces  $R(A) = R(AB)$ , que es cerrado al ser la imagen de un proyector. La recíproca se deducirá del ítem 3, aplicado a los proyectores  $P = P_{R(A)}$  y  $Q = I - P_{N(A)}$ .
3. Supongamos que  $R(A)$  es cerrado, y sean  $P, Q \in L(\mathcal{H})$  proyectores oblicuos tales que  $R(P) = R(A)$  y  $N(Q) = N(A)$ . Llamemos  $\mathcal{S} = N(P)$  y  $\mathcal{T} = R(Q)$ . Luego  $N(A) \oplus \mathcal{T} = \mathcal{H}$ , y por ende  $A|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow R(A)$  es inversible. Llamemos  $B_0 : R(A) \rightarrow \mathcal{T}$  a su inversa, y definamos

$$B : \mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus R(A) \rightarrow N(A) \oplus \mathcal{T} = \mathcal{H} \quad \text{por} \quad B(x \oplus y) = B_0 y, \quad x \in \mathcal{S}, y \in R(A).$$

Como  $B_0$  es acotado, por el teorema de la imagen abierta, se deduce que  $B \in L(\mathcal{H})$ . En efecto,  $\|B\| \leq \|B_0\| \|P\|$ , porque  $B(z) = B_0(Pz)$ ,  $z \in \mathcal{H}$ . Por otra parte, cálculos elementales muestran que  $B \in GI(A)$ ,  $AB = P$  y  $BA = Q$ .

■

**Definición 1.3.3.** Dado  $A \in L(\mathcal{H})$  con rango cerrado, se llama  $A^\dagger$  al único elemento de  $GI(A)$  tal que  $A^\dagger A$  y  $AA^\dagger$  son proyectores autoadjuntos.

**Corolario 1.3.4.** Dado  $A \in L(\mathcal{H})$ ,  $R(A)$  es cerrado si y sólo si  $R(A^*)$  es cerrado. Más aún,  $SI(A^*) = \{B^* : B \in SI(A)\}$ . En particular  $(A^*)^\dagger = (A^\dagger)^*$ .

*Demostración.* La igualdad  $SI(A^*) = \{B^* : B \in SI(A)\}$  se deduce directamente de la definición de inversa generalizada. Luego la primera parte es consecuencia del Teorema 1.3.2. La última, del hecho de que  $(A^\dagger)^*$  verifica las condiciones de la definición de  $(A^*)^\dagger$ . ■

**Corolario 1.3.5.** Sea  $A \in L(\mathcal{H})$  un operador con rango cerrado,  $P$  una proyección cuyo rango es  $R(A)$  y  $Q$  un proyección cuyo núcleo es  $N(A)$ . Entonces  $B = QA^\dagger P$  es la única inversa generalizada tal que  $AB = P$  y  $BA = Q$ .

*Demostración.* En efecto, por un lado

$$BA = B = QA^\dagger PA = QA^\dagger A = QP_{N(A)^\perp} = Q(I - P_{N(A)}) = Q.$$

y por otro

$$(AB)^* = P^* A^{*\dagger} Q^* A^* = P^* A^{*\dagger} A^* = P^* P_{R(A)} = (P_{R(A)} P)^* = P^*.$$

■

### Ejemplos 1.3.6.

1. Si  $A \in GL(\mathcal{H})$ , entonces  $GI(A) = \{A^{-1}\}$ . En particular,  $A^\dagger = A^{-1}$ .
2. Si  $U \in L(\mathcal{H})$  es una isometría parcial (i.e.,  $U$  es isométrico en  $N(U)^\perp$ ), entonces  $U^\dagger = U^*$ .



3. Si  $A$  es normal y  $R(A)$  es cerrado, entonces  $A$  conmuta con  $A^\dagger$ .

4. Si  $A \in L(\mathcal{H})$  tiene  $R(A)$  cerrado, y  $S \in GL(\mathcal{H})$ , entonces

$$GI(SAS^{-1}) = \{SBS^{-1} : B \in GI(A)\},$$

pero no es fácil averiguar quién es  $(SAS^{-1})^\dagger$ .

5. Si  $A \in L(\mathcal{H})$  tiene  $R(A)$  cerrado, y  $V, W \in \mathcal{U}(n)$ , entonces  $(VAW)^\dagger = W^*A^\dagger V^*$ .

6. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  es una matriz diagonal  $A = \text{diag}(x)$  para cierto  $x \in \mathbb{C}^n$ , entonces  $A^\dagger = \text{diag}(x^\dagger)$ , donde  $x^\dagger \in \mathbb{C}^n$  está dado por

$$x_i^\dagger = \begin{cases} x_i^{-1} & \text{si } x_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_i = 0. \end{cases}$$

7. Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  con  $\text{rk}(A) = k$ . Si  $V, W \in \mathcal{U}(n)$  verifican  $A = W^*\Sigma(A)V$ , entonces,

$$A^\dagger = V^*\Sigma(A)^\dagger W = V^*\text{diag}(s_1(A)^{-1}, \dots, s_k(A)^{-1}, 0, \dots, 0)W.$$

▲

La siguiente, es un caso particular de una identidad demostrada por Stewart en [114].

**Proposición 1.3.7.** Sean  $A, B \in L_{sa}(\mathcal{H})$  operadores con rango cerrado. Entonces:

$$B^\dagger - A^\dagger = -B^\dagger(B - A)A^\dagger + (I - B^\dagger B)(B - A)(A^\dagger)^2 + (B^\dagger)^2(B - A)(I - AA^\dagger).$$

En particular, si  $R(B) \subseteq R(A)$ ,

$$B^\dagger - A^\dagger = -B^\dagger(B - A)A^\dagger + (I - B^\dagger B)(B - A)(A^\dagger)^2.$$

## 1.4 Módulo mínimo reducido

**Definición 1.4.1.** El *módulo mínimo reducido*  $\gamma(T)$  de un operador  $T \in L(\mathcal{H})$  se define como

$$\gamma(T) = \inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1, x \in N(T)^\perp\} \quad (1.4)$$

▲

**Proposición 1.4.2.** Sea  $T \in L(\mathcal{H})$  (no nulo). Entonces:

1.  $T$  tiene rango cerrado si y sólo si  $\gamma(T) > 0$ .

2.  $\gamma(T) = \gamma(T^*)$ . Más aún, si  $T$  tiene rango cerrado, entonces  $\gamma(T) = \|T^\dagger\|^{-1}$ .



*Demostración.*

1. Si  $T$  tiene rango cerrado, por el teorema del gráfico cerrado,  $T : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$  es inversible y la inversa es acotada. Claramente la norma de la inversa coincide con  $(\gamma(T))^{-1}$ , razón por la cual  $\gamma(T) > 0$ . Recíprocamente si  $\gamma(T) > 0$ ,  $T|_{N(T)^\perp}$  es acotado inferiormente. Por lo tanto  $R(T|_{N(T)^\perp})$  es cerrado. Como  $R(T|_{N(T)^\perp}) = R(T)$  la recíproca queda demostrada.
2. Si  $T$  fuera inversible,  $T^\dagger = T^{-1}$  (que es la única inversa generalizada de  $T$ ) y, por otra parte,

$$\gamma(T) = \inf \{ \|y\| : \|T^{-1}y\| = 1 \} = \inf \left\{ \frac{\|x\|}{\|T^{-1}x\|} : x \neq 0 \right\} = \|T^{-1}\|^{-1}.$$

Si  $R(T)$  es cerrado,  $T^\dagger|_{R(T)} : R(T) \rightarrow N(T)^\perp$  es la inversa de  $T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$ .

Por lo tanto, razonando como en el caso anterior, se obtiene que  $\gamma(T) = \|T^\dagger\|^{-1}$  (se usa que  $N(T^\dagger) = R(T)^\perp$ , por lo que  $\|T^\dagger|_{R(T)}\| = \|T^\dagger\|$ ). Además, como  $(T^*)^\dagger = (T^\dagger)^*$ , se tiene que

$$\gamma(T^*) = \|(T^*)^\dagger\|^{-1} = \|(T^\dagger)^*\|^{-1} = \|T^\dagger\|^{-1} = \gamma(T).$$

■

**Proposición 1.4.3.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ . Entonces

$$\gamma(P_{\mathcal{M}^\perp}P_{\mathcal{N}}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{R} = \mathcal{M}^\perp$ . Dado que  $N(P_{\mathcal{R}}P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}^\perp \oplus (\mathcal{N} \cap \mathcal{M})$ , se tiene

$$N(P_{\mathcal{R}}P_{\mathcal{N}})^\perp = \mathcal{N} \cap (\mathcal{N} \cap \mathcal{M})^\perp = \tilde{\mathcal{N}}.$$

Luego, por la Proposición 1.2.3,

$$\gamma(P_{\mathcal{R}}P_{\mathcal{N}}) = \inf_{x \in \tilde{\mathcal{N}}_1} \|P_{\mathcal{R}}x\| = \inf_{x \in \tilde{\mathcal{N}}_1} d(x, \mathcal{M}) = d(\tilde{\mathcal{N}}_1, \mathcal{M}) = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}].$$

■

**Proposición 1.4.4.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ . Entonces

$$c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp].$$

*Demostración.* Recordemos que para todo  $T \in L(\mathcal{H})$ ,  $\gamma(T) = \gamma(T^*)$ . Entonces, por la Proposición 1.4.3,

$$s[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp] = \gamma(P_{\mathcal{M}^\perp}P_{\mathcal{N}^\perp}) = \gamma(P_{\mathcal{N}^\perp}P_{\mathcal{M}^\perp}) = s[\mathcal{N}, \mathcal{M}] = s[\mathcal{M}, \mathcal{N}].$$

En consecuencia,  $c[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = c[\mathcal{M}^\perp, \mathcal{N}^\perp]$ .

■





**Proposición 1.4.5.** Sean  $A, B \in L(\mathcal{H})$  operadores con rango cerrado. Entonces,

$$\gamma(A)\gamma(B) s [N(A), R(B)] \leq \gamma(AB) \leq \|A\| \|B\| s [N(A), R(B)] \quad (1.5)$$

Dividiremos la demostración de esta Proposición en varias partes. En primer lugar, enunciaremos una consecuencia simple de (1.4):

**Lema 1.4.6.** Sea  $T \in L(\mathcal{H})$  un operador con rango cerrado y  $S$  un operador inversible. Entonces,

$$\|S^{-1}\|^{-1}\gamma(T) \leq \gamma(ST) \leq \|S\|\gamma(T).$$

Más aún, la misma fórmula vale si reemplazamos  $S^{-1}$  por  $S^\dagger$ , si pedimos que  $R(S)$  sea cerrado y que  $R(T) \subseteq N(S)^\perp$ .

A continuación, demostraremos un caso particular de la Proposición 1.4.5.

**Lema 1.4.7.** Sean  $U, V \in L(\mathcal{H})$  isometrías parciales. Entonces,  $\gamma(UV) = s [N(U), R(V)]$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M} = R(V)$  y  $\mathcal{N} = N(U)^\perp$ . Por un lado,

$$\gamma(UV)^2 = \gamma(UVV^*U^*) = \gamma(UP_{\mathcal{M}}U^*) = \gamma(P_{\mathcal{M}}U^*UP_{\mathcal{M}}) = \gamma(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}).$$

Por otro lado,  $N(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}) = N(P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^\perp \oplus (\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{M})$ . Por lo tanto, obtenemos que

$$\gamma(UV)^2 = \gamma(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}) = \inf \left\{ \left\| (P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}})x \right\| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{M} \ominus (\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{M}) \right\}.$$

Pero, si consideramos  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{M} \ominus (\mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{M})}$ , la cadena de igualdades precedente nos dice que  $\gamma(UV)^2 = \min \sigma(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}})$ . En consecuencia, por la Proposición 1.2.3, resulta que  $\gamma(UV) = s [\mathcal{N}^\perp, \mathcal{M}] = s [N(U), R(V)]$ . ■

*Demostración de la Proposición 1.4.5.* Sean  $A^* = U^*|A^*|$  y  $B = V|B|$  las descomposiciones polares de  $A^*$  y  $B$  respectivamente. Como,  $|A^*|$  y  $|B|$  poseen rango cerrado,  $R(U) = R(|A^*|)$ , y  $R(V^*) = R(|B|)$ , y usando el Lema 1.4.6 se tiene que

$$\gamma(AB) = \gamma(|A^*|UV|B|) \leq \| |A^*| \| \gamma(UV|B|) = \|A\| \gamma(|B|V^*U^*) \leq \|A\| \|B\| \gamma(UV),$$

y análogamente

$$\gamma(AB) = \gamma(|A^*|UV|B|) \geq \gamma(|A^*|) \gamma(UV|B|) = \gamma(A) \gamma(|B|V^*U^*) \geq \gamma(A) \gamma(B) \gamma(UV).$$

Finalmente, por el Lema 1.4.7,  $\gamma(UV) = s [N(U), R(V)] = s [N(A), R(B)]$ , y por ende

$$\gamma(A)\gamma(B) s [N(A), R(B)] \leq \gamma(AB) \leq \|A\| \|B\| s [N(A), R(B)].$$

■

**Corolario 1.4.8.** Sean  $A, B \in L(\mathcal{H})$  operadores con rango cerrado. Entonces,  $AB$  tiene rango cerrado si y sólo si  $c[R(B), N(A)] < 1$ .



## Capítulo 2

# Proyecciones oblicuas y complemento de Schur

### 2.1 Teorema de factorización de Douglas.

**Teorema 2.1.1 (Douglas).** Sean  $A \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$  y  $B \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ . Entonces son equivalentes:

1.  $R(A) \subseteq R(B)$
2.  $AA^* \leq \lambda BB^*$  para algún  $\lambda \geq 0$
3.  $A = BC$  para cierto operador acotado  $C$ .

Más aún, existe un único operador  $C$  tal que  $R(C) \subseteq \overline{R(B^*)}$ . A dicho operador nos referiremos como la **solución reducida** de la ecuación  $A = BX$ . Dicha solución reducida satisface además las siguientes propiedades:

$$i \text{ } \ker C = \ker A$$

$$ii \text{ } \|C\|^2 \min\{\lambda : AA^* \leq \lambda BB^*\}$$

*Demostración.*

$3 \Rightarrow 1)$  Es claro.

$3 \Rightarrow 2)$  Como todo  $D \in L(\mathcal{H}_3)^+$  verifica que  $D \leq \|D\|I$ , se tiene que

$$AA^* = BCC^*B^* \leq \|CC^*\|BB^*$$

$2 \Rightarrow 3)$  La condición  $AA^* \leq \lambda BB^*$  es equivalente a que  $\|A^*x\| \leq \lambda^{1/2}\|B^*x\|$  para todo  $x \in \mathcal{H}_3$ . En particular,  $\ker(B^*) \subseteq \ker(A^*)$ . Por lo tanto, es posible definir  $T : R(B^*) \rightarrow R(A^*)$  del siguiente modo:

$$T(B^*x) = A^*x .$$



Es claro que  $T$  está bien definido y es lineal. Como  $\|A^*x\| \leq \lambda^{1/2}\|B^*x\|$  para todo  $x \in \mathcal{H}_3$ , deducimos que  $T$  es acotado ( $\|Ty\| \leq \lambda^{1/2}\|y\|$ ,  $y \in R(B^*)$ ). Extendemos  $T$  (manteniendo su nombre) a  $\overline{R(B^*)}$  por continuidad y luego a todo  $\mathcal{H}_2$  como cero en  $R(B^*)^\perp$ . Queda que  $T \in L(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ , con  $\|T\| \leq \lambda^{1/2}$ . Es claro que  $A^* = TB^*$ , lo cual muestra que el operador que estamos buscando es  $C = T^* \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ . Notar que  $R(C) \subseteq \ker T^\perp \subseteq \overline{R(B^*)} = \ker B^\perp$ .

1  $\Rightarrow$  3) La condición  $R(A) \subseteq R(B)$  permite asegurar que para todo  $x \in \mathcal{H}_1$  existe un único  $y \in \ker B^\perp$  tal que  $Ax = By$ . Definamos  $C : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  como  $Cx = y$ . Para ver que  $C \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  basta verificar que su gráfico es cerrado. Sea  $(x_n, y_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) una sucesión de puntos en el gráfico de  $C$  tal que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  e  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ , luego

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} By_n = By$$

es decir  $(x, y)$  pertenece al gráfico de  $C$ .

Es claro que la inclusión  $R(C) \subseteq \overline{R(B^*)} = \ker B^\perp$  identifica unívocamente al operador  $C$ , puesto que  $BC = A$  y  $B$  es inyectivo en  $\ker B^\perp$ . Observar que tanto el  $C$  construido en (1  $\Rightarrow$  3) como el construido en (2  $\Rightarrow$  3) cumplen esa inclusión, y por ende coinciden.

Verifiquemos ahora este  $C$  satisface (i) y (ii). Como,  $A = BC$ , vemos que  $\ker C \subseteq \ker A$ . Por otro lado, si  $x \in \ker A$ , entonces el único  $y \in \ker B^\perp$  tal que  $By = Ax = 0$  es  $y = 0$ , por lo que  $Cx = 0$ . Esto muestra que  $\ker A \subseteq \ker C$ . Por otro lado, vimos en (2  $\Rightarrow$  3) que  $\|C\| = \|T\| \leq \lambda^{1/2}$ , para todo  $\lambda$  tal que  $AA^* \leq \lambda BB^*$ . La otra desigualdad es clara, puesto que  $AA^* = BCC^*B^* \leq \|C\|^2 BB^*$ . ■

**Corolario 2.1.2.** Sea  $A \in L(\mathcal{H})^+$ . Entonces  $R((AA^*)^{1/2}) = R(A)$ .

*Demostración.* Dado que  $AA^* = (AA^*)^{1/2}((AA^*)^{1/2})^*$ , usando la equivalencia entre (1) y (2) del Teorema de Douglas se tiene que  $R((AA^*)^{1/2}) = R(A)$ . ■

**Corolario 2.1.3.** Sean  $A, B \in L(\mathcal{H})$  Entonces  $R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{1/2})$

*Demostración.* Consideremos en  $L(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  el operador

$$T := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que  $R(T) = R(A) + R(B)$  y que  $R((TT^*)^{1/2}) = R((AA^* + BB^*)^{1/2})$ . Luego, usando el corolario 2.1.2, se tiene que  $R(A) + R(B) = R((AA^* + BB^*)^{1/2})$ . ■

**Proposición 2.1.4.** Sean  $A \in L(\mathcal{H})^+$  cuya descomposición matricial respecto a un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  está dada por  $\begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$ . Entonces  $R(A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}) \subseteq R((A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2})$ .



