Tesis Doctoral

Problemas de Aproximación en Espacios de Krein y sus Aplicaciones al Procesamiento de Señales

Autor

Ing. Santiago Gonzalez Zerbo

Directora de Tesis

Dra. Alejandra Maestripieri - FIUBA, IAM

Codirector de Tesis

Dr. Francisco Martínez Pería - UNLP, IAM

Jurado de Tesis

Dr. John Burns - Virginia Tech
Dr. Daniel Galicer - FCEyN, UBA
Dr. Demetrio Stojanoff - UNLP, IAM
Dr. Julio Toloza - UNS

Lugar de trabajo
Instituto Argentino de Matemática "Alberto Calderón"(IAM)-CONICET,
en el Marco de la Beca Doctoral de CONICET

Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, Marzo de 2021

Problemas de aproximación en espacios de Krein y sus aplicaciones al procesamiento de señales

Resumen:

En esta tesis se estudia una generalización en espacios de Krein de los problemas de interpolación abstracta y de suavizado abstracto en espacios de Hilbert, resultando en los denominados problemas de interpolación abstracta y suavizado abstracto indefinidos. Asimismo, se analizan sus posibles aplicaciones en áreas como la teoría de control y el procesamiento de señales. El problema de interpolación abstracta indefinida es un problema de programación cuadrática con una restricción cuadrática, donde tanto la función objetivo como la restricción son indefinidas, y por lo tanto, no convexas. Mediante el estudio de las características del rango del operador de regularización de Tikhonov se desarrollan herramientas y técnicas para abordar este problema de optimización no convexa. Se encuentran condiciones necesarias y suficientes para que este problema admita solución para todo punto de dato inicial, y se demuestra que bajo estas condiciones el conjunto de soluciones resulta ser una variedad afín en un caso genérico, en el sentido en que éste es el caso cuando el dato inicial pertenece a un subconjunto abierto y denso del espacio de datos posibles. El problema de suavizado abstracto indefinido se obtiene mediante la aplicación del procedimiento de regularización de Tikhonov al problema de interpolación abstracta indefinida, resultando en un problema de cuadrados mínimos indefinidos. Se demuestra que el problema de suavizado admite solución para todo punto de dato inicial, y para todo valor del parámetro de regularización, si y sólo si el problema de interpolación admite solución para todo punto de dato inicial. Bajo estas condiciones, para todo dato inicial perteneciente a un subconjunto abierto y denso del espacio de datos posibles, el problema de interpolación abstracta indefinida puede traducirse en un problema de suavizado abstracto indefinido.

Approximation Problems in Krein Spaces and their Applications in Signal Processing

Abstract:

The aim of this thesis is to study an extension to Krein spaces of the abstract interpolating and smoothing spline problems in Hilbert spaces, which we call the indefinite abstract interpolating and smoothing spline problems. We further discuss possible applications of these problems in areas such as control theory and signal processing. The indefinite abstract interpolating spline problem is a quadratic programming problem with a quadratic constraint, where both the cost function and the restriction are sign indefinite, and thus, not convex. By studying the characteristics of the range of Tikhonov's regularization operator, we develop tools and techniques to analyze this non-convex optimization problem. We find necessary and sufficient conditions for this problem to admit a solution for every initial data point, and we show that under these conditions the set of solutions is a single affine manifold in a generic case, in the sense that it is the case when the initial data point belongs to an open dense subset of the data space. The indefinite abstract smoothing spline problem is obtained by applying Tikhonov's regularization procedure to the indefinite interpolating spline problem, resulting in an indefinite least squares problem. We prove that the indefinite smoothing spline problem admits a solution for every initial data point and every value of the regularization parameter if and only if the indefinite interpolating spline problem admits a solution for every initial data point. Under these conditions, for every initial data point belonging to an open dense subset of the data space, the indefinite interpolating spline problem can be posed as an indefinite smoothing spline problem.

“ ¿Cómo pude no sentir que la eternidad,
anhelada con amor por tantos poetas,
es un artificio espléndido que nos libra,
siquiera de manera fugaz,
de la intolerable opresión de lo sucesivo?”

J. L. Borges
Historia de la eternidad (1936).

“...una espiral es una cobra sin cobra
enroscada verticalmente en nada.”

F. Pessoa como B. Soares
Libro del desasosiego (1982).

Índice general

1

Introducción

Contenido

1.1 Estado del arte

El problema central que se propone estudiar esta tesis, que denominaremos *problema de interpolación abstracta indefinida* o *problema de splines abstractos indefinidos*, es una generalización del problema de interpolación abstracta en espacios de Hilbert. Siendo esencialmente un problema de cuadrados mínimos indefinidos con una restricción cuadrática, eśte puede clasificarse como un problema de programación cuadrática con restricciones cuadráticas.