*Demostración.* Como

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{pmatrix} I_{\mathcal{S}} & 0 \\ -A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1} & I_{\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathcal{S}} & -(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1}A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ 0 & I_{\mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I_{\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} - A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I)^{-1}A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

resulta que

$$A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I_{\mathcal{S}})^{-1}A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \leq A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp}.$$

Por la tanto, usando el teorema de Douglas obtenemos

$$R(A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I_{\mathcal{S}})^{-1/2}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp}^{1/2}).$$

Finalmente, como  $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} + I_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}$ , se tiene que  $R(A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}) \subseteq R((A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2})$ . ■

## 2.2 Complemento de Schur en espacios de Hilbert.

Comenzaremos con el siguiente resultado obtenido por Krein en 1947 y redescubierto por Anderson-Trapp en 1975, el cual dará origen a la definición de Shorted de un operador.

**Teorema 2.2.1 (Krein [81], Anderson and Trapp [4], [5]).** *Sea  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado. Entonces*

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{S}) := \{D : 0 \leq D \leq A \text{ } R(D) \subseteq \mathcal{S}\}$$

*posee un elemento máximo.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$  y  $A_{/\mathcal{S}} = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$ . Claramente  $A_{/\mathcal{S}} \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ . Por otra parte, si  $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ , en particular  $D \leq A$ , y por el teorema de Douglas existe una contracción  $C$  tal que  $D^{1/2} = A^{1/2}C$ . Dado que rango de dicha contracción está contenido en  $\mathcal{M}$ ,  $CC^* \leq P_{\mathcal{M}}$ , pero entonces

$$D = A^{1/2}CC^*A^{1/2} \leq A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2} = A_{/\mathcal{S}},$$

lo cual muestra que  $A_{/\mathcal{S}} = \max \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ . ■

**Definición 2.2.2.** Sean  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Llamaremos shorted de  $A$  al subespacio  $\mathcal{S}$ , y lo notaremos  $\Sigma(A, \mathcal{S})$ , al máximo del conjunto  $\mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ .

En la siguiente proposición, recopilamos una serie de resultados más o menos inmediatos de la definición y la demostración del Teorema 2.2.1.

**Proposición 2.2.3.** *Sea  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Entonces:*

1. Si  $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$ , entonces,  $\Sigma(A, \mathcal{S}) = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$ .



2.  $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq A$ .
3.  $\Sigma(\alpha A, \mathcal{S}) = \alpha \Sigma(A, \mathcal{S})$ .
4.  $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \Sigma(A, \mathcal{S})$ .
5. Si  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ , entonces,  $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$ .
6. Si  $A \leq B$ , entonces,  $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(B, \mathcal{S})$ .

*Demostración.* El ítem 1 se deduce la de demostración del Teorema 2.2.1, mientras que los otros ítems son consecuencias inmediatas de la definición. ■

**Proposición 2.2.4.** Sean  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado. Entonces,  $\Sigma(A^2, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{S})^2$

*Demostración.* Sean  $\mathcal{M} = \overline{A^{-1/2}(\mathcal{S})}$ ,  $\mathcal{M}_1 = \overline{A^{-1}(\mathcal{S})}$ , y denotemos por medio de  $P_{\mathcal{M}}$  y  $P_{\mathcal{M}_1}$  a las proyecciones ortogonales sobre  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}_1$  respectivamente.

Observar que  $A^{1/2}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{M}$ . Por lo tanto, se tiene que  $(I - P_{\mathcal{M}})A^{1/2}P_{\mathcal{M}_1} = 0$  y adjuntando

$$P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}(I - P_{\mathcal{M}}) = 0.$$

En consecuencia, fijado  $h \in \mathcal{H}$ , vemos que

$$\begin{aligned} \langle A^{1/2}P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}h, h \rangle &= \|P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}h\|^2 = \|P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2}P_{\mathcal{M}}h\|^2 \\ &\leq \|A^{1/2}P_{\mathcal{M}}h\|^2 = \langle P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}}h, h \rangle, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $A^{1/2}P_{\mathcal{M}_1}A^{1/2} \leq P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}}$ . Conjugando ambos miembros con  $A^{1/2}$  queda demostrada la Proposición. ■

**Proposición 2.2.5.** Si  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  son subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$ , entonces  $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{S}), \mathcal{T}) = \Sigma(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$

*Demostración.* Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) &= \{D : 0 \leq D \leq A \text{ } R(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}\} \\ \mathcal{M}(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S}) &= \{D : 0 \leq D \leq \Sigma(A, \mathcal{T}) \text{ } R(D) \subseteq \mathcal{S}\}. \end{aligned}$$

Probaremos que estos conjuntos son iguales y por ende sus máximos también lo son. Sea  $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$ , entonces por un lado  $R(D) \subseteq \mathcal{T}$  y  $D \leq A$  lo cual implica que  $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$ , pero también  $R(D) \subseteq \mathcal{S}$ , en consecuencia  $D \in \mathcal{M}(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S})$ . Recíprocamente, si  $D \in \mathcal{M}(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S})$  entonces  $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$ , lo cual muestra que  $R(D) \subseteq \mathcal{T}$  y en consecuencia  $R(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ . Pero como  $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T}) \leq A$  se tiene que  $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$ . ■



## Rango y núcleo del complemento de Schur

**Proposición 2.2.6.** *Dado  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ , entonces*

$$R(\Sigma(A, \mathcal{S})^{1/2}) = R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S}.$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M} = A^{-1/2}(\mathcal{S})$ . Observar que

$$R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} = A^{1/2}(A^{-1/2}(\mathcal{S})) = R(A^{1/2}P_{\mathcal{M}}).$$

Luego, por el Corollary 2.1.2,

$$\begin{aligned} R(A^{1/2}) \cap \mathcal{S} &= R(A^{1/2}P_{\mathcal{M}}) = R(|P_{\mathcal{M}}A^{1/2}|) \\ &= R((A^{1/2}P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{M}}A^{1/2})^{1/2}) = R(A_{/\mathcal{S}}^{1/2}), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

**Corolario 2.2.7.** *Dado  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ , entonces,  $R(A) \cap \mathcal{S} \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}))$ .*

*Demostración.* Como  $\Sigma(A^2, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{S})^2$ , por el teorema de Douglas,  $R(\Sigma(A^2, \mathcal{S})^{1/2}) \subseteq R(\Sigma(A, \mathcal{S}))$ . Pero,  $R(\Sigma(A^2, \mathcal{S})^{1/2}) = R(A) \cap \mathcal{S}$ . ■

**Proposición 2.2.8.** *Sean  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado y  $\mathcal{M} = \overline{A^{-1/2}(\mathcal{S})}$ . Entonces*

1.  $\overline{N(A) + \mathcal{S}^\perp} \subseteq N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = A^{-1/2}(\mathcal{M}^\perp)$
2.  $N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = N(A) + \mathcal{S}^\perp$  si y sólo si  $A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)$  es cerrado en  $R(A^{1/2})$ .

*Demostración.*

1. Por un lado usando la Proposición 2.2.6 se tiene

$$N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = (R(A^{1/2}) \cap \overline{\mathcal{S}})^\perp \supseteq \overline{N(A) + \mathcal{S}^\perp}.$$

Por otro lado, como  $\Sigma(A, \mathcal{S}) = A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}$ ,

$$N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = N(A^{1/2}P_{\mathcal{M}}A^{1/2}) = N(P_{\mathcal{M}}A^{1/2}) = A^{-1/2}(\mathcal{M}^\perp).$$

2. Dado que  $(A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp))^\perp = A^{-1/2}(\mathcal{S}) = \mathcal{M}$ , se tiene  $\overline{A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)} = \mathcal{M}^\perp$ . Luego, es claro que  $A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)$  es cerrado en  $R(A^{1/2})$  si y sólo si  $\mathcal{M}^\perp \cap R(A^{1/2}) = A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)$ , lo cual es equivalente a  $A^{-1/2}(\mathcal{M}^\perp) = A^{-1/2}(A^{1/2}(\mathcal{S}^\perp)) = \ker A + \mathcal{S}^\perp$ . ■



## Convergencia

**Proposición 2.2.9.** Sea  $\{A_n\}$  una sucesión de operadores positivos tales que  $A_n \downarrow_{\text{sot}} A$  y  $\{\mathcal{S}_n\}$  una familia de subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$  tales que  $\mathcal{S}_{n+1} \subseteq \mathcal{S}_n$ . Entonces,

$$\Sigma(A_n, \mathcal{S}_n) \downarrow_{\text{sot}} \Sigma(A, \mathcal{S}).$$

donde  $\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ .

*Demostración.* Como la sucesión  $\{\Sigma(A_n, \mathcal{S}_n)\}$  es decreciente, posee un límite en la topología fuerte de operadores, al cual denotaremos  $\mathcal{S}(A)$ . Dado que  $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A_n, \mathcal{S}_n) \leq A$  para todo  $n \geq 1$ , es claro que  $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \mathcal{S}(A) \leq A$ . Luego, basta verificar que  $R(\mathcal{S}(A)) \subseteq \mathcal{S}$ , pues en tal caso  $\mathcal{S}(A) \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ , y como  $\Sigma(A, \mathcal{S}) = \max \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ ,  $\mathcal{S}(A)$  tiene que ser igual a  $\Sigma(A, \mathcal{S})$ .

Para mostrar que  $R(\mathcal{S}(A)) \subseteq \mathcal{S}$ , basta notar que para todo  $n \geq 1$ , por el Teorema de Douglas 2.1.1, como  $\mathcal{S}(A) \leq \Sigma(A_n, \mathcal{S}_n)$

$$R(\mathcal{S}(A)) \subseteq R((\mathcal{S}(A))^{1/2}) \subseteq R(\Sigma(A_n, \mathcal{S}_n)^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}_n$$

en consecuencia  $R(\mathcal{S}(A)) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ . ■

Ahora buscaremos condiciones suficientes para garantizar la convergencia en norma.

**Lema 2.2.10.** Sea  $A \in GL(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Entonces

$$\Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\|\cdot\|} \Sigma(A, \mathcal{S}).$$

*Demostración.* Notar que  $I \leq \|A^{-1}\|A$ . Dado  $\varepsilon > 0$  llamemos  $\lambda_\varepsilon = (1 + \varepsilon\|A^{-1}\|)$ . Luego se cumple que  $A + \varepsilon I \leq \lambda_\varepsilon A$  y por ende  $\Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}) \leq \lambda_\varepsilon \Sigma(A, \mathcal{S})$ . Por lo tanto,

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}) \leq \lambda_\varepsilon \Sigma(A, \mathcal{S}) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\|\cdot\|} \Sigma(A, \mathcal{S}),$$

por lo que  $\Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S})$  converge a  $\Sigma(A, \mathcal{S})$ . ■

**Teorema 2.2.11.** Sean  $A \in GL(\mathcal{H})^+$  y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $GL(\mathcal{H})^+$  tal que

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} A \quad \text{y} \quad A_n \geq A \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para todo subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , se cumple que

$$\Sigma(A_n, \mathcal{S}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} \Sigma(A, \mathcal{S}).$$

*Demostración.* Observar que  $A_n = A + (A_n - A) \leq A + \|A_n - A\|I$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si abreviamos  $\varepsilon_n = \|A_n - A\|$ , por el Lema anterior se tiene que

$$\|\Sigma(A_n, \mathcal{S}) - \Sigma(A, \mathcal{S})\| \leq \|\Sigma(A + \varepsilon_n I, \mathcal{S}) - \Sigma(A, \mathcal{S})\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

como queríamos demostrar. ■





### Otras caracterizaciones del complemento de Schur.

**Teorema 2.2.12 (Lebesgue).** Sean  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Entonces existen únicos  $F$  y  $G \in L(\mathcal{H})^+$  tales que:

$$A = F + G, \quad R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S} \quad \text{y} \quad R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\} \quad (2.1)$$

Más aun,  $F = \Sigma(A, \mathcal{S})$ .

*Demostración.* Sea  $F = \Sigma(A, \mathcal{S})$ . Claramente se satisface que  $R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}$ . Por otro lado, sea  $x \in R((A - \Sigma(A, \mathcal{S}))^{1/2}) \cap \mathcal{S}$  y  $P$  la proyección ortogonal al subespacio generado por  $x$ . Como  $R(P) \subseteq R((A - \Sigma(A, \mathcal{S}))^{1/2})$ , por el Teorema de Douglas, existe  $\lambda > 0$  tal que  $\lambda P \leq A - \Sigma(A, \mathcal{S})$ . Pero entonces,  $\lambda P + \Sigma(A, \mathcal{S}) \leq A$ . Como también  $R(\lambda P + \Sigma(A, \mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$ , se tiene que  $\lambda P + \Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A, \mathcal{S})$ , por lo que debe verificarse que  $x = 0$ .

Supongamos ahora que nos dan un par  $F$  y  $G \in L(\mathcal{H})^+$  satisfacen las condiciones de (2.1). Entonces, como  $R(F) \subseteq R(F^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}$  y  $F \leq A$ , deducimos que  $F \leq \Sigma(A, \mathcal{S})$ . Por otro lado, dado que  $G = (A - \Sigma(A, \mathcal{S})) + (\Sigma(A, \mathcal{S}) - F) \geq (\Sigma(A, \mathcal{S}) - F) \geq 0$ , usando el Teorema de Douglas se tiene que

$$R((\Sigma(A, \mathcal{S}) - F)^{1/2}) \subseteq R(G^{1/2}).$$

Pero  $R((\Sigma(A, \mathcal{S}) - F)^{1/2}) \subseteq \mathcal{S}$  y  $R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\}$ . En consecuencia,  $\Sigma(A, \mathcal{S}) = F$ . ■

**Teorema 2.2.13.** Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , y  $A \in L(\mathcal{H})^+$  el cual posee una representación matricial

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$$

respecto de  $\mathcal{S}$ . Entonces, si  $C$  es la solución reducida de la ecuación  $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} = (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} X$  se tiene que:

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^* C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Dado que

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^* C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} = F + G,$$

basta ver que  $F$  y  $G$  están en las condiciones del Teorema anterior. Claramente  $G \geq 0$ , y como consecuencia del Corolario 2.1.2,

$$R(G^{1/2}) = R\left(\begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix}\right).$$



Ahora bien, si  $\begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$ , entonces  $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp}^{1/2} y = 0$ . Pero el hecho de que  $N((A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}) \subseteq N(C^*)$  (que se verifica porque  $C$  es la solución reducida), implica que  $C^* y = 0$ . En consecuencia,  $R(G^{1/2}) \cap \mathcal{S} = \{0\}$

Por otro lado, claramente  $R(F) \subseteq \mathcal{S}$ . Por lo tanto, sólo resta ver que  $F \geq 0$ . Supongamos que existe un  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle (A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^* C)x, x \rangle = -\delta$  para algún  $\delta > 0$ . Como  $R(C) \subseteq \overline{R(A_{22}^{1/2})}$ , existe  $y \in \mathcal{S}^\perp$  de modo que  $\|Cx + (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}y\| < \delta^{1/2}$ . Pero entonces

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^* C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \left\langle \begin{pmatrix} 0 & C^* \\ 0 & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle (A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - C^* C)x, x \rangle + \langle Cx + (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}y, Cx + (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2}y \rangle < 0 \end{aligned}$$

contradiciendo la positividad de  $A$ . ■

**Corolario 2.2.14.** *Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , y  $A \in L(\mathcal{H})^+$  tal que*

$$A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$$

*Si  $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp}$  posee rango cerrado, entonces:*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} - A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^\dagger A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Basta notar que la solución reducida de la ecuación  $A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} = (A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^{1/2} X$  es  $D = ((A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp})^\dagger)^{1/2} A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}}$ . ■

**Proposición 2.2.15.** *Sea  $A \in L(\mathcal{H})^+$ ,  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  y  $x$  un vector en  $\mathcal{S}$ . Entonces:*

$$\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \inf \left\{ \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle : y \in \mathcal{S}^\perp \right\}.$$

*Demostración.* Dado que  $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq A$ ,  $\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  resulta una cota inferior. Si  $A$  es inversible, tomando  $y = -A_{22}^{-1} A_{21} x$ , se tiene que

$$\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

y por lo tanto  $\left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  es el mínimo del conjunto. Si  $A$  no es inversible, sea  $\alpha$  el ínfimo en cuestión. Como para todo  $n \in \mathbb{N}$  verifica se tiene que

$$\alpha \leq \inf \left\{ \left\langle \left( A + \frac{1}{n} I \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle : y \in \mathcal{S}^\perp \right\} = \left\langle \left( A + \frac{1}{n} I \right)_{/\mathcal{S}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$



tomando límite y usando la Proposición 2.2.9 se obtiene que  $\alpha \leq \left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

■

**Teorema 2.2.16.** *Dado  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ , sea  $\mathcal{N}(A, \mathcal{S})$  el conjunto de operadores definido por*

$$\mathcal{N}(A, \mathcal{S}) = \{QAQ^* : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}.$$

Entonces,  $\Sigma(A, \mathcal{S}) = \inf \mathcal{N}(A, \mathcal{S})$ .

*Demostración.* Llamemos  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}} = \{Q \in L(\mathcal{H}) : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}$ . Si  $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ , como  $P_{\mathcal{S}}Q = Q$ , deducimos que existe  $X \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S})$  tal que  $Q = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^{\perp} \end{matrix}$ . Luego, dados  $x \in \mathcal{S}$  e  $z \in \mathcal{S}^{\perp}$ , se tiene que

$$\left\langle QAQ^* \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ X^*x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ X^*x \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (2.2)$$

Observar que cualquier operador  $X \in L(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S})$  produce un  $Q = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ . Luego los valores  $X^*x$  recorren todo  $\mathcal{S}^{\perp}$ . Usando la Proposition 2.2.15 y la formula (2.2) deducimos que

$$\begin{aligned} \inf_{Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{S}}} \left\langle QAQ^* \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle &= \inf_{y \in \mathcal{S}^{\perp}} \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \Sigma(A, \mathcal{S}) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia,  $\Sigma(A, \mathcal{S}) = \inf \mathcal{N}(A, \mathcal{S})$ .

■

## 2.3 Proyecciones $A$ -autoadjuntas y compatibilidad

Todo operador positivo (semidefinido)  $A \in L(\mathcal{H})$  define una forma sesquilineal acotada (posiblemente degenerada) del siguiente modo:  $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$ ,  $x, y \in \mathcal{H}$ . Respecto a esta forma, es fácil ver que un operador  $C \in L(\mathcal{H})$  resulta autoadjunto si satisface la identidad  $AC = C^*A$  y que el ortogonal de un subespacio  $\mathcal{S}$  está dado por  $\mathcal{S}^{\perp_A} = A^{-1}(\mathcal{S}^{\perp}) = A(\mathcal{S})^{\perp}$ .

Si el operador  $A$  en cuestión es inversible, la forma  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  induce en  $\mathcal{H}$  una estructura de espacio de Hilbert equivalente a la anterior en el sentido métrico y por ende topológico. Sin embargo, otras cuestiones cambian. Por ejemplo, las noción de ortogonalidad. Esto trae como consecuencia que la proyección  $A$ -ortogonal, que existe y es única, no necesariamente coincide con la ortogonal respecto a la estructura de Hilbert original.



En el caso en que  $A$  no es inversible, no sólo se pierden las equivalencias antes mencionadas, sino que también puede suceder que no exista una proyección  $A$ -autoadjunta sobre un subespacio dado. Como veremos en esta sección, en el caso general, puede ocurrir que no exista, exista una única proyección  $A$ -autoadjunta, o bien infinitas. A lo largo de la misma  $\mathcal{S}$  será un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  y  $A$  un operador positivo sobre  $\mathcal{H}$  cuya representación matricial respecto a  $\mathcal{S}$  es  $\begin{pmatrix} A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} \\ A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}} & A_{\mathcal{S}^\perp, \mathcal{S}^\perp} \end{pmatrix}$ .

Con el objeto de estudiar este fenómeno, Corach, Maestripieri y Stojanoff introdujeron en [44] la siguiente noción de compatibilidad:

**Definición 2.3.1.** Diremos que el par  $(A, \mathcal{S})$  es **compatible** o bien que  $\mathcal{S}$  es  $A$ -compatible, si el conjunto

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{S}) = \{Q \in \mathcal{Q} : R(Q) = \mathcal{S}, AQ = Q^*A\}.$$

es no vacío. En otras palabras, el par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible si existe al menos una proyección sobre  $\mathcal{S}$   $A$ -autoadjunta.

A lo largo de una serie de tres artículos [44], [45] y [46], se demostraron las siguientes caracterizaciones de la condición de compatibilidad.

**Teorema 2.3.2.** *Dada un proyección (oblicua)  $Q$  sobre  $\mathcal{S}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$
2.  $N(Q) \subseteq R(Q)^{\perp_A}$ .
3.  $Q$  es  $A$ -contractivo, es decir,  $\langle Qx, Qx \rangle_A \leq \langle x, x \rangle_A \quad x \in \mathcal{H}$ .

**Teorema 2.3.3.** *Sea  $P$  la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. El par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible.
2. Existe un proyector oblicuo  $Q$  sobre  $\mathcal{S}$  tal que  $N(Q) \subseteq R(Q)^{\perp_A}$ .
3. Existe un proyector oblicuo  $Q$  sobre  $\mathcal{S}$  que es  $A$ -contractivo, es decir

$$\langle Qx, Qx \rangle_A \leq \langle x, x \rangle_A \quad x \in \mathcal{H}.$$

4.  $R(PA) = R(PAP)$ .
5.  $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})$
6. La ecuación  $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) = R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})X$  tiene solución.



**Observación 2.3.4.** Dado un operador  $B \in L(\mathcal{H})^+$ , cuyo rango no es cerrado, es relativamente sencillo demostrar que  $R(B) \subsetneq R(B^{1/2})$ . Sin embargo,  $R(B^{1/2})$  no es “mucho más grande” que  $R(B)$ , dado que este último es denso en  $R(B^{1/2})$ . Esta sutil diferencia es la que está detrás de la noción de compatibilidad. Como hemos visto en la Proposición 2.1.4, dados  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y un subespacio cerrado  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , siempre se cumple que  $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) \subseteq R((A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})^{1/2})$ , sólo cuando  $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) \subseteq R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})$  el par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible. En particular, notar que si  $\dim \mathcal{S} < \infty$ , entonces el par  $(A, \mathcal{S})$  resulta compatible. En efecto, como  $\dim R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}) < \infty$ , se tiene que  $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}) = R((A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})^{1/2}) = \overline{R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})}$ .  $\blacktriangle$

Es relativamente sencillo notar que dada una proyección oblicua  $Q$  sobre  $\mathcal{S}$ , su descomposición matricial respecto de  $\mathcal{S}$  tiene la siguiente forma:

$$Q = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, a partir del teorema anterior, resulta natural la siguiente definición:

**Definición 2.3.5.** Sea  $E$  la solución reducida de la ecuación  $R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}) = R(A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})X$ . Por medio de  $P_{A, \mathcal{S}}$  indicaremos a la proyección (oblicua en general) sobre  $\mathcal{S}$  definida por:

$$P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} I & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Observación 2.3.6.** Si  $A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}}$  tiene rango cerrado, entonces  $E = (A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}})^\dagger A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp}$ . Sea  $P$  es la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}$ . Usando el hecho de que, con cierto abuso de notación,  $A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} = PAP$  y  $A_{\mathcal{S}, \mathcal{S}^\perp} = PA(I - P)$ , obtenemos la siguiente fórmula para la proyección  $P_{A, \mathcal{S}}$ :

$$P_{A, \mathcal{S}} = P + (PAP)^\dagger (PA(I - P)).$$

$\blacktriangle$

A continuación enumeramos una serie de propiedades de esta proyección extraídas de [44], [45] y [46].

**Teorema 2.3.7.** Si el par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible y  $\mathcal{N} = N(A) \cap \mathcal{S}$ , entonces

1. La proyección  $P_{A, \mathcal{S}} \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ . Más aún,  $P_{A, \mathcal{S}}$  es la proyección sobre  $\mathcal{S}$  cuyo núcleo es  $A^{-1}(\mathcal{S}^\perp) \ominus \mathcal{N}$ .
2. Para todo  $Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S})$  existe  $Z \in L(\mathcal{S}^\perp, \mathcal{N})$  tal que

$$Q = P_{A, \mathcal{S}} + Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & D \\ 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{S}^\perp \end{matrix}. \quad (2.3)$$

En particular, notar que  $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$  posee un único elemento (el cual será  $P_{A, \mathcal{S}}$ ) si y sólo si  $\mathcal{N} = N(A) \cap \mathcal{S} = \{0\}$ .



$$3. \|P_{A,\mathcal{S}}\| = \min\{ \|Q\| : Q \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S}) \}.$$

Cuando el operador  $A$  tiene rango cerrado, como veremos en el siguiente resultado, depende solamente de que  $c[N(A), \mathcal{S}] < 1$ .

**Teorema 2.3.8.** *Si  $A$  tiene rango cerrado y  $P$  es la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}$ , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible.*
2. *El subespacio  $\mathcal{S} + N(A)$  es cerrado.*
3.  *$c[N(A), \mathcal{S}] < 1$ .*
4. *El subespacio  $\mathcal{S}^\perp + R(A)$  es cerrado.*
5. *El rango de  $PA$  es cerrado.*
6. *El rango de  $PAP$  es cerrado.*
7. *El rango de  $AP = A(\mathcal{S})$  es cerrado.*

Un caso particular de operadores con rango cerrado son la proyecciones. En tal caso, la fórmula de Lance-Ptak adopta la siguiente forma:

**Proposición 2.3.9.** *Sea  $Q$  una proyección ortogonal y  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado tal que el par  $(Q, \mathcal{S})$  es compatible. Entonces*

$$\|P_{Q,\mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2} = s[N(Q), \mathcal{S}]^{-1}.$$

*Demostración.* Falta demostración ■

Para finalizar, demostraremos el siguiente resultado técnico que será de utilidad más adelante.

**Proposición 2.3.10.** *Supongamos que el par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible y que  $\mathcal{S}$  está incluido en cierto subespacio cerrado  $\mathcal{T}$  que reduce al operador  $A$ , es decir  $P_{\mathcal{T}}A = AP_{\mathcal{T}}$ . Entonces, si  $A = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{T}} & 0 \\ 0 & A_{\mathcal{T}^\perp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix}$ , el par  $(A_{\mathcal{T}}, \mathcal{S})$  es compatible y*

$$P_{A,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_{A_{\mathcal{T}},\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix},$$

donde a  $P_{A_{\mathcal{T}},\mathcal{S}}$  lo consideramos actuando en  $\mathcal{T}$ .



*Demostración.* Sea

$$A = \begin{pmatrix} B & C & 0 \\ C^* & D & 0 \\ 0 & 0 & A_{\mathcal{T}^\perp} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{T} \ominus \mathcal{S} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix} \quad \text{donde} \quad A_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} B & C \\ C^* & D \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{T} \ominus \mathcal{S} \end{matrix}.$$

Por un lado, notemos que la solución reducida de la ecuación  $BX = (C, 0)$  posee la forma  $(E, 0) \in L((\mathcal{T} \ominus \mathcal{S}) \oplus \mathcal{T}^\perp, \mathcal{S})$ , puesto que tiene el mismo núcleo que  $(C, 0)$ . Entonces

$$P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{T} \ominus \mathcal{S} \\ \mathcal{T}^\perp \end{matrix}.$$

Por otro lado, es fácil ver que  $E$  es la solución reducida de la ecuación  $AX = C$ , razón por la cual no sólo el par  $(A_{\mathcal{T}}, \mathcal{S})$  es compatible, sino que también se tiene que

$$P_{D_{\mathcal{T}}, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, comparando las expresiones para  $P_{A, \mathcal{S}}$  y para  $P_{A_{\mathcal{T}}, \mathcal{S}}$  se puede observar que efectivamente  $P_{A, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_{A_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . ■

## 2.4 Compatibilidad y el complemento de Schur.

La compatibilidad se encuentra íntimamente relacionada con el complemento de Schur. En esta sección daremos un breve resumen de como estas dos nociones se relacionan. También se puede considerar esta sección como una motivación para las cuestiones que desarrollaremos en el capítulo 6. Al igual que en la sección precedente,  $\mathcal{S}$  será un subespacio cerrado y  $A$  un operador positivo de  $L(\mathcal{H})$ .

Comencemos con la siguiente proposición que relaciona directamente el complemento de Schur con las distintas proyecciones del conjunto  $PAS$ .

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $(A, \mathcal{S})$  un par compatible. Si  $E \in \mathcal{P}(A, \mathcal{S}^\perp)$  y  $Q = I - E$  entonces:*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = Q^* A = AQ.$$

*Demostración.* Por un lado, como  $R(Q^*) = R(E)^\perp = \mathcal{S}$ , claramente  $R(QA) \in \mathcal{S}$ . Por otro lado, la Proposición 2.3.2 implica que  $0 \leq Q^* A = Q^* A Q \leq A$ . Finalmente, sea  $X \in L(\mathcal{H})^+$  tal que  $X \leq A$  y  $R(X) \subseteq \mathcal{S}$ . Entonces

$$X = Q^* X Q \leq Q^* A Q = AQ,$$

y por ende  $AQ = \Sigma(A, \mathcal{S})$ . ■



Cómo hemos visto en la Proposición 2.2.16

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \inf \{QAQ^* : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}, \quad (2.4)$$

donde el ínfimo se toma respecto al orden usual. La siguiente proposición muestra que relación existe entre esta caracterización del complemento de Schur y la compatibilidad.

**Proposición 2.4.2.** *Las siguientes afirmaciones son equivalente:*

1. *El par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible.*
2. *El ínfimo en (2.4) se alcanza, es decir*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) = \min \{QAQ^* : Q^2 = Q \text{ y } R(Q) = \mathcal{S}\}.$$

*Más aún, una proyección  $E$  realiza el mínimo si y sólo si pertenece al conjunto  $\mathcal{P}(A, \mathcal{S})$ .*

Otra cuestión que hemos considerado respecto al complemento de Schur es su rango. En la Proposición 2.2.6 vimos que es posible decir exactamente cual es el rango de  $\Sigma(A, \mathcal{S})^{1/2}$ . Sin embargo, en general, sólo es conocida una estimación del rango de  $\Sigma(A, \mathcal{S})$  (Corolario 2.2.7). Las siguientes Proposiciones muestran que también existe una estrecha relación entre la compatibilidad del par  $(A, \mathcal{S})$  y el rango del  $\Sigma(A, \mathcal{S})$ .

**Proposición 2.4.3.** *Son equivalentes:*

1. *El par  $(A, \mathcal{S})$  es compatible.*
2.  $R(\Sigma(A, \mathcal{S})) = R(A) \cap \mathcal{S}$ .
3.  $N(\Sigma(A, \mathcal{S})) = N(A) + \mathcal{S}^\perp$ .

**Proposición 2.4.4.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $R(\Sigma(A, \mathcal{S})) \subseteq R(A)$ .
2. *El par  $(A, N(\Sigma(A, \mathcal{S})))$  es compatible.*

Otras cuestiones referentes a la relación entre complementos de Schur y la compatibilidad serán estudiadas en un marco más general en el capítulo 6.



# Capítulo 3

## Marcos en espacios de Hilbert

A través de este capítulo recordaremos las definiciones y propiedades básicas de la teoría de marcos desde el punto de vista de la teoría de operadores. El lector interesado en una completa descripción de esta teoría y sus aplicaciones puede consultar el excelente trabajo Heil and Walnut [71] o bien los libros de Christensen [41] y Young [123]. Asumiremos que el lector está familiarizado con los espacios  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $L^2([0, 1])$  y  $L^2(\mathbb{R})$ , como así también con las cuestiones elementales de bases ortonormales en espacios de Hilbert.

### 3.1 Definiciones básicas

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable<sup>1</sup>, y  $\mathcal{W}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ .

**Definición 3.1.1.** Una sucesión  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de vectores de  $\mathcal{W}$ . se denomina **marco** para el subespacio  $\mathcal{W}$  si existen constantes  $A, B > 0$  tales que, para todo  $f \in \mathcal{W}$ ,

$$A\|f\| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (3.1)$$

Las cotas  $A, B$  óptimas para (3.1) se denominan **cotas** del marco  $\mathcal{F}$ . Si  $A = B$  entonces el marco se denomina **ajustado**, mientras que si  $A = B = 1$  se dice que es un **marco de Parseval**.

Asociado con el marco  $\mathcal{F}$  existe un operador acotado  $T : \ell^2 \rightarrow \mathcal{H}$  definido por

$$T(e_n) = f_n,$$

donde  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  denota la base canónica de  $\ell^2$ . Este operador es conocido con el nombre de **operador de síntesis**. En el caso de marcos con finitos elementos, asumiremos que el dominio del operador de síntesis es  $\mathbb{C}^m$  donde  $m$  es el número de vectores que posee el marco.

---

<sup>1</sup>Un espacio de Hilbert se dice separable si admite una base ortonormal a lo sumo numerable.



El adjunto de dicho operador se denomina **operador de análisis** y para cada  $x \in \mathcal{H}$  está dado por la siguiente expresión

$$T^*(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, f_n \rangle e_n.$$

Otro operador que usualmente se asocia a un marco es el denominado **operador de marco**, el cual se define como  $S = TT^*$ . Es fácil ver que

$$Sf = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, f_n \rangle f_n \quad f \in \mathcal{H}. \quad (3.2)$$

De (3.1) surge que  $A.P_{\mathcal{W}} \leq S \leq B.P_{\mathcal{W}}$ , razón por la cual  $S|_{\mathcal{W}}$  resulta inversible. A partir de esto, podemos inferir fácilmente que  $R(T) = \mathcal{W}$  y que  $T^*|_{\mathcal{W}}$  es inyectivo.

En términos de los operadores recientemente definidos, las cotas de un marco pueden caracterizarse como

$$B = \|T\|^2 = \|S\| = \rho(S) \quad \text{and} \quad A = \gamma(T)^2 = \gamma(S) = \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(S) \ \lambda \neq 0\}. \quad (3.3)$$

**Definición 3.1.2.** Dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para un subespacio cerrado  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{H}$ , definimos el **exceso** del marco  $\mathcal{F}$ , que denotaremos  $e(\mathcal{F})$ , como el número cardinal correspondiente a la dimensión del núcleo del operador de síntesis, es decir

$$e(\mathcal{F}) = \dim \left\{ (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n f_n = 0 \right\},$$

**Definición 3.1.3.** Un marco  $\mathcal{F}$  se denomina **base de Riesz** si  $e(\mathcal{F}) = 0$ , i.e., si el operador de síntesis es un isomorfismo.

Holub [74] y Balan, Casazza, Heil y Landau [18] han probado el siguiente resultado que justifica el nombre de exceso:

**Proposición 3.1.4.** Dado un subespacio cerrado  $\mathcal{W}$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y un marco  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $\mathcal{W}$ , entonces

$$e(\mathcal{F}) = \sup\{ |I| : I \subseteq \mathbb{N} \text{ y } \{f_n\}_{n \notin I} \text{ sigue siendo un marco para } \mathcal{W} \}.$$

Desde el punto de vista de las aplicaciones, si el vector  $f$  representa una señal y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es cierta sucesión de vectores, es deseable que el conjunto de datos contenidos en los coeficientes  $\langle f, f_n \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sea suficiente para reconstruir la señal  $f$ . Si la sucesión  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco para cierto subespacio cerrado  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{H}$  y  $f \in \mathcal{W}$ , entonces, de (3.2) se puede deducir por un lado

$$f = SS^\dagger(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle S^\dagger f, f_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, S^\dagger f_n \rangle f_n,$$



y por otro

$$f = S^\dagger S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle S^\dagger(f_n).$$

Luego, si definimos  $g_n = S^\dagger f_n$  se tiene que para todo  $f \in \mathcal{W}$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle g_n,$$

Este hecho motiva la siguiente definición:

**Definición 3.1.5.** Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para el subespacio cerrado  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{H}$  y sea  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  otro subespacio cerrado tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$ . Un **marco dual oblicuo** de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{M}$  es un marco  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $\mathcal{M}$  que satisface:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle f_n \quad \forall f \in \mathcal{W}. \quad (3.4)$$

El marco dual  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definido por  $g_n = S^\dagger f_n$  se denomina **marco dual canónico**. En este caso  $\mathcal{W} = \mathcal{M}$  y se tiene que  $\mathcal{F}$ , a su vez, es el marco dual canónico de  $\mathcal{G}$ .