A continuación, exponemos una breve reseña sobre la teoría de splines interpolantes, de los splines de suavizado, y de los problemas de programación cuadrática con restricciones cuadráticas. Asimismo, discutimos el estado del arte, así como algunas aplicaciones de estos problemas en diversas áreas como la teoría de control, el procesamiento de señales, o la teoría de aprendizaje ("machine learning"), entre otras.

1.1.1 Splines polinómicos

Dados $t_1 < t_2 < ... < t_n$ y $\{ y_1, y_1, ..., y_n \} \subseteq \mathbb{R}$, el problema clásico de interpolación consiste en hallar una curva con propiedades deseables que interpole los puntos (t_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$. Es decir, hallar una función ϕ tal que

$$\phi(t_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

que se comporte de alguna forma "adecuada". Con este propósito, en 1946 Schoenberg introdujo las denominadas *funciones splines*, que cumplen con ciertos requisitos de regularidad y suavidad. Denotemos por $\mathcal{C}^m[a, b]$ a las funciones reales con m-ésima derivada continua, definidas sobre el intervalo $[a, b]$, por $\mathcal{P}_m$ al conjunto de polinomios (reales) de grado menor o igual a m, y por $f|_A$ a la restricción de la función real f al conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1.1 ([131, Schoenberg, 1946])**.** Sea $a = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = b$ una partición de $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. La función $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un *spline polinómico* de grado m con respecto a esta partición si

1. $s \in \mathcal{C}^{m-1}[a, b]$;

2. $s|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{P}_m$ para todo $i = 0, 1, ..., n$.

El nombre *spline* (curva flexible) proviene de un dispositivo mecánico que se utilizaba para graficar curvas suaves. Los splines polinómicos más populares y utilizados han sido siempre los splines polinómicos de grado 3 o splines cúbicos.

La pregunta acerca de la bondad de esta interpolación mediante splines, o de cómo se comparaban estas funciones con otras curvas interpolantes, como el polinomio de Lagrange, fue contestada por Holladay en 1957. Definamos el espacio de funciones

$$\mathcal{H}^2[a,b] := \left\{ x : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ \frac{d^2x}{dt^2} \in L^2[a,b] \ , \ \frac{dx}{dt} \text{ es absolutamente continua} \right\}.$$

El resultado de Holladay se expone en el siguiente teorema:

Teorema 1.2 ([79, Holladay, 1957])**.** *Sea $a = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = b$ una partición de $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, con $n \geq 2$. Si dado $(z_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ definimos $I_n := \left\{ x \in \mathcal{H}^2[a,b] \ : \ x(t_i) = z_i \ , \ i = 1, 2, ..., n \right\}$, entonces existe un único $\widetilde{x} \in I_n$ tal que*

$$\int_{[a,b]} \left(\frac{d^2\widetilde{x}}{dt^2}(t) \right)^2 dt = \text{mín} \left\{ \int_{[a,b]} \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t) \right)^2 dt \ : \ x \in I_n \right\}.$$

Además, se cumple que:

1. $\widetilde{x} \in \mathcal{C}^2[a,b]$;
2. $\widetilde{x}|_{[t_i,t_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$ *para todo* $i = 1, 2, ..., n-1$;
3. $\widetilde{x}|_{[a,t_1]}, \widetilde{x}|_{[t_n,b]} \in \mathcal{P}_1$.

Entonces, el spline cúbico es el (único) minimizante de este problema planteado por Holladay.

La curvatura de una función $x(t)$ está dada por

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(1 + (\frac{dx}{dt})^2\right)^{3/2}}.$$

De esta forma el spline cúbico tiene curvatura mínima (si $\frac{dx}{dt}$ es relativamente pequeño) entre todas las curvas interpolantes pertenecientes a $\mathcal{H}^2[a,b]$. Desde el punto de vista físico, la aproximación de primer orden de la energía potencial elástica de una barra es proporcional a la función $\int_{[a,b]} \frac{d^2x}{dt^2}(t)dt$. En [33, 101] pueden encontrarse otros argumentos que justifican el sentido de esta minimización.

Los splines polinómicos han sido extensivamente estudiados [89, 2, 120, 119, 134, 135], y sus aplicaciones son innumerables: en el procesamiento de señales [10, 11, 12, 24, 138], la estadística [85, 142, 151], el procesamiento de imágenes [80, 148], y la computación gráfica [18, 37, 100], sólo para nombrar algunas.