Se dice que un marco dual oblicuo posee la **propiedad de norma mínima** si para todo  $f \in \mathcal{W}$  los coeficientes  $\{\langle f, g_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  poseen norma  $(\ell^2)$  mínima. Christensen y Eldar probaron en [40] que el marco dual con la propiedad de norma mínima tienen la forma

$$\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{B(T^*B)^\dagger e_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (3.5)$$

donde  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  denota la base canónica de  $\ell^2$ , y  $B$  es un operador acotado cuyo rango es  $\mathcal{M}$ .

Por otro lado, sea  $\mathcal{D}(\ell^2)$  el conjunto de todos los  $D \in Gl(\ell^2)^+$  diagonales con respecto a la base canónica  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Los marcos que poseen la propiedad de norma mínima respecto a las diferentes normas escaleadas  $\|\cdot\|_D$ ,  $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$ , serán denominados **marcos duales escaleados**. En el capítulo 4 daremos fórmulas explícitas para esta clase de marcos.

Los marcos duales guardan una estrecha relación con las inversas generalizadas. El siguiente resultado, demostrado por Christensen y Eldar en [42], expresa en forma más precisa dicha relación:

**Proposición 3.1.6.** Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para el subespacio cerrado  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ ,  $F$  su operador de síntesis y  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  otro subespacio cerrado tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$ . Un marco  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para  $\mathcal{M}$  con operador de síntesis  $G$  es un marco dual oblicuo para  $\mathcal{F}$  si y sólo si  $FG^*$  es la proyección sobre  $\mathcal{W}$  paralela a  $\mathcal{M}^\perp$ . Más aún, el único marco dual oblicuo en  $\mathcal{M}$  con la propiedad de norma mínima es aquel cuyo operador de análisis es la inversa generalizada de  $T$  asociada a la proyección antes mencionada y a la proyección ortogonal sobre  $N(T)^\perp$ .



**Observación 3.1.7.** En particular, el operador de análisis del marco dual canónico es la inversa generalizada de Moore-Penrose. Por otro lado, el operador de análisis del marco dual escaleado en  $\mathcal{M}$ , que posee la propiedad de norma mínima respecto a  $\|\cdot\|_D$ , es la inversa generalizada de  $T$  correspondiente a la proyección sobre  $\mathcal{W}$  paralela a  $\mathcal{M}^\perp$  y a la proyección  $1 - P_{D, N(T)}$ .

**Corolario 3.1.8.** Sea  $\mathcal{W}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para  $\mathcal{W}$  y  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  su marco dual canónico. Entonces, dado  $f \in \mathcal{W}$ , la sucesión de coeficientes  $\{\langle f, g_n \rangle\}$  posee mínima norma en  $\ell^2$  respecto de todos las sucesiones de coeficientes  $\{\alpha_n\}$  que satisfacen

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n.$$

## 3.2 Marcos de Riesz y marcos de Riesz condicionados

Dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k \in M}$  para cierto espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  finito dimensional (aquí  $M = \{1, \dots, N\}$  o bien  $M = \mathbb{N}$ ), se puede demostrar que existen constantes  $A$  y  $B$  tales que, para cualquier subconjunto  $I \subseteq M$ ,  $\{f_k\}_{k \in I}$  resulta un marco para el subespacio que genera, con cotas (no necesariamente óptimas)  $A$  y  $B$ . Cuando  $\dim \mathcal{H} = \infty$ , esto deja de ser cierto, basta considerar el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , y consideremos el marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definido por:

$$f_n = \begin{cases} e_k + \frac{1}{k}e_1 & \text{si } n = 2k \\ e_k & \text{si } n = 2k - 1 \end{cases}.$$

Este marco no puede ser un marco de Riesz. En efecto, dado  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\{f_{2k-1}, f_{2k}\}$  es un marco para el espacio generado por  $\{e_1, e_k\}$  cuya cota inferior es  $1/k^2$ .  $\blacktriangle$

Esto motiva la siguiente definición

**Definición 3.2.2.** Sea  $\mathcal{F} = \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  un marco para cierto subespacio  $\mathcal{W}$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  es un **marcos de Riesz** si existen constantes  $A$  y  $B$  tales que para cualquier subconjunto  $I \subseteq M$ ,  $\{f_k\}_{k \in I}$  resulta un marco con cotas (no necesariamente las óptimas)  $A$  y  $B$  para el subespacio que estos vectores generan.

Esta clase de marcos fue introducida por O. Christensen en [39]. Entre las propiedades más interesantes que poseen estos marcos se encuentra la siguiente, demostrada en [39] por el propio Christensen:

**Proposición 3.2.3.** *Todo marco de Riesz contiene una base de Riesz.*



Una de las principales causas que indujeron a estudiar esta clase de marcos fue la dificultad práctica que implica el cálculo de los coeficientes  $\{\langle f, S^{-1}f_n \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  de la descomposición

$$f = \sum \langle f, S^{-1}f_n \rangle f_n,$$

Con el objeto de hacer uso de las ventajas que poseen las bases de Riesz en este aspecto, Christensen había introducido en [36] el denominado método proyectivo, el cual aproxima los operadores  $S$  y  $S^{-1}$  por medio de operadores de rango finito, los cuales actúan en ciertos espacios finitos dimensionales cuya unión es densa en  $\mathcal{H}$ . Los marcos de Riesz se ajustaban bien a este método. Más tarde (ver [39]), Christensen caracterizó exactamente que marcos de adaptan bien al método antes mencionado. A estos marcos los denominó marcos de Riesz condicionados, por su estrecha conexión con los de Riesz.

**Definición 3.2.4.** Sea  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  tales que su unión da todo  $\mathbb{N}$ . Diremos que  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco de Riesz condicionado con respecto a  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si existen constantes  $A$  y  $B$  tales que cada familias  $\{f_i\}_{i \in I_n}$  es un marco para el subespacio que genera con cotas uniformes  $A$  y  $B$  (no necesariamente óptimas).

El lector interesado en más detalles sobre marcos de Riesz y marcos de Riesz condicionados puede ver los artículos citados a lo largo de esta sección, como así también [30], [31] y [32]). Por otro lado, en el capítulo 4 daremos una caracterización alternativa de estos marcos en términos de ciertas propiedades geométricas que posee el núcleo sus operadores de síntesis y de los marcos duales escaleados.

### 3.3 Marcos de Gabor.

Comencemos motivando la definición de esta clase de marcos, tan importantes en las aplicaciones. Dada una señal  $f(t)$ , donde la variable  $t$  es interpretada como el tiempo, su transformada de Fourier  $\hat{f}(\omega)$  nos brinda información sobre las oscilaciones para cada frecuencia  $\omega$ . Uno de los problemas que surgen en la práctica es que la transformada de Fourier no nos dice que frecuencias aparecen en un determinado tiempo  $t_0$ . El modo de superar esta dificultad es mirar la señal en un intervalo pequeño de tiempo y transformar Fourier allí. Matemáticamente hablando, esto significa multiplicar  $f(t)$  por una función  $g(t)$  que es constante en un intervalo pequeño y luego decae rápidamente a cero. Dicha función  $g(t)$  suele denominarse **función de ventana**. Si bien este proceso tiene sus limitaciones, nos brinda una idea de las frecuencias que aparecen en un entorno de cierto  $t_0$ . Para obtener esta información sobre  $f$  en todo el eje temporal repetimos el proceso trasladando la función de ventana. Esto conduce a la siguiente definición

**Definición 3.3.1.** Sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  no nula. La **transformada de Fourier de tiempo corto** de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  con respecto a la función de ventana  $g$  se define del siguiente modo:

$$\Psi_g(f)(y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x-y)} e^{-2\pi i x \omega} dx \quad y, \omega \in \mathbb{R}.$$



La definición anterior puede reformularse en términos de los denominados operadores de traslación y de modulación. Recordemos que, dado  $y \in \mathbb{R}$ , el operador de traslación  $T_y : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  se define como

$$(T_y f)(x) = f(x - y).$$

Por otro lado, dado  $\omega \in \mathbb{R}$ , el operador de modulación  $E_\omega : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  se define como

$$(E_\omega f)(x) = e^{2\pi i x \omega} f(x)$$

Es un hecho bien conocido que estos operadores resultan unitarios, y si bien no conmutan guardan la siguiente relación:

$$E_\omega T_y = e^{-2\pi i \omega y} T_y E_\omega \quad (3.6)$$

En términos de estos operadores,  $\Psi_g(f)(y, \omega) = \langle f, E_\omega T_y g \rangle$ .

Al igual que para la transformada de Fourier, existe una fórmula de inversión. Dadas funciones  $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$  tales que  $\langle g_1, g_2 \rangle \neq 0$ , entonces, para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \frac{1}{\langle g_1, g_2 \rangle} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f, E_\omega T_y g_1 \rangle E_\omega T_y g_2 d\omega dy,$$

donde la integral debe interpretarse en cierto sentido débil que no precisaremos. En esta instancia, uno podría preguntarse si es necesario tener como información  $\Psi_g(f)(y, \omega)$  para todo  $(y, \omega) \in \mathbb{R}^2$ , o si basta conocer los valores que esta toma en, por ejemplo, cierto reticulado de la forma  $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$  con  $a, b \in \mathbb{R}^+$  no nulos. De esta pregunta surge la definición de los marcos de Gabor.

**Definición 3.3.2.** Un **marco de Gabor** (regular) para  $L^2(\mathbb{R})$  es un marco de la forma  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ , donde  $a, b > 0$  y  $g \in L^2(\mathbb{R})$  es una función fija.

Estos marcos suelen llamarse también marcos de Weyl-Heisenberg debido a que el subgrupo de unitarios que generan  $E_b$  y  $T_a$  es una representación del grupo que lleva ese nombre. Por otro lado, cabe mencionar que los parámetros de los operadores de traslación y modulación no tiene por que ser las coordenadas de un reticulado de la forma  $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ . Más generalmente, uno puede buscar marcos de la forma  $\{E_{b_m}T_{a_n}g\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$  con  $a_n, b_m \in \mathbb{R}$ , los cuales son denominados marcos de Gabor irregulares. Dado que en este trabajo no consideraremos tales marcos, cuando nos refiramos a marcos de Gabor, implícitamente nos estaremos refiriendo a marcos de Gabor regulares.

Los marcos de Gabor han sido extensamente estudiados. En este trabajo nos interesa solamente su relación con los marcos de Riesz. Es por eso que, de la innumerable cantidad de resultados sobre marcos de Gabor, nos limitaremos a citar el siguiente teorema extraído de un trabajo de Linnell [89].

**Teorema 3.3.3.** Sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  no nula y  $a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$  un reticulado de  $\mathbb{R}^2$  donde  $a, b > 0$ . Entonces, para todo conjunto finito  $\Lambda \subseteq a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$  el conjunto  $\{E_\alpha T_\beta g\}_{(\alpha, \beta) \in \Lambda}$  es linealmente independiente.

Recomendamos al lector interesado en los marcos de Gabor leer los trabajos de Heil y Walnut [71] y de Daubechies, Grossman y Meyer [47], como así también los libros de Gröchenig [63] y de Christensen [38].



### 3.4 Marcos con operador de síntesis idempotente

Los marcos y las proyecciones están relacionados de varias maneras. En esta sección estudiaremos el teorema de extensión de Han and Larson [65] y una generalización del mismo.

En [65], Han and Larson caracterizaron los marcos de Parseval del siguiente modo:

**Teorema 3.4.1 (Han and Larson).** *Una sucesión  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es un marco de Parseval si y sólo si existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$  y una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{K}$  tal que*

$$f_n = P_{\mathcal{H}} e_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $P_{\mathcal{H}} \in L(\mathcal{K})$  es la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{H}$ .

A lo largo de esta sección usaremos constantemente el siguiente hecho: si  $\mathcal{K}$  es un espacio de Hilbert,  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de  $\mathcal{K}$  y  $T \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  tal que  $T e_n = f_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces las cotas del marco pueden caracterizarse como  $\gamma(T)^2$  y  $\|T\|^2$ . Más aún, el exceso de  $\mathcal{F}$  coincide con la dimensión del núcleo de  $T$ .

A continuación estudiaremos la siguiente pregunta: dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{H}$ , ¿existe una extensión  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{H}$ , una base ortonormal  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{K}$  y una proyección oblicua (i.e., no necesariamente ortogonal)  $Q \in L(\mathcal{K})$  tal que  $Q e_n = f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ?

Es claro que en general esto no va a ser cierto, pues existen al menos dos obstrucciones:

- i. Toda proyección oblicua satisface  $\gamma(Q) \geq 1$ , ya que

$$Q Q^* \geq Q P_{R(Q)} Q^* = P_{R(Q)}, \quad R(Q Q^*) = R(Q) \quad \text{y} \quad \gamma(P_{R(Q)}) = 1$$

Por lo tanto, si existe una tal representación de  $\mathcal{F}$ , entonces las cotas del marco deben satisfacer  $1 \leq A \leq B$ .

- ii. Aún si las cotas del marco  $\mathcal{F}$  satisfacen que  $1 \leq A \leq B$ , la representación puede no existir si  $e(\mathcal{F})$  es finito. Por ejemplo, supongamos que  $\mathcal{F}$  es una base de Riesz y que  $f_n = Q e_n$  para cierta proyección oblicua  $Q \in L(\mathcal{K})$  y cierta base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ . Entonces, por lo antes dicho  $\dim N(Q) = e(\mathcal{F}) = 0$ . En consecuencia  $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ ,  $Q = I$  y  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ . Esto significa que las bases ortonormales son la únicas bases de Riesz que admiten este tipo de representación.

El siguiente teorema completa, en algún sentido, los resultados de Casazza, Han y Larson expuestos en [34, sección 3].

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para cierto espacio de Hilbert de dimensión infinita  $\mathcal{H}$ , con cotas  $1 \leq A \leq B$ . Denotemos  $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \ell^2$ . Entonces existe una proyección oblicua  $Q \in L(\mathcal{K})$  con  $R(Q) = \mathcal{H} \oplus \{0\}$  y un sistema ortonormal  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{K}$ , tal que*

$$f_n \oplus 0 = Q b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Más aún, si  $e(\mathcal{F}) = \infty$ , entonces la sucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  puede suponerse una base ortonormal de  $\mathcal{K}$ .



*Demostración.* Sea  $T$  el operador de síntesis de  $\mathcal{F}$  y  $V \in L(\ell^2, \mathcal{H})$  un isomorfismo isométrico entre los subespacios  $\ell^2$  y  $\mathcal{H}$ . Por hipótesis,  $TT^* \geq AI \geq I$ . Sea  $X = (TT^* - I)^{1/2}V \in L(\ell^2, \mathcal{H})$ . Identificaremos  $\mathcal{H}$  con  $\mathcal{H} \oplus \{0\}$ , i.e., . identificaremos  $f_n \sim f_n \oplus 0 \in \mathcal{K}$ . Sea  $\tilde{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  el operador definido por  $\tilde{T}x = Tx \oplus 0$ . Entonces  $\tilde{T}\tilde{T}^* \sim \begin{pmatrix} TT^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathcal{K})$ . Sea

$$Q = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ \ell^2 \end{matrix} \in L(\mathcal{K}).$$

Entonces, es claro que  $Q$  es una proyección con rango  $\mathcal{H} \oplus 0$ . Más aún,

$$QQ^* = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} + XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{T}\tilde{T}^*,$$

i.e.,  $|Q^*| = |\tilde{T}^*|$ .

Consideremos la descomposición polar (a derecha)  $T = |T^*|U$ ;  $U \in L(\mathcal{H})$  es una isometría parcial espacio inicial  $N(T)^\perp$  y espacio final  $R(T) = \mathcal{H}$ . Definamos  $\tilde{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  por medio de

$$\tilde{U}x = UP_{N(T)^\perp}x \oplus P_{N(T)}x, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (3.7)$$

Entonces,  $\tilde{U}$  es una isometría y  $\tilde{T} = |\tilde{T}^*|\tilde{U}$ . La isometría parcial de la descomposición polar a derecha de  $Q$  puede extenderse a un operador unitario  $W$  sobre  $\mathcal{K}$ , pues  $\dim(N(Q)) = \dim(R(Q)^\perp)$ . Más aún, esto puede hacerse de modo que  $Q = |Q^*|W$ . Entonces

$$\tilde{T} = |\tilde{T}^*|U = |Q^*|U = QW^*U.$$

Luego, si  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$f_n = Te_n \sim Te_n \oplus 0 = \tilde{T}e_n = Q(W^*\tilde{U}e_n) = Qb_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{W^*\tilde{U}e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , el cual es claramente un sistema ortonormal en  $\mathcal{K}$ .

Supongamos ahora que  $e(\mathcal{F}) = \dim N(T) = \infty$ . Mostraremos que la isometría  $\tilde{U}$  definida en la ecuación (3.7) puede cambiarse por un operador unitario de  $\mathcal{H}$  sobre  $\mathcal{K}$ , que sigue satisfaciendo que  $\tilde{T} = |\tilde{T}^*|\tilde{U}$ . Para ello, tomemos

$$\tilde{U}x = UP_{N(T)^\perp}x \oplus Y P_{N(T)}x, \quad x \in \mathcal{H},$$

donde  $Y \in L(\ell^2, \mathcal{H})$  es la isometría parcial con espacio inicial  $N(T)$  y espacio final  $\mathcal{H}$ . Se tiene que  $\tilde{U}$  mapea isométricamente  $N(T)^\perp$  sobre  $\mathcal{H} \oplus \{0\}$  y  $N(T)$  sobre  $\{0\} \oplus \mathcal{H}$ . Luego, la sucesión  $b_n = W^*\tilde{U}e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , resulta ser una base ortonormal de  $\mathcal{K}$ . ■

**Observación 3.4.3.** Usando la notación del Teorema 3.4.2, si  $\mathcal{K}_0 = \overline{\text{gen}} \{b_n\}$  y  $Q_0 = Q|_{\mathcal{K}_0}$ , entonces parecería que es posible considerar bases ortonormales en vez de sistemas ortonormales. No obstante, el Teorema 3.4.4 muestra que este argumento falla en general: en efecto,  $\mathcal{H}$  no está necesariamente contenido en  $\mathcal{K}_0$ , en cuyo caso  $Q_0$  no es una proyección. ▲





Si  $e(\mathcal{F}) < \infty$ , se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 3.4.4.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco en  $\mathcal{H}$  con cotas  $1 \leq A \leq B$ , y supongamos que  $e(\mathcal{F}) < \infty$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{K}$  tal que  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ , una proyección  $Q \in L(\mathcal{K})$ , y una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{b_n\}_n$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $f_n = Qb_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*
2. *Si  $T$  es el operador de síntesis de  $\mathcal{F}$ , entonces  $\dim R(TT^* - I_{\mathcal{H}}) \leq e(\mathcal{F})$ .*

*Demostración.* Si la primer condición se satisface, entonces  $e(\mathcal{F}) = \dim N(T) = \dim N(Q) = \dim(\mathcal{K} \ominus \mathcal{H})$ . Identificaremos  $\mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$  con  $N(T)$ , y por lo tanto  $\mathcal{K}$  con  $\mathcal{H} \oplus N(T)$ . También identificaremos  $\mathcal{H}$  con  $\mathcal{H} \oplus \{0\}$ , en particular,  $f_n \sim f_n \oplus 0 \in \mathcal{K}$ . Sea  $\tilde{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ , dado por  $\tilde{T}x = Tx \oplus 0$ . Entonces  $\tilde{T}\tilde{T}^* \sim \begin{pmatrix} TT^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ N(T) \end{matrix} \in L(\mathcal{K})$ . Sea  $X \in L(N(T), \mathcal{H})$  tal que

$Q = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ N(T) \end{matrix}$ . Es fácil ver que:

$$\tilde{T}\tilde{T}^* = QQ^* = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} + XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,  $TT^* - I_{\mathcal{H}} = XX^*$ , mientras que  $\dim R(XX^*) \leq \dim R(X) \leq \dim N(T)$ .

Recíprocamente, si  $\dim R(TT^* - I) \leq \dim N(T)$ , consideremos, como en la demostración del Teorema 3.4.2,  $X = (TT^* - I)^{1/2} \in L(\mathcal{H})^+$ . Notemos que  $\dim N(X)^{\perp} = \dim R(X) \leq \dim N(T)$ . Entonces existe una isometría parcial  $V : N(T) \rightarrow \mathcal{H}$  con  $VV^* = P_{N(X)^{\perp}}$ . Como antes, usamos el espacio de Hilbert  $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus N(T)$ , y el operador  $\tilde{T} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ , dado por  $\tilde{T}x = Tx \oplus 0$ . Sea  $Y = XV \in L(N(T), \mathcal{H})$ , y

$$Q = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}} & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H} \\ N(T) \end{matrix} \in L(\mathcal{K}).$$

Entonces  $Q^2 = Q$ ,  $R(Q) = \mathcal{H} \oplus \{0\}$  y  $|Q^*| = |\tilde{T}^*|$ , pues  $YY^* = XVV^*X^* = XP_{N(X)^{\perp}}X^* = XX^*$ , luego

$$QQ^* = \begin{pmatrix} I + YY^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + XX^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{T}\tilde{T}^*.$$

El resto de la demostración sigue las mismas ideas que la primer parte de la demostración del Teorema 3.4.2, pero tomando  $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus N(T)$ . Notemos que, en este caso, la isometría  $\tilde{U}$  definida en la ecuación (3.7) resulta un operador unitario de  $\mathcal{H}$  sobre  $\mathcal{K}$ . Por lo tanto, si  $W$  es el operador unitario considerado en la primer parte de la demostración del Teorema 3.4.2, la sucesión  $b_n = W^*\tilde{U}e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , resulta ser una base ortonormal de  $\mathcal{K}$ . ■

**Observación 3.4.5.** El Teorema 3.4.1 puede también ser generalizado reemplazando la base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  por una base de Riesz en  $\mathcal{K}$ ; de este modo, obtenemos marcos arbitrarios (i.e., no necesariamente de Parseval). Un resultado equivalente a este fue



demostrado por Han and Larson en [65] (Proposition 1.6). Desde nuestro punto de vista, dicha generalización puede enunciarse del siguiente modo:

Una sucesión  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es un marco si y sólo si existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$  y una base de Riesz  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  de  $\mathcal{K}$  tal que  $f_n = P_{\mathcal{H}} x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Más aún, la base de Riesz puede elegirse de modo que posea la misma cota inferior que  $\mathcal{F}$ , y que la sucesión  $(I - P_{\mathcal{H}})x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sea un marco ajustado para  $\mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$ .

Por una cuestión de completitud, incluimos una demostración alternativa de este resultado: Supongamos que  $\mathcal{F}$  es un marco. Sea  $T$  el operador de síntesis de  $\mathcal{F}$  y sea  $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus N(T)$ . Identificaremos  $\mathcal{H}$  con  $\mathcal{H} \oplus \{0\} \subseteq \mathcal{K}$ , escribiendo  $x \sim x \oplus 0$ , para  $x \in \mathcal{H}$ . Sea  $V : \ell^2 \mapsto \mathcal{K}$  definido por:

$$Vx = Tx \oplus \alpha P_{N(T)}x = TP_{N(T)^\perp}x \oplus \alpha P_{N(T)}x, \quad x \in \mathcal{H},$$

donde  $\alpha \in [\gamma(T), \|T\|]$ . Como  $T(N(T)^\perp) = R(T) = \mathcal{H}$ , se tiene que  $V$  es acotado, lineal y biyectivo. Por ende, si  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la base canónica de  $\ell^2$ , entonces  $x_n = Ve_n$  es una base de Riesz en  $\mathcal{K}$ . Notemos que  $f_n \sim f_n \oplus 0 = P_{\mathcal{H}}x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Por el Teorema 3.4.1, la sucesión  $(I - P_{\mathcal{H}})x_n = P_{N(T)}e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  es un marco de Parseval para  $N(T) = \mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$ . Finalmente,  $\gamma(V) = \gamma(T)$  y  $\|V\| = \max\{1, \|T\|\}$ . Por lo tanto, la cota inferior de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es la misma que la de  $\mathcal{F}$ . La recíproca es clara.  $\blacktriangle$

# Capítulo 4

## Proyecciones $A$ -autoadjuntas y marcos de Riesz

En este capítulo estudiaremos cantidades de la forma:

$$\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D, S}\|$$

donde  $\Gamma$  es cierto subconjunto de  $L(\mathcal{H})^+$ . Estas cantidades están estrechamente vinculadas con problemas de cuadrados mínimos y con cuestiones de programación numérica. Si bien en estos casos los espacios de Hilbert involucrados son finito dimensionales, extensiones a espacios más generales no sólo pueden resultar útiles cuando el conjunto de datos es muy numeroso y/o la dimensión de los mismos no esta acotada, sino que también, permite crear un nuevo punto de contacto entre las proyecciones oblicuas y la teoría de marcos. Las herramientas claves que utilizaremos para realizar tales extensiones son la noción de compatibilidad, las proyecciones  $A$ -autoadjuntas y la noción de ángulo entre subespacios.

### 4.1 Problemas de cuadrados mínimos y proyecciones $A$ -autoadjuntas.

Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  ( $m > n$ ) cuyas columnas son linealmente independientes, y consideremos el sistema lineal

$$Ax = b.$$

Por las características de la matriz  $A$ , este sistema resulta sobredeterminado y si  $b \notin R(A)$  claramente no tiene solución. En este último caso, se suele elegir un  $x$  de tal forma que  $Ax$  este “cerca” de  $b$ , en algún sentido. Usualmente, esa noción de cercanía se escribe del siguiente modo:

$$\|Ax - b\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|Az - b\|^2. \quad (4.1)$$



Sin embargo, muchas veces es necesario reescalar el producto escalar, de modo que las coordenadas de un vector dado respecto a la base canónica de  $\mathbb{C}^m$  posean distintos pesos. Este proceso se lleva a cabo perturbando el producto escalar por medio de una matriz diagonal respecto a la base canónica  $D$ , positiva e inversible. El nuevo producto interno se define del siguiente modo

$$\langle x, y \rangle_D = \langle Dx, y \rangle.$$

Respecto a la norma que induce este producto interno, el problema de minimización (4.1) se reescribe de la siguiente forma:

$$\|D^{1/2}(Ax_D - b)\| = \min_{z \in \mathbb{C}^n} \|D^{1/2}(Az - b)\|^2. \quad (4.2)$$

Se puede incluso perturbar el producto interno con matrices diagonales semidefinidas positivas, aunque en este caso pueden existir más de una solución del problema (4.2).

Un notable teorema de Ben-Tal y Teboulle establece que las soluciones  $x_D$  se hallan todas en la cápsula convexa de ciertas soluciones singulares  $x_I$ . Para enunciar precisamente este resultado, necesitamos introducir cierta notación.

**Definición 4.1.1.** Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  ( $m \geq n$ ). Dado un conjunto de índices  $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ( $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ), por medio de  $A_I$  representaremos a la submatriz de  $n \times n$  de  $A$  dada por:

$$A_I = (A_{\alpha_i, j})_{i, j}$$

Análogamente, el vector  $b_I$  denotará el vector de  $\mathbb{C}^n$  dado por  $b_I = (b_{\alpha_1}, \dots, b_{\alpha_n})^t$ . Al conjunto de índices  $I$  tales que la matriz  $A_I$  resulta inversible lo denotaremos por medio de  $J(A)$ .

Usando estas definiciones, el teorema de Ben-Tal y Teboulle puede escribirse del siguiente modo:

**Teorema 4.1.2.** Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  ( $m > n$ ) cuyas columnas son linealmente independientes y sea  $D$  una matriz de  $m \times m$  diagonal respecto a la base canónica de  $\mathbb{C}^m$ , positiva e inversible. Entonces, la solución  $x_D$  del problema de cuadrados mínimos

$$\min_{z \in \mathbb{C}^n} \|D^{1/2}(Az - b)\|^2.$$

está dada por:

$$x_D = \sum_{I \in J(A)} \left( \frac{\det(D_I) |\det(A_I)|^2}{\sum_{J \in J(A)} \det(D_J) |\det(A_J)|^2} \right) x_{(I)}$$

donde  $x_{(I)}$  es la solución del sistema (no singular) reducido  $A_I x = b_I$ .



Por otra parte, de la teoría de inversas generalizadas, es bien sabido que la solución del problema (4.2) está dada por

$$x_D = (A^*DA)^{-1}A^*Db = (D^{1/2}A)^\dagger D^{1/2}b,$$

mientras que la solución del sistema reducido  $A_I x = b_I$  puede escribirse del siguiente modo:

$$x_I = (Q_I A)^\dagger Q_I b,$$

donde  $Q_I$  denota la proyección ortogonal al subespacios generado por los  $e_i$  con  $i \in I$ . Es fácil ver que las matrices

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D \quad \text{y} \quad A(Q_I A)^\dagger Q_I$$

corresponden a proyecciones sobre el rango de la matriz  $A$ . En relación con la proyección  $P_D = A(A^*DA)^{-1}A^*D$ , un año antes que apareciera el trabajo de Ben-Tal y Teboulle, Stewart [113] demostró que:

$$M_A = \sup\{\|A(A^*DA)^{-1}A^*D\| : D \in \mathcal{D}_m^+\} < \infty. \quad (4.3)$$

donde  $\mathcal{D}_m^+$  representa el conjunto de todas la matrices positivas, inversibles y diagonales respecto a la base canónica. Este resultado, a partir del Teorema 4.1.2, resulta muy sencillo de probar. En efecto, una mirada cuidadosa al Teorema de Ben-Tal y Teboulle revela que los coeficientes que aparecen en la la combinación convexa no dependen del vector  $b$ , sino que sólo depende de las matrices  $D$  y  $A$ . Luego, uno puede deducir el siguiente resultado:

**Proposición 4.1.3.** *Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  ( $m > n$ ) cuyas columnas son linealmente independientes y sea  $D$  una matriz de  $m \times m$  diagonal respecto a la base canónica de  $\mathbb{C}^m$ , positiva e inversible. Entonces,*

$$A(A^*DA)^{-1}A^*D = \sum_{Q \in J(A)} \left( \frac{\det(D_Q) |\det(A_Q)|^2}{\sum_{P \in J(A)} \det(D_P) |\det(A_P)|^2} \right) A(QA)^{-1}Q.$$

En particular,  $P_D \in \text{co}\{A(QA)^{-1}Q : Q \in J(A)\}$ .

**Corolario 4.1.4.** *Bajo las hipótesis de la Proposición anterior,*

$$M_A \leq \max_{I \in J(A)} \|A(Q_I A)^{-1}Q_I\| < \infty.$$

El resto de esta sección estará destinada a reescribir estos resultados en términos de proyecciones  $A$ -autoadjuntas y complementar los resultados antes mencionados. El principal objetivo de esto es enmarcar estos resultados en un contexto que pueda generalizarse a espacios de dimensión infinita, lo cual se hará en la siguiente sección. A lo largo de esta sección  $\mathcal{D}_m$  denotará el álgebra abeliana de matrices diagonales (respecto a la base canónica),  $\mathcal{P}(\mathcal{D}_m)$  el conjunto de proyecciones en  $\mathcal{D}_m$  y recordemos que por medio de  $\mathcal{D}_m^+$  denotábamos al cono de matrices positivas de  $\mathcal{D}_m$  y que dado  $I \in J(A)$ , por medio de  $Q_I$  denotamos a la proyección de  $\mathcal{P}(\mathcal{D}_m)$  tal que  $(Q_I)_{ii} = 1$  si y sólo si  $i \in I$ . Recordemos también la siguiente definición:



**Definición 4.1.5 (Dixmier [49]).** Dos subespacios  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$  de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  están en posición P' si  $\mathcal{T}^\perp \cap \mathcal{S} = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}^\perp = \{0\}$ . En tal caso, escribiremos  $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ .

**Proposición 4.1.6.** Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  ( $m > n$ ) cuyas columnas son linealmente independientes,  $D \in \mathcal{D}_m^+$  y sea  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_m)$ . Entonces:

1.  $P_{D, R(A)} = A(A^*DA)^{-1}A^*D$ .
2.  $I \in J(A)$  si y sólo si  $R(Q_I) \vee R(A)$ .
3. Si  $R(Q) \vee R(A)$  entonces  $P_{Q, R(A)} = A(QA)^{-1}Q$ .

*Demostración.*

1. Basta notar que  $D(A(A^*DA)^{-1}A^*D)$  es autoadjunto, pues al ser  $D$  inversible, existe una única proyección  $D$ -autoadjunta.
2. Por definición de  $J(A)$ ,  $I \in J(A)$  si y sólo si  $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$  es biyectivo, lo cual es equivalente a que tanto  $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$  como  $A^*Q : R(Q) \rightarrow \mathbb{C}^n$  sean inyectivos. Pero  $QA : \mathbb{C}^n \rightarrow R(Q)$  es inyectivo si y sólo si  $R(A) \cap N(Q) = \{0\}$ , y análogamente,  $A^*Q : R(Q) \rightarrow \mathbb{C}^n$  es inyectivo si y sólo si  $R(Q) \cap R(A)^\perp = R(Q) \cap N(A^*) = \{0\}$ . En consecuencia,  $I \in J(A)$  si y solamente si  $R(Q) \vee R(A)$ .
3. Claramente,  $A(QA)^{-1}Q$  es una proyección cuyo rango es  $R(A)$  y cuyo núcleo es  $N(Q)$ . Por otro lado, por definición  $R(P_{Q, R(A)}) = R(A)$ , y por el Teorema 2.3.7

$$N(P_{Q, R(A)}) = Q^{-1}(R(A)^\perp) \ominus (N(Q) \cap R(A)) = N(Q).$$

Luego  $A(QA)^{-1}Q = P_{Q, R(A)}$ . ■

Usando la Proposición 4.1.6, la Proposición 4.1.3 puede reescribirse del siguiente modo:

**Teorema 4.1.7.** Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio de  $\mathbb{C}^m$  y sea  $D \in \mathcal{D}_m^+$ . Entonces

$$P_{D, \mathcal{S}} \in co\{P_{Q, \mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_m) \text{ y } R(Q) \vee \mathcal{S}\}. \quad (4.4)$$

En particular,

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq \max \left\{ \|P_{Q, \mathcal{S}}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_m) : R(Q) \vee \mathcal{S} \right\}. \quad (4.5)$$

**Observación 4.1.8.** La desigualdad (4.5) es en realidad una igualdad. Este hecho fue demostrado por el mismo Stewart y también es una consecuencia de la siguiente Proposición. Es importante destacar que si uno no se restringe a matrices diagonales, el supremo de las normas de los  $P_{A, \mathcal{S}}$  no está acotado, aún cuando  $A$  sea inversible. De aquí la importancia del resultado obtenido por Stewart. ▲



**Proposición 4.1.9.** *Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio de  $\mathbb{C}^m$  y denotemos por medio de  $\mathcal{D}_{0,m}^+$  al conjunto de matrices diagonales, semidefinidas positivas de  $m \times m$ . Entonces*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \sup_{D \in \mathcal{D}_{0,m}^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\|. \quad (4.6)$$

*Demostración.* Sea  $D \in \mathcal{D}_{0,n}^+$  y consideremos la sucesión de matrices positivas e inversibles  $\{D_k\}_{k \geq 1}$  definidas por:

$$D_k = D + \frac{1}{k} I.$$

Si  $\mathcal{N} = \mathcal{S} \cap N(D)$ , entonces

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ B^* & 0 & C \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array} \quad \text{and} \quad D_k = \begin{pmatrix} A + \frac{1}{k}I & 0 & B \\ 0 & \frac{1}{k}I & 0 \\ B^* & 0 & C + \frac{1}{k}I \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathcal{S} \ominus \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{S}^\perp \end{array},$$

donde  $A$ , y por lo tanto  $A + \frac{1}{k}I$  son inversibles. Luego, por el Teorema 2.3.7,

$$P_{D_k,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} I & 0 & (A + \frac{1}{k}I)^{-1}B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P_{D,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} I & 0 & A^{-1}B \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia obtenemos

$$\|P_{D,\mathcal{S}}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{D_k,\mathcal{S}}\| \leq \sup_{D' \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D',\mathcal{S}}\|$$

lo cual prueba una desigualdad. La otra es consecuencia de (4.5). ■

**Corolario 4.1.10.** *Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio de  $\mathbb{C}^m$ . Entonces*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}_m^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \max \left\{ \|P_{Q,\mathcal{S}}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}_n) : R(Q) \vee \mathcal{S} \right\}. \quad (4.7)$$

**Observación 4.1.11.** En su trabajo, Stewart observó que si  $U$  es una matriz de  $m \times n$  cuyas columnas forman una base ortonormal del  $R(A)$  y  $m_I$  denota el menor valor singular de la submatriz  $U_I$ , entonces:

$$M_A^{-1} \leq \min\{m_I : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n\}. \quad (4.8)$$

Más aún, Stewart conjeturó que valía la igualdad en (4.8), lo cual fue demostrado posteriormente por O'Leary. Veamos como esta igualdad se deduce a partir de los resultados anteriores. Comencemos notando que por el Teorema 4.1.9, el máximo en (4.7) puede



tomarse tanto sobre todas las proyecciones en posición  $P'$  con  $\mathcal{S}(= R(A))$  como sobre todas la proyecciones diagonales cuyo rango tiene dimensión  $n$ . Luego,

$$M_A = \sup_{D \in \mathcal{D}_n^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \max \left\{ \|P_{Q_I,\mathcal{S}}\| : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n \right\}$$

Fijemos  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  tal que  $|I| = n$ . Por la Proposición 2.3.9 y el Lema el Lema 1.4.7

$$\|P_{Q_I,\mathcal{S}}\|^{-1} = s[\mathcal{S}, N(Q_I)] = \gamma(Q_I U)$$

Pero,  $m_I = \gamma(Q_I U)$ . En consecuencia,  $\|P_{Q_I,\mathcal{S}}\|^{-1} = m_I$ , y por lo tanto

$$\begin{aligned} M_A^{-1} &= \min \left\{ \|P_{Q_I,\mathcal{S}}\|^{-1} : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n \right\} \\ &= \min \left\{ m_I : I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ y } |I| = n \right\}. \end{aligned}$$

▲

Para finalizar, demostraremos un resultado de Gonzaga y Lara [62] usando las técnicas de proyecciones  $A$ -autoadjuntas.

**Proposición 4.1.12.** *Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  cuyas columnas forman una base de un subespacio propio  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{C}^m$  y sea  $Z$  otra matriz de  $m \times (m - n)$  cuyas columnas forman una base de  $\mathcal{S}^\perp$ . Entonces,*

$$M_A = \sup\{\|A(A^*DA)^{-1}A^*D\| : D \in \mathcal{D}_m^+\} = \sup\{\|Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D\| : D \in \mathcal{D}_m^+\} = M_Z$$

*Demostración.* Fijemos  $D \in \mathcal{D}_m^+$  y recordemos que  $P_{D,\mathcal{S}} = A(A^*DA)^{-1}A^*D$ . Como  $P_{D,\mathcal{S}}$  es  $D$ -autoadjunta,  $DP_{D,\mathcal{S}} = (P_{D,\mathcal{S}})^*D$ . Luego, es fácil ver que  $I - (P_{D,\mathcal{S}})^*$  es  $D^{-1}$ -autoadjunta. Más aún,  $R(I - (P_{D,\mathcal{S}})^*) = \mathcal{S}^\perp$  y  $N(I - (P_{D,\mathcal{S}})^*) = N(P_{D,\mathcal{S}})^\perp = (D(\mathcal{S})^\perp)^\perp = D(\mathcal{S})$ , que son precisamente el rango y el núcleo de  $Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D$ , como facilmente se puede comprobar. En consecuencia,  $I - (P_{D,\mathcal{S}})^* = Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D$ , y por lo tanto

$$\|A(A^*DA)^{-1}A^*D\| = \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \|I - (P_{D,\mathcal{S}})^*\| = \|Z(Z^*DZ)^{-1}Z^*D\|.$$

Finalmente, como la inversión es una biyección de  $\mathcal{D}_m^+$  en si mismo, la proposición queda demostrada. ■

## 4.2 Proyecciones escaleadas en espacios de dimensión infinita.

Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable. A lo largo de de esta sección, estudiaremos cantidades del tipo

$$\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D,A}\|,$$





donde  $\Gamma$  denota algún subconjunto de  $L(\mathcal{H})^+$ . Más precisamente, fijemos una base ortonormal  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , y sea  $\mathcal{D}$  el álgebra abeliana de todos los operadores diagonales con respecto a  $\mathcal{B}$ , i.e.  $C \in L(\mathcal{H})$  pertenece a  $\mathcal{D}$  si existe una sucesión acotada de números complejos  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $Ce_n = c_n e_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Los subconjuntos  $\Gamma$  que consideraremos serán los siguientes:

1.  $\mathcal{D}^+$ , el conjunto de elementos positivos e inversibles en  $\mathcal{D}$  (i.e. todos los  $\lambda_n > \varepsilon$ , para algún  $\varepsilon > 0$ ),
2.  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ , el conjunto de las proyecciones en  $\mathcal{D}$  (i.e.  $\lambda_n = 0$  o  $1$ ),
3.  $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ , el conjunto de elementos en  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$  con rango finito,
4.  $\mathcal{P}_{0,\mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})$ , el conjunto de elementos  $Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$  tales que  $R(Q) \cap \mathcal{S}^\perp = \{0\}$ ,

A diferencia de lo que ocurre en espacios de dimensión finita estos supremos pueden no ser finitos, aun cuando el subespacio  $\mathcal{S}$  sea finito dimensional. En tal sentido, el siguiente ejemplo es contundente:

**Ejemplo 4.2.1.** Sea  $\mathcal{S}$  el subespacio generado por  $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} e_n$ . Luego, es fácil ver que

$$P_{D,\mathcal{S}}(\cdot) = \frac{1}{\|D^{1/2}(x)\|^2} \langle \cdot, Dx \rangle x = \frac{1}{\|D^{1/2}(x)\|^2} (x \odot Dx).$$

En efecto, una cuenta bastante simple muestra que el operador de la derecha es idempotente; por otro lado,  $D(x \odot Dx) = Dx \odot Dx$  es un múltiplo de la proyección ortonormal sobre el subespacio generado por  $Dx$ . Fijado  $n \geq 1$ , tomemos una sucesión de operadores  $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{D}^+$  tales que sus autovalores convergen uniformemente a cero, salvo el correspondiente al autovector  $e_n$  que se mantiene constantemente igual a uno. No es difícil ver que en tal caso

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|P_{D_k,\mathcal{S}}\| = 2^n,$$

lo cual muestra que  $\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \infty$ . ▲

Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 4.2.2.** Un subespacio  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$  se dice **compatible** con respecto a  $\mathcal{B}$  (o  **$\mathcal{B}$ -compatible**) si es cerrado y se verifica la siguiente desigualdad:

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| < \infty. \quad (4.9)$$

En esta sección mostraremos que la  $\mathcal{B}$ -compatibilidad de un subespacio  $\mathcal{S}$  es equivalente a que  $\sup_{D \in \Gamma} \|P_{D,\mathcal{S}}\|$  sea finito, donde  $\Gamma$  denota alguno de los subconjuntos de operadores



diagonales mencionados anteriormente. Comenzaremos demostrando que un subespacio  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible si y sólo si el par  $(Q, \mathcal{S})$  es compatible para cada  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$  y además

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| < \infty.$$

Esto nos ayudará a obtener caracterizaciones alternativas de la  $\mathcal{B}$ -compatibilidad en términos de ángulos entre subespacios y de propiedades de aproximación finita que estos subespacios poseen. Luego, daremos una versión del teorema de Ben-Tal y Teboulle para subespacios  $\mathcal{B}$ -compatibles, que finalmente nos permitirá demostrar que un subespacio es  $\mathcal{B}$ -compatible si y sólo si  $\sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\|$  es finito.

A lo largo de esta sección  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  denotará una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , mientras que  $\mathcal{S}$  denotará un subespacio cerrado de dicho espacio de Hilbert. Para cada  $I \subseteq \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}_I = \text{gen}\{e_i : i \in I\}$  y  $Q_I$  denotará la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{H}_I$ . En particular, si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{H}_n = \text{gen}\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $Q_n$  es la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{H}_n$ . Por otro lado  $\mathcal{S}_I = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_I$  (resp.  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_n$ ). Comencemos con la siguiente definición:

**Definición 4.2.3.** Si  $\mathcal{S}$  es compatible con toda proyección diagonal, entonces definimos la cantidad  $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]$  del siguiente modo:

$$K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\|.$$

En caso de que el par  $(Q, \mathcal{S})$  no sea compatible para alguna proyección  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$  definimos  $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \infty$ .

A continuación demostraremos la equivalencia entre la  $\mathcal{B}$ -compatibilidad de  $\mathcal{S}$  y la condición  $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$ . Más aún, demostraremos que

$$K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| = \sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\|.$$

Comenzaremos por la parte más sencilla:

**Proposición 4.2.4.** *Supongamos que  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible. Entonces  $(Q, \mathcal{S})$  es compatible para todo  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$  y además:*

$$K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}}\| \leq \sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\|.$$

*Demostración.* Sólo demostraremos que dada  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ , entonces el par  $(Q, \mathcal{S})$  es compatible. El resto de la demostración sigue esencialmente las mismas líneas que la demostración de la Proposición 4.1.9. Fijemos  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$  y definamos la sucesión  $\{D_k\}_{k \geq 1}$  de operadores positivos e inversibles del siguiente modo:  $D_k = Q + \frac{1}{k}I$ . Como  $D_k$  es invertible, la proyección  $P_{D_k, \mathcal{S}}$  está bien definida. Más aún, por hipótesis, sabemos que

$$\sup_{k \geq 1} \|P_{D_k, \mathcal{S}}\| < \infty.$$



Por lo tanto, la sucesión  $\{P_{D_k, \mathcal{S}}\}$  posee un punto límite  $P$  respecto a la topología débil de operadores, pues la bola unitaria de  $L(\mathcal{H})$  es compacta respecto a la topología débil de operadores (ver Teorema 1.1.7). Además, como el espacio  $\mathcal{H}$  es separable, la mencionada topología es metrizable en la bola. Luego, podemos suponer que  $P_{D_k, \mathcal{S}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{WOT}} P$ . De no ser así, existe una subsucesión de  $\{P_{D_k, \mathcal{S}}\}_{k \in \mathbb{N}}$  la cual converge, y utilizamos dicha subsucesión.

Demostraremos que  $P \in \mathcal{P}(Q, \mathcal{S})$ , es decir,  $P^2 = P$ ,  $R(P) = \mathcal{S}$  y  $QP = P^*Q$ . Las primeras dos condiciones surgen de hecho de que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$P_{D_k, \mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^\perp \end{pmatrix},$$

donde  $X$  es el límite débil de la sucesión  $X_k = P_{\mathcal{S}} D_k (1 - P_{\mathcal{S}})$ . Por otro lado, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$D_k P_{D_k, \mathcal{S}} = P_{D_k, \mathcal{S}}^* D_k.$$

Un simple argumento del tipo  $\varepsilon/2$  muestra que  $D_k P_{D_k, \mathcal{S}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{WOT}} QP$ , por ende, tomando límite en la identidad recientemente mencionada y usando el hecho de que la involución es continua respecto a la topología débil de operadores, resulta que  $QP = P^*Q$ . ■

Para demostrar la recíproca, es necesario probar antes algunos lemas.

**Lema 4.2.5.** *Sea  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de subconjuntos de  $\mathbb{N}$  tales que su unión es todo el conjunto de números naturales. Supongamos que  $\mathcal{S}$  satisface*

$$c := \sup \{c[\mathcal{S}, \mathcal{H}_{I_n}] : n \in \mathbb{N}\} < 1, \quad (4.10)$$

entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{I_n}$  es densa en  $\mathcal{S}$ .

*Demostración.* Comencemos notando que es equivalente demostrar que:

$$P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} P_{\mathcal{S}}.$$

Sea  $x \in \mathcal{H}$  un vector unitario y sea  $\varepsilon > 0$ . Tomemos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $c^{2k-1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Por la Proposición 1.2.8, para todo  $n \geq 1$

$$\left\| (P_{\mathcal{S}} Q_{I_n})^k - P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, como  $Q_{I_n} P_{\mathcal{S}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} P_{\mathcal{S}}$  y la función  $f(x) = x^k$  es continua respecto a la topología fuerte de operadores en conjuntos acotados por la Proposición 1.1.12, existe  $n_0 \geq 1$  tal que, para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\left\| \left[ (Q_{I_n} P_{\mathcal{S}})^k - P_{\mathcal{S}} \right] x \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$



Entonces, para  $n \geq n_0$ ,

$$\|(P_{\mathcal{S}} - P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n}) x\| \leq \left\| \left[ P_{\mathcal{S}} - (P_{\mathcal{S}} Q_{I_n})^k \right] x \right\| + \left\| \left( (P_{\mathcal{S}} Q_{I_n})^k - P_{\mathcal{S}} \wedge Q_{I_n} \right) x \right\| < \varepsilon.$$

■

**Lema 4.2.6.** *Si  $\mathcal{S}$  está incluido en algún  $\mathcal{H}_n$ , entonces  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible. Más aún*

$$\{P_{D,\mathcal{S}} : D \in \mathcal{D}^+\} \subseteq \text{co}\{P_{Q,\mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), Q \leq Q_n \text{ y } R(Q) \vee \mathcal{S}\}.$$

En particular,

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| \leq \sup\{\|P_{Q,\mathcal{S}}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), Q \leq Q_n \text{ y } R(Q) \vee \mathcal{S}\} = K[\mathcal{S}, \mathcal{D}].$$

*Demostración.* Dado  $D \in \mathcal{D}$ ,  $D \geq 0$ , el subespacio  $\mathcal{H}_n$  reduce a  $D$ . Luego, la descomposición matricial de  $D$  inducida por  $\mathcal{H}_n$  tiene la siguiente forma:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_n \\ \mathcal{H}_n^\perp \end{matrix}.$$

Más aún, por la Proposición 2.3.10,

$$P_{D,\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} P_{D_1,\mathcal{S}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{H}_n \\ \mathcal{H}_n^\perp \end{matrix}, \quad (4.11)$$

donde  $P_{D_1,\mathcal{S}}$  está siendo considerado como un operador de  $L(\mathcal{H}_n)$ . Como  $\dim \mathcal{H}_n < \infty$ ,  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible. El resto de las afirmaciones son consecuencias de la Proposición 4.1.7. ■

**Lema 4.2.7.** *Dado  $n \in \mathbb{N}$ , entonces:*

$$K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q,\mathcal{S}_n}\| \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q,\mathcal{S}}\| = K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]$$

*Demostración.* Usando el Lema 4.2.6 se tiene que:

$$K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] = \sup\{\|P_{Q,\mathcal{S}_n}\| : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), Q \leq Q_n \text{ and } R(Q) \vee \mathcal{S}_n\}.$$

Luego, basta probar la desigualdad para cada  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$  tal que  $R(Q) \vee \mathcal{S}_n$  y  $Q \leq Q_n$ . Sea una  $Q$  así, y consideremos  $\hat{Q} = Q + (1 - Q_n) \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ . Entonces  $N(\hat{Q}) = N(Q) \cap R(Q_n)$ , y

$$\begin{aligned} c[N(Q), \mathcal{S}_n] &= \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(Q), y \in \mathcal{S}_n \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(Q) \cap R(Q_n), y \in \mathcal{S}_n \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &\leq \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(Q) \cap R(Q_n), y \in \mathcal{S} \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in N(\hat{Q}), y \in \mathcal{S} \text{ y } \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &= c[N(\hat{Q}), \mathcal{S}]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la Proposición 2.3.9, obtenemos

$$\|P_{Q,\mathcal{S}_n}\| = s[N(Q), \mathcal{S}_n]^{-1} \leq s[N(Q), \mathcal{S}]^{-1} = s[N(\hat{Q}), \mathcal{S}]^{-1} = \|P_{\hat{Q},\mathcal{S}}\|,$$

tal como queríamos demostrar. ■



**Observación 4.2.8.** Por la Proposición 2.3.9, sabemos que  $\|P_{Q,\mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}$ . Luego, como  $Q \longrightarrow (1 - Q)$  establece una biyección en el conjunto  $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ , se tiene que:

$$K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2} = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} (1 - c[R(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}.$$

Más aún, el supremo se puede tomar sólo sobre las proyecciones del conjunto  $\mathcal{P}_0(\mathcal{D})$ . En efecto, una cuidadosa inspección de la demostración del lema anterior muestra que, con la notación allí empleada, basta considerar las proyecciones  $E = 1 - \widehat{Q}$ .  $\blacktriangle$

Ahora sí estamos en condiciones de probar la recíproca:

**Proposición 4.2.9.** Si  $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$ , entonces,  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible. Más aún

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D,\mathcal{S}}\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q,\mathcal{S}}\| = K[\mathcal{S}, \mathcal{D}].$$

*Demostración.* Sea  $D \in \mathcal{D}^+$ . Recordemos que  $\|\cdot\|_D$  denota la norma definida por  $x \rightarrow \|D^{1/2}x\|$ . Como  $D$  es inversible,  $\|\cdot\|_D$  es equivalente a  $\|\cdot\|$ ; por ende, la unión de los subespacios  $\mathcal{S}_n$  es densa en  $\mathcal{S}$  con respecto a ambas normas  $\|\cdot\|_D$  y  $\|\cdot\|$ . Como  $P_{D,\mathcal{S}}$  (resp.  $P_{D,\mathcal{S}_n}$ ) es la proyección  $D$ -ortogonal sobre el subespacio  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}_n$ ), entonces, para todo vector unitario  $x \in \mathcal{H}$

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\|_D \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Usando nuevamente la equivalencia entre las normas  $\|\cdot\|_D$  y  $\|\cdot\|$ , obtenemos que:

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.12)$$

Ahora bien, fijemos un vector unitario  $x \in \mathcal{H}$ . Juntando el Lema 4.2.7 y el Lema 4.2.6, resulta que:

$$\|P_{D,\mathcal{S}_n}x\| \leq \|P_{D,\mathcal{S}}x\| \leq K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}].$$

Luego,

$$\|P_{D,\mathcal{S}}x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{D,\mathcal{S}_n}x\| \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}],$$

lo cual implica que  $\|P_{D,\mathcal{S}}\| \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]$ . Finalmente, como  $D$  es arbitrario, la proposición queda demostrada.  $\blacksquare$

## Caracterizaciones alternativas de la $\mathcal{B}$ -compatibilidad

Como consecuencia de las Proposiciones 4.2.4 y 4.2.9 y de los lemas utilizados para demostrar esta última, obtenemos las siguientes caracterizaciones de la  $\mathcal{B}$ -compatibilidad. La primera de ellas es en términos de ángulos entre subespacios.



**Proposición 4.2.10.** *Son equivalentes:*

1.  $\mathcal{S}$  is  $\mathcal{B}$ -compatible;
2.  $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\} < 1$
3.  $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})\} < 1$ ;
4.  $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D}) \text{ y } R(Q) \cap \mathcal{S} = \{0\}\} < 1$ .

*Demostración.* Por las Proposiciones 4.2.4 y 4.2.9, sabemos  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible si y sólo si  $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$ . Recordemos, por otra parte, que la Proposición 2.3.9 establece la siguiente identidad:

$$\|P_{Q, \mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}.$$

Luego, claramente  $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] < \infty$  si y sólo si  $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\} < 1$ .

Para probar las otras equivalencias, llamemos

$$C = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)], \quad C_0 = \sup_{Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)] \quad \text{y} \quad C_{0, \mathcal{S}} = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}}(\mathcal{D})} c[\mathcal{S}, R(Q)].$$

Demostraremos que  $C = C_0 = C_{0, \mathcal{S}}$ . Claramente  $C_{0, \mathcal{S}} \leq C_0 \leq C$ . Para probar que  $C_0 \leq C_{0, \mathcal{S}}$ , sea  $P$  la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}^\perp$ . Dada  $Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})$  existe  $E \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}}(\mathcal{D})$  tal que  $E \leq Q$  y  $R(TQ) = R(TE)$ . Luego, usando la Proposición 1.4.7, resulta

$$s[\mathcal{S}, R(E)]^2 = \gamma(PE)^2 = \gamma(PEP^*) \leq \gamma(PQP^*) = \gamma(PQ)^2 = s[\mathcal{S}, R(Q)]^2.$$

Por lo tanto  $c[\mathcal{S}, R(Q)] \leq c[\mathcal{S}, R(E)]$ , y en consecuencia  $C_0 \leq C_{0, \mathcal{S}}$ .

Supongamos ahora que  $C_0 < 1$  (si  $C_0 = 1$  no hay nada que probar). Como hemos notado en la observación 4.2.8,

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}_n}\| \leq (1 - C_0^2)^{-1/2} < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, dado que se cumplen sus hipótesis, el Lema 4.2.5 nos asegura que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$  es densa en  $\mathcal{S}$ . Luego, siguiendo la demostración de la Proposición 4.2.9 resulta que

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq (1 - C_0^2)^{-1/2}.$$

Finalmente, de la Proposición 4.2.4 y la identidad  $\|P_{Q, \mathcal{S}}\| = (1 - c[N(Q), \mathcal{S}]^2)^{-1/2}$ , se obtiene que  $C \leq C_0$ . ■

**Proposición 4.2.11.** *Son equivalentes:*

1.  $\mathcal{S}$  is  $\mathcal{B}$ -compatible;



2. a.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$  es denso en  $\mathcal{S}$ ;
- b. Existe  $M > 0$  tal que  $K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}] = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_{Q, \mathcal{S}_n}\| \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.*

$1 \Rightarrow 2$ . Por la proposición anterior  $\sup \{c[\mathcal{S}, R(Q)] : Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\} < 1$ . Luego, esta implicación es una consecuencia de los Lemas 4.2.5 y 4.2.7.

$2 \Rightarrow 1$ . Fijemos  $D \in \mathcal{D}^+$ . El argumento utilizado en la Proposición 4.2.9 permite demostrar que  $\|P_{D, \mathcal{S}}\| \leq M$ . ■

**Corolario 4.2.12.** *Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio de dimensión finita. Entonces,  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible si y sólo si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_n$ .*

#### Observaciones 4.2.13.

1. Como  $c[\mathcal{S}, \mathcal{T}] = c[\mathcal{S}^\perp, \mathcal{T}^\perp]$  para todo par de subespacios cerrados  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$ , entonces un subespacio  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible si y solamente si  $\mathcal{S}^\perp$  es  $\mathcal{B}$ -compatible. Más aún,  $K[\mathcal{S}, \mathcal{D}] = K[\mathcal{S}^\perp, \mathcal{D}]$  (Comparar esto con la Proposición 4.1.12).
2. El hecho de que la compatibilidad de  $\mathcal{S}$  con  $\mathcal{B}$  implique que la unión de los  $\mathcal{S}_n$  es densa en  $\mathcal{S}$ , de algún modo, muestra que la condición de  $\mathcal{B}$ -compatibilidad es bastante restrictiva. No obstante, como veremos en la siguiente sección, estos subespacios aparecen en las aplicaciones. ▲

### Teorema de Ben-Tal y Teboulle en espacios de dimensión infinita

A continuación demostraremos una versión del teorema de Ben-Tal y Teboulle en espacios de Hilbert para subespacios  $\mathcal{B}$ -compatibles. Dado que la demostración de la misma es larga y bastante técnica, la dividiremos en una serie de lemas. De aquí hasta el final de esta sección supondremos que  $\mathcal{S}$  es un subespacio (cerrado)  $\mathcal{B}$ -compatible.

**Teorema 4.2.14.** *Dado  $D \in \mathcal{D}^+$ , entonces*

$$P_{D, \mathcal{S}} \in \overline{\text{co}\{P_{Q, \mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})\}},$$

donde la clausura es respecto a la topología fuerte de operadores.

**Lema 4.2.15.** *Si  $P$  es la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}$  y  $P_n$  la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}_n$ , entonces, existe una constante  $\eta > 0$  tal que para todo  $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$  y todo  $x \in \mathcal{H}$*

$$\left\| \left( (PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger \right) x \right\| \leq \eta \left\| \left( (P - P_n)(PQP)^\dagger \right) x \right\| + \left\| \left( (P - P_n)(PQP)^\dagger \right)^2 x \right\|.$$



*Demostración.* Como  $R(P_n Q P_n) \subseteq R(PQP)$ , por la Proposición 1.3.7, se tiene que:

$$(PQP)^\dagger - (P_n Q P_n)^\dagger \leq - (P_n Q P_n)^\dagger (P_n Q P_n - PQP) (PQP)^\dagger \\ + (I - (P_n Q P_n)^\dagger (P_n Q P_n)) ((PQP) - (P_n Q P_n)) (PQP)^\dagger^2.$$

Usando el hecho de que  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible y el Lema 4.2.7, resulta que

$$\|(P_n Q P_n)^\dagger\| = \gamma(Q P_n)^{-2} = s[\mathcal{S}_n, N(Q)]^{-2} \leq K[\mathcal{S}_n, \mathcal{D}]^{-2} \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} ((PQP) - (P_n Q P_n)) (PQP)^\dagger^2 &= (P_n Q (P - P_n) + (P - P_n) Q P) (PQP)^\dagger^2 \\ &= P_n Q ((P - P_n)) (PQP)^\dagger^2 + (P - P_n) (PQP)^\dagger, \\ (P_n Q P_n)^\dagger (P_n Q P_n - PQP) (PQP)^\dagger &= (P_n Q P_n)^\dagger P_n (P_n Q P_n - PQP) (PQP)^\dagger \\ &= (P_n Q P_n)^\dagger P_n Q (P_n - P) (PQP)^\dagger. \end{aligned}$$

En consecuencia, usando el hecho de que  $I - (P_n Q P_n)^\dagger (P_n Q P_n)$ ,  $P$ ,  $P_n$  y  $Q$  son proyecciones, y por lo tanto tienen norma igual a uno, obtenemos la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} \left\| ((PQP)^\dagger - (P_n Q P_n)^\dagger) x \right\| &\leq (K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2} + 1) \left\| ((P - P_n) (PQP)^\dagger) x \right\| \\ &\quad + \left\| ((P - P_n) (PQP)^\dagger^2) x \right\|. \end{aligned}$$

■

**Lema 4.2.16.** Sea  $A \in L(\mathcal{H})^+$  y  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  una red de operadores semidefinidos positivos que converge al operador  $A$ . Supongamos que existe  $\eta > 0$  tal que  $\eta \leq \gamma(A_\alpha)$  para todo  $\alpha \in \Lambda$ , y también  $\eta \leq \gamma(A)$ . Entonces,  $A_\alpha^\dagger \xrightarrow[\alpha]{\text{SOT}} A^\dagger$ .

*Demostración.*

Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida del siguiente modo:

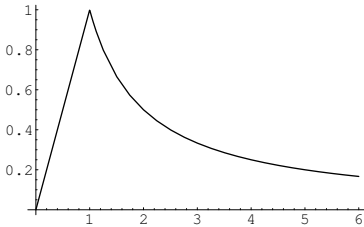


Figura 4.1: Función  $h(x)$ .

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases},$$

Luego, si  $f(x) = h(x/\eta)$ , entonces  $A_\alpha^\dagger = f(A_\alpha)$  para todo  $\alpha \in \Lambda$  y  $f(A) = A^\dagger$ . Como la función  $f(x)$  satisface las condiciones del Lema 1.1.12, resulta que  $A_\alpha^\dagger \xrightarrow[\alpha]{\text{SOT}} A^\dagger$ .

■





**Lema 4.2.17.** *Dado  $x \in \mathcal{H}$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que si  $n \geq n_0$*

$$\|P_{Q,S} - P_{Q,S_n}\| \leq \varepsilon \quad \forall Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D}).$$

*Demostración.* Al igual que en el lema anterior, llamemos  $P$  a la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}$  y  $P_n$  a la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}_n$ . Fijemos por un instante la proyección  $Q$ . Como  $c[N(P), R(Q)] < 1$ ,  $PQP$  tiene rango cerrado, y análogamente  $P_nQP_n$  también posee rango cerrado. En tal caso, como hemos visto en la observación 2.3.6

$$P_{Q,S} = P + (PQP)^\dagger PQ(1 - P) \quad \text{y} \quad P_{Q,S_n} = P_n + (P_nQP_n)^\dagger P_nQ(1 - P_n).$$

Luego, dado  $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|(P_{Q,S} - P_{Q,S_n})x\| &\leq \|(P - P_n)x\| + \left\| \left( (PQP)^\dagger Q(I - P) - (P_nQP_n)^\dagger Q(I - P_n) \right) x \right\| \\ &\leq \|(P - P_n)x\| + \left\| \left( (PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger \right) Q(I - P)x \right\| \\ &\quad + \|(P_nQP_n)^\dagger Q(P - P_n)x\|. \end{aligned}$$

Como hemos visto en la demostración del lema anterior,  $\|(P_nQP_n)\| \leq K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2}$ , por lo tanto, si  $\mu = (1 + K[\mathcal{S}, \mathcal{D}]^{-2})$ :

$$\begin{aligned} \|(P_{Q,S} - P_{Q,S_n})x\| &\leq \|(P - P_n)x\| + \left\| \left( (PQP)^\dagger Q(I - P) - (P_nQP_n)^\dagger Q(I - P_n) \right) x \right\| \\ &\leq \mu \|(P - P_n)x\| + \left\| \left( (PQP)^\dagger - (P_nQP_n)^\dagger \right) Q(I - P)x \right\|, \end{aligned}$$

y por el lema anterior

$$\begin{aligned} &\leq \mu \|(P - P_n)x\| + \eta \left\| \left( (P - P_n)(PQP)^\dagger \right) Q(I - P)x \right\| \\ &\quad + \left\| \left( (P - P_n)(PQP)^\dagger \right)^2 Q(I - P)x \right\|. \end{aligned}$$

Claramente el primer término de esta última expresión no depende de  $Q$ , y tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  (por el Lema 4.2.5). Luego, basta ver que los dos restantes tienden a cero uniformemente respecto de  $Q$ . Para ello, consideremos el conjunto  $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  de las sucesiones de ceros y unos. Por el teorema de Tychonoff, este conjunto es compacto con la topología producto, la cual coincide con la topología de convergencia “puntual” coordinada a coordinada. Dado  $r \in \mathcal{C}$ , sea  $Q_r \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$  la proyección que en su diagonal posee la sucesión  $r$ . Es fácil ver que si una red  $\{r_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  de  $\mathcal{C}$  converge puntualmente a cierto  $r \in \mathcal{C}$ , entonces  $Q_{r_\alpha}$  converge a  $Q_r$  en la topología fuerte de operadores. En consecuencia, si para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos las funciones  $f_n : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $g_n : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \left\| \left( (P - P_n)(PQ_rP)^\dagger \right) Q_r(I - P)x \right\| \quad \text{y} \\ g_n(r) &= \left\| \left( (P - P_n)(PQ_rP)^\dagger \right)^2 Q_r(I - P)x \right\|, \end{aligned}$$



dichas funciones resultan continuas. En efecto, si  $r_\alpha \xrightarrow[\alpha]{p} r$ , entonces  $PQ_{r_\alpha}P \xrightarrow[\alpha]{\text{TFO}} PQ_rP$ , y como los  $\gamma(PQP)$  están acotados por debajo uniformemente para todo  $Q$ , por el Lema 4.2.16, resulta que  $(PQ_{r_\alpha}P)^\dagger \xrightarrow[\alpha]{\text{TFO}} (PQ_rP)^\dagger$ . Finalmente, como el producto es conjuntamente continuo, respecto a la topología fuerte, en conjuntos acotados las funciones  $f_n$  y  $g_n$  son continuas<sup>1</sup>.

Por otro lado, como  $P - P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{SOT}} 0$  por el Lema 4.2.5, las sucesiones de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son decrecientes y convergen puntualmente a cero. Luego, por el teorema de Dini, tanto  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  como  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergen a cero uniformemente respecto a  $Q$ . ■

Ahora tenemos todo para poder realizar la prueba del Teorema 4.2.14.

*Demostración del Teorema 4.2.14.* Sea  $D \in \mathcal{D}^+$ . Recordemos que  $\|\cdot\|_D$  denota la norma definida por  $x \rightarrow \|D^{1/2}x\|$ . Como  $D$  es inversible,  $\|\cdot\|_D$  es equivalente a  $\|\cdot\|$ ; por ende, la unión de los subespacios  $\mathcal{S}_n$  es densa en  $\mathcal{S}$  con respecto a ambas normas  $\|\cdot\|_D$  y  $\|\cdot\|$ . Como  $P_{D,\mathcal{S}}$  (resp.  $P_{D,\mathcal{S}_n}$ ) es la proyección  $D$ -ortogonal sobre el subespacio  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}_n$ ), entonces, para todo vector unitario  $x \in \mathcal{H}$

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\|_D \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Usando nuevamente la equivalencia entre las normas  $\|\cdot\|_D$  y  $\|\cdot\|$ , obtenemos que:

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (4.13)$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Por el Lema 4.2.17, existe un  $n_0 \geq 1$  tal que para todo  $n \geq n_0$

$$\|(P_{Q,\mathcal{S}} - P_{Q,\mathcal{S}_n})x\| \leq \varepsilon/2$$

De acuerdo a (4.13) existe  $n_1 \geq n_0$  tal que para todo  $n \geq n_1$

$$\|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| \leq \varepsilon/2.$$

Por la Proposición 4.2.6, existe  $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{P}_{0,\mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})$  tales que

$$P_{D,\mathcal{S}_n} = \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}_n}.$$

con  $\alpha_j > 0$  y  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| P_{D,\mathcal{S}} - \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}} \right\| &\leq \|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| + \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}_n} - \sum_{j=1}^k \alpha_j P_{Q_j,\mathcal{S}} \right\| \\ &\leq \|(P_{D,\mathcal{S}_n} - P_{D,\mathcal{S}})x\| + \sum_{j=1}^k \alpha_j \|P_{Q_j,\mathcal{S}_n} - P_{Q_j,\mathcal{S}}\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

lo cual muestra que  $P_{D,\mathcal{S}}$  se encuentra en la clausura respecto a la topología fuerte de operadores del conjunto  $\{P_{Q,\mathcal{S}} : Q \in \mathcal{P}_{0,\mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})\}$ . ■

<sup>1</sup>Más aún, se puede probar que las familias  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son equicontinuas.



Con esta versión del teorema de Ben-Tal Teboulle a mano, podemos probar finalmente el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.18.** *Sea  $\mathcal{S}$  un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Entonces*

$$\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_D, s\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_Q, s\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})} \|P_Q, s\| = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_Q, s\|.$$

*En particular, estos supremos son finitos si y sólo si  $\mathcal{S}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible.*

*Demostración.* Las primera igualdad es consecuencia de las Proposiciones 4.2.4 y 4.2.9. Por otro lado, claramente

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \|P_Q, s\| \geq \sup_{Q \in \mathcal{P}_0(\mathcal{D})} \|P_Q, s\| \geq \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_Q, s\|.$$

En consecuencia, basta demostrar que  $\sup_{D \in \mathcal{D}^+} \|P_D, s\| \leq \sup_{Q \in \mathcal{P}_{0, \mathcal{S}^\perp}(\mathcal{D})} \|P_Q, s\|$ . Pero ello es consecuencia del Teorema 4.2.14, con lo cual la demostración está completa. ■

## 4.3 Aplicaciones a la teoría de marcos

La condición de que un subespacio sea compatible con cierta base  $\mathcal{B}$  es bastante restrictiva. Sin embargo, como veremos en la Proposición 4.3.1, los subespacios de codimensión infinita de  $\ell^2(\mathbb{N})$  compatibles con la base canónica son precisamente los núcleos de los operadores de síntesis de los marcos de Riesz. A partir de esta relación, estudiaremos los marcos de Riesz y los marcos de Riesz condicionados utilizando las técnicas desarrolladas en la sección anterior. Dado que en la teoría de marcos hay letras que usualmente está reservadas para ciertos objetos, comenzaremos detallando la notación que utilizaremos a lo largo de esta subsección. Por medio de  $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  denotaremos a la base canónica de  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ . Dado  $I \subseteq \mathbb{N}$ , entonces  $\mathcal{M}_I = \overline{\text{gen}}\{e_n : n \in I\}$  y  $P_I = P_{\mathcal{M}_I}$  denotará la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{M}_I$ . En el caso particular de  $I = \mathbb{I}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ , escribiremos  $\mathcal{M}_n$  en vez de  $\mathcal{M}_I$ . Dado un subespacio cerrado  $\mathcal{N}$  de  $\ell^2$ ,  $\mathcal{N}_n = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Análogamente  $\mathcal{N}_I = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_I$ ,  $I \subseteq \mathbb{N}$ . Si  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un marco para  $\mathcal{H}$ , entonces  $\mathcal{F}_I = \{f_n\}_{n \in I}$ . Recordemos que  $\mathcal{F}_I$  es una sucesión marco si es un marco para  $\overline{\text{gen}}\{\mathcal{F}_I\}$ . Si  $\mathcal{F}_I$  es también un marco para  $\mathcal{H}$ , entonces diremos que es un submarco de  $\mathcal{F}$ .

El primer resultado que consideraremos es una caracterización de los marcos de Riesz en términos de subespacios  $\mathcal{B}$ -compatibles.

**Proposición 4.3.1.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco y  $T$  su operador de síntesis. Si  $\mathcal{N} = N(T)$ , entonces,  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz si y sólo si el subespacio  $\mathcal{N}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible.*

*Demostración.* En primer lugar, notemos que  $\mathcal{F}_I$  es una sucesión marco si y sólo si  $R(TP_I)$  es cerrado. Más aún, las cotas de la sucesión  $\mathcal{F}_I$  son  $\gamma(TP_I)^2$  y  $\|TP_I\|^2$ . Luego, la definición de marco de Riesz es equivalente a que existe un  $A > 0$  tal que para todo  $I \in \mathbb{N}$



$A \leq \gamma(TP_I)$ . Pero por la Proposición , esto ocurre si y sólo si existe una constante  $c < 1$  tal que

$$\sup_{I \subseteq \mathbb{N}} c[\mathcal{N}, \mathcal{M}_I] < 1,$$

lo cual, por la Proposición 4.2.10 dice que  $\mathcal{N}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible. ■

A partir de las distintas caracterizaciones de  $\mathcal{B}$ -compatibilidad se pueden deducir las siguientes para los marcos de Riesz.

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco,  $T$  su operador de síntesis y  $\mathcal{N} = N(T)$ . Entonces, son equivalentes:*

1.  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz.
2.  $\mathcal{N}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible.
3. Existe una cota de marco inferior uniforme para toda sucesión marco finita y linealmente independiente  $\mathcal{F}_J$ ,  $J \subset \mathbb{N}$ .
4. Existe  $d > 0$  tal que  $\gamma(TP_J) \geq d$ , para todo  $J \in \mathbb{N}$  finito y tal que  $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}_J = \{0\}$ .

*Demostración.* Si  $I$  es un subconjunto finito de  $\mathbb{N}$ , entonces,  $\mathcal{M}_I \cap \mathcal{N} = \{0\}$  si y sólo si  $\mathcal{F}_I$  es linealmente independiente. Luego, las condiciones 3 y 4 son equivalentes. Por las Proposiciones 1.4.5 y 4.2.10, también son equivalentes a que  $\mathcal{N}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible. La equivalencia entre las condiciones 1 y 2 fue establecida en la Proposición 4.3.1. ■

Siguiendo los mismos argumentos que los empleados en la demostración de la Proposición 4.3.1, se puede establecer la siguiente caracterización de los marcos de Riesz condicionados.

**Proposición 4.3.3.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco y  $\mathcal{N}$  el núcleo de su operador de síntesis. Entonces  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz condicionado si y sólo si existe una sucesión creciente  $\{I_n\}$  de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{N} \quad y \quad c = \sup_{n \in \mathbb{N}} c[\mathcal{N}, \mathcal{M}_{I_n}] < 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

Como corolario de esta proposición y del Lema 4.2.5 se obtiene la siguiente condición necesaria para que un marco sea condicionado de Riesz:

**Proposición 4.3.4.** *Sea  $\mathcal{F}$  un marco de Riesz condicionado y  $\mathcal{N}$  el núcleo de su operador de síntesis. Entonces*

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n\right) = \mathcal{N}. \quad (4.15)$$



**Corolario 4.3.5.** *Sea  $\mathcal{F}$  un marco de Riesz condicionado,  $T$  su operador de síntesis y supongamos que  $\dim N(T) < \infty$ . Entonces,  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz. Más aún, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $N(T) \subseteq \mathcal{M}_m$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{N} = N(T)$ . Por la Proposición 4.3.4,  $\mathcal{N}$  satisface (4.15). Como por hipótesis  $\dim \mathcal{N} < \infty$ , entonces existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathcal{N} = N(T) \subseteq \mathcal{M}_m$ . Luego, por el Corolario 4.2.12,  $\mathcal{N}$  es  $\mathcal{B}$ -compatible, lo cual implica que  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz por la Proposición 4.3.1. ■

**Corolario 4.3.6.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco de Riesz condicionado. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $S_n$  el operador de marco de  $\{f_k\}_{k=1}^n$  y  $A_n$  la mínima de todas las cotas de marco inferiores asociadas a las subsucesiones de  $\{S_n^{-1/2} f_k\}_{k=1}^n$ . Si  $\inf_n A_n > 0$ , entonces  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz.*

*Demostración.* Sea  $T$  el operador de síntesis de  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{N} = N(T)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sean  $\mathcal{F}_n = \{f_k\}_{k=1}^n$ ,  $\mathcal{B}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $P_n = P_{\mathcal{M}_n}$ . Notemos que  $TP_n : \mathcal{M}_n \rightarrow \overline{\text{gen}}\{f_k : k = 1, \dots, n\}$  puede ser considerado, módulo un operador unitario, como el operador de síntesis de  $\mathcal{F}_n$ . De este modo, se tiene que  $S_n = TP_n T^*$ . Notemos también que  $\{S_n^{-1/2} f_k\}_{k=1}^n$  es un marco de Parseval, y  $N(TP_n) = N(S_n^{-1/2} TP_n) = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}_n = \mathcal{N}_n$ . Luego, por el Lema 1.4.7, si  $J \subset \{1, \dots, n\}$ , la cota de marco inferior  $A_J$  de  $\{S_n^{-1/2} f_k\}_{k \in J}$  satisface  $A_J = 1 - c[\mathcal{M}_n, \mathcal{H}_J]^2$ . En consecuencia, usando las Proposiciones 4.3.4 y 4.2.11, el corolario queda demostrado. ■

**Corolario 4.3.7.** *Sea  $\mathcal{F} = \{E_{mb} T_{nag}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$  un marco de Gabor (regular) para  $L^2(\mathbb{R})$ . Entonces,  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz condicionado si y sólo si es una base de Riesz.*

*Demostración.* Claramente si  $\mathcal{F}$  es una base de Riesz entonces es un marco de Riesz. Recíprocamente, supongamos que  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz condicionado. Entonces, por el Corolario 4.3.4 se tiene que:

$$\text{cl} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \right) = \mathcal{N}.$$

donde  $\mathcal{N}$  es el núcleo del operador de síntesis de  $\mathcal{F}$ . Como ya hemos notado en la demostración del Corolario 4.3.6,

$$\mathcal{N}_n = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots) \in \mathcal{M}_n : \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = 0 \right\}.$$

Recordemos por otro lado que, por el Teorema 3.3.3, los subconjuntos finitos de vectores de  $\mathcal{F}$  son linealmente independiente. Luego,  $\mathcal{N}_n = \{0\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , lo cual implica que  $\mathcal{N} = \{0\}$ . En consecuencia,  $\mathcal{F}$  es una base de Riesz. ■

En el corolario anterior hemos usado que si  $\mathcal{N}$  es el núcleo del operador de síntesis de un marco de Riesz condicionado entonces:

$$\text{cl} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n \right) = \mathcal{N}.$$



Si bien, por distintas razones, uno podría pensar que esta condición también es suficiente para asegurar que el marco en cuestión es de Riesz condicionado, el siguiente ejemplo muestra que esto no es así. Basados en el hecho de que para todo subespacio cerrado de  $\ell^2$  de codimensión infinita existe un marco  $\mathcal{F}$  cuyo operador de síntesis lo tiene como núcleo, en este ejemplo simplemente exhibiremos un subespacio  $\mathcal{N}$  que posee la propiedad de densidad pero para el cual no existe ninguna sucesión creciente  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  cuya unión sea  $\mathbb{N}$  y tal que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} c[\mathcal{N}, \mathcal{M}_{I_n}] < 1$ .

**Ejemplo 4.3.8.** Dado  $r > 1$ , definamos el siguiente sistema ortogonal

$$\begin{aligned} x_1 &= e_1 - re_2 + \frac{1}{r}e_3 + \frac{1}{r^2}e_4 + \frac{1}{r^3}e_5 + \frac{1}{r^4}e_6 \\ x_2 &= e_5 - re_6 + \frac{1}{r^5}e_7 + \frac{1}{r^6}e_8 + \frac{1}{r^7}e_9 + \frac{1}{r^8}e_{10} \\ &\vdots \\ x_n &= e_{4n-3} - re_{4n-2} + \frac{1}{r^{4n-3}}e_{4n-1} + \frac{1}{r^{4n-2}}e_{4n} + \frac{1}{r^{4n-1}}e_{4n+1} + \frac{1}{r^{4n}}e_{4n+2}. \end{aligned}$$

Sea  $\mathcal{N}$  el subespacio cerrado generado por  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Por construcción,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n$  es densa en  $\mathcal{N}$ . Más aún,  $\{e_{4n-1} - re_{4n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{N}^\perp$ , por ende  $\dim \mathcal{N}^\perp = \infty$ .

Sea  $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$  y tomemos  $0 < \varepsilon < 1$ . Como  $\|x_n\|^2 \leq 1 + r^2 + \frac{4}{r^{8n-6}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$1 - \varepsilon < \frac{1 + r^2}{\|x_n\|^2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Notemos que, para  $y \in \mathcal{N}$  e  $i \in \mathbb{N}$ , si  $\mathcal{M}_i = \text{gen}\{e_{4i-3}, e_{4i-2}\}$ , entonces

$$\langle y, x_i \rangle = 0 \iff P_{\mathcal{M}_i} y = 0, \quad (4.16)$$

pues  $P_{\mathcal{M}_i} x_j \neq 0$  si y sólo si  $j = i$ . Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$j = \max \left\{ i \in \mathbb{N} : P_{\mathcal{M}_i}(\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_{J_k}) \neq 0 \right\} \geq n_0.$$

Por la ecuación (4.16),  $x_h \in (\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_{J_k})^\perp$  para todo  $h > j$ . En particular,  $x_{j+1} \in \mathcal{N} \ominus (\mathcal{N} \cap \mathcal{S}_{J_k})$  y

$$1 - \varepsilon < \frac{1 + r^2}{\|x_{j+1}\|^2} \leq \frac{\|P_{J_k} x_{j+1}\|^2}{\|x_{j+1}\|^2} \leq \left\langle \frac{x_{j+1}}{\|x_{j+1}\|}, \frac{P_{J_k} x_{j+1}}{\|P_{J_k} x_{j+1}\|} \right\rangle \leq c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_k}]$$

Un argumento similar muestra que  $1 - \varepsilon \leq c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_m}]$ , para cada  $m \geq k$ . Esto implica que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_n}] \geq 1 - \varepsilon$ . Finalmente, como  $\varepsilon$  es arbitrario,  $c[\mathcal{N}, \mathcal{S}_{J_k}] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$ .  $\blacktriangle$



## Marcos duales escaleados

Los marcos de Riesz también pueden ser caracterizados en términos de sus marcos duales escaleados. Recordemos dado un marco  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  para el subespacio  $\mathcal{W}$  y dado un subespacio  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$ , el marco dual (oblicuo) escaleado de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{M}$  con la propiedad de norma mínima relativa a  $\|\cdot\|_D$  es aquel cuyo operador de análisis es la inversa generalizada asociada a la proyección sobre  $\mathcal{W}$  paralela a  $\mathcal{M}^\perp$  y a la proyección  $I - P_{D, N(T)}$ . A continuación daremos una fórmula para dicho marco. Pero antes necesitamos el siguiente lema:

**Lema 4.3.9.** *Sea  $A \in L(\ell^2, \mathcal{H})$  un operador con rango cerrado, y  $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$ . Entonces, el operador  $\chi_D(A) = D^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger$  es una inversa generalizada de  $A$  tal que  $\chi_D(A)A$  es la proyección  $D$ -autoadjunta sobre  $N(A)^{\perp_D}$ .*

*Demostración.* Como  $R(AD^{1/2}) = R(A)$  se tiene:

$$\begin{aligned} A \chi_D(A) A &= P_{R(AD^{1/2})} A = A, \\ \chi_D(A) A \chi_D(A) &= D^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger AD^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger \\ &= D^{-1/2}(AD^{-1/2})^\dagger = \chi_D(A), \end{aligned}$$

lo cual muestra que efectivamente  $\chi_D(A)$  es una inversa generalizada de  $A$ . Por otro lado,

$$D(\chi_D(A)A) = D^{1/2}(AD^{-1/2})^\dagger A = D^{1/2}\left(D^{-1/2}A^*(ADA^*)^\dagger\right)A = A^*(ADA^*)^\dagger A.$$

En consecuencia  $D(\chi_D(A)A)$  es autoadjunto y por lo tanto  $(\chi_D(A)A)$  es una proyección  $D$ -autoadjunta. Finalmente, claramente  $N(\chi_D(A)A) = N(A)$  y por ende  $R(\chi_D(A)A) = N(A)^{\perp_D}$ . ■

**Proposición 4.3.10.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para el subespacio cerrado  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ ,  $F$  su operador de síntesis y sea  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  otro subespacio cerrado tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$ . Entonces, dado  $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$ , el marco dual oblicuo con la propiedad de norma mínima relativa a la norma  $\|\cdot\|_D$  tiene la siguiente forma:*

$$\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{B(D^{-1/2}T^*B)^\dagger D^{-1/2}e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

donde  $B \in L(\ell^2, \mathcal{H})$  es cualquier operador con rango  $\mathcal{M}$ .

*Demostración.* Fijemos  $B \in L(\ell^2, \mathcal{H})$  con rango  $\mathcal{M}$  y sea  $G = B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}$ . Claramente  $\mathcal{G}$  es un marco para  $\mathcal{M}$ , pues, por la hipótesis sobre  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{M}$ , se tiene que

$$R((D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}) = R((D^{-1/2}F^*B)^\dagger) = N(D^{-1/2}F^*B)^\perp = N(B)^\perp.$$



Luego, basta verificar que  $FG^*$  es la proyección sobre  $\mathcal{W}$  paralela a  $\mathcal{M}$  y que  $G^*F$  es la proyección  $D$ -autoadjunta sobre  $N(F)^{\perp_D}$ . Por un lado,

$$\begin{aligned} (FG^*)^2 &= \left( FD^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^* \right)^2 \\ &= FD^{-1/2} \left( (B^*FD^{-1/2})^\dagger (B^*FD^{-1/2})(B^*FD^{-1/2})^\dagger \right) B^* \\ &= F \left( D^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^* \right) = (FG^*), \end{aligned}$$

lo cual muestra que  $FG^*$  es una proyección. Como  $R(B^*FD^{-1/2}) = R(B^*)$  y  $N(B^*FD^{-1/2}) = D^{1/2}(N(F))$ , se tiene que

$$\begin{aligned} R((B^*FD^{-1/2})^\dagger) &= [D^{1/2}(N(F))]^\perp = D^{-1/2}(N(F)^\perp) \quad \text{y} \\ N((B^*FD^{-1/2})^\dagger) &= R(B^*)^\perp = N(B). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} R(G^*) &= R(D^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^*) = D^{-1}(N(T)^\perp) = N(T)^{\perp_D}, \quad \text{y} \\ N(G^*) &= R(D^{-1/2}(B^*FD^{-1/2})^\dagger B^*) = N(B^*) = \mathcal{M}^\perp. \end{aligned}$$

En consecuencia  $R(FG^*) = \mathcal{W}$  y  $N(FG^*) = \mathcal{M}$ .

Por otro lado, notemos que, con la notación del Lema 4.3.9,  $G^*T = \chi_D(B^*F)B^*F$ . Luego,  $G^*T$  es una proyección  $D$ -autoadjunta y  $R(G^*T) = N(B^*T)^{\perp_D} = N(T)^{\perp_D}$ , tal como queríamos ver.  $\blacksquare$

Para concluir, daremos la anunciada caracterización de los marcos de Riesz en términos de sus marcos duales escaleados.

**Teorema 4.3.11.** *Sea  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para el subespacio cerrado  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}$ ,  $F$  su operador de síntesis,  $\mathcal{M}$  otro subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{W} \dot{+} \mathcal{M}^\perp$  y  $\mathcal{G} = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un marco para  $\mathcal{M}$  con operador de síntesis  $B$ . Entonces, son equivalentes:*

1.  $\mathcal{F}$  es un marco de Riesz en  $\mathcal{W}$ .
2. Existe una cota superior uniforme para todos los marcos duales escaleados de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{M}$  que minimizan las distintas normas  $\|\cdot\|_D$ , es decir:

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(\ell^2)} \|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| < \infty.$$

*Demostración.* Fijemos  $D \in \mathcal{D}(\ell^2)$ . Ya hemos probado en la Proposición 4.3.10 que

$$\left( B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2} \right)^* F = 1 - P_{D, N(F)}.$$





En consecuencia

$$\begin{aligned}
\|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| &\leq \|B\| \|(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \\
&= \|B\| \|(F^*B)^\dagger(F^*B)(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \\
&\leq \|B\| \|(F^*B)^\dagger\| \|(F^*B)(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \\
&= \|B\| \|(F^*B)^\dagger\| \|1 - P_{D, N(F)}\| ,
\end{aligned}$$

y

$$\|1 - P_{D, N(F)}\| = \|F^*B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| \leq \|F^*\| \|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| .$$

Por lo tanto

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(\ell^2)} \|B(D^{-1/2}F^*B)^\dagger D^{-1/2}\| < \infty \iff \sup_{D \in \mathcal{D}(\ell^2)} \|1 - P_{D, N(F)}\| < \infty ,$$

lo cual prueba la equivalencia. ■