El método de regularización de Tikhonov es un método ampliamente utilizado para obtener soluciones estables de problemas lineales mal condicionados (“ill-posed problems”) [145, 146, 147]. La aplicación de este método de regularización al problema de interpolación de splines da como resultado el denominado *problema de suavizado*, cuyas soluciones son llamadas *splines de suavizado* (“smoothing splines”). En particular, si aplicamos la regularización de Tikhonov al problema formulado por Holladay en el Teorema 1.2, obtenemos el problema de splines de suavizado polinómicos [42, 45, 122, 150]:

$$\min_{x \in \mathcal{H}^2[a,b]} \left(\int_{[a,b]} \left(\frac{d^2 x}{dt^2}(t) \right)^2 dt + \rho \sum_{i=1}^{n} (x(t_i) - z_i)^2 \right),$$

donde $\rho \in \mathbb{R}$ es el *parámetro de regularización*. En esta formulación, la interpolación de los puntos se sacrifica en pos de la obtención de una curva que pase “cerca” de los puntos, pero siendo aún más suave que los splines interpolantes cúbicos. Por otro lado, el problema regularizado puede expresarse como un problema clásico de cuadrados mínimos.

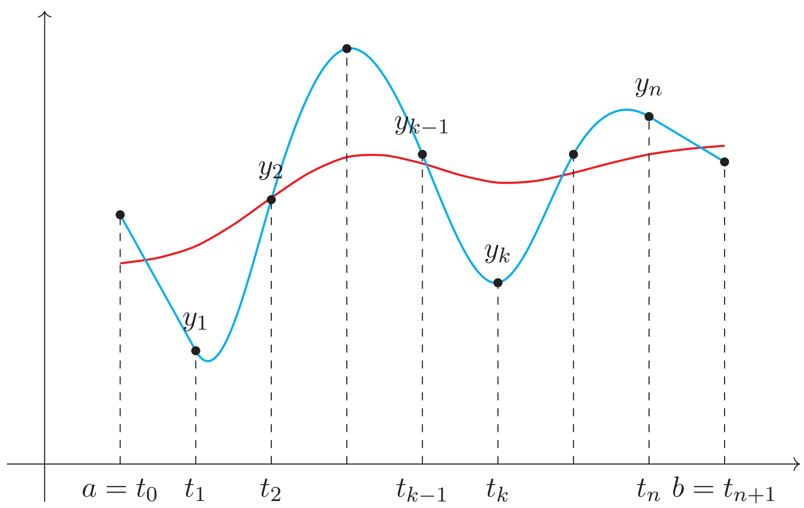

Figura 1.1.1: Interpolación mediante un spline cúbico, y curva de suavizado.

1.1.2 Splines abstractos

El resultado de Holladay introdujo el aspecto variacional en la teoría de interpolación. A lo largo de los años, numerosas y sucesivas formulaciones extendieron la noción de spline introducida por Schoenberg, mediante generalizaciones del resultado de Holladay. Fue surgiendo así una familia de splines, crecientes en generalidad y abstracción (ver [33, 101]), entre los que podemos mencionar los siguientes: D^m-splines, splines trigonométricos, g-splines, L-splines, Lg-splines.

En 1965 se desarrolló una formulación abstracta del problema de interpolación, dando lugar a la denominada *teoría de splines abstractos* o *variacionales*. Esta formulación, que se le atribuye generalmente a Atteia por sus trabajos [7, 8], puede describirse de la siguiente manera: dados tres espacios de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$, $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$, $(\mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{E}})$, dos operadores acotados y sobreyectivos $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $V : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$ y un vector fijo $z_0 \in \mathcal{E}$, se desea hallar (de existir) los puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\min_{x\in\mathcal{H}} \quad \|Tx\|_{\mathcal{K}}, \tag{1.1}$$

$$\text{sujeto a} \quad Vx = z_0. \tag{1.2}$$

Las soluciones de este problema son los denominados splines interpolantes abstractos, o (T, V)-interpolantes de z_0.

El teorema a continuación expresa el resultado de Atteia de una forma similar a como se lo puede encontrar en [9]. Denotamos con $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ y $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{E})$ a los espacios de operadores acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$ y $\mathcal{H}$ en $\mathcal{E}$, respectivamente, y con $N(T)$ y $N(V)$ a los núcleos de los operadores T y V.

Teorema 1.3 ([7, 8, Atteia, 1965]). *Sean $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{E}$ espacios de Hilbert, y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{E})$ dos operadores sobreyectivos. Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, si $N(T) + N(V)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces existe $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que*

$$V\widetilde{x} = z_0 \quad y \quad \|T\widetilde{x}\| = \min\Big\{ \|Tx\| \ : \ x \in \mathcal{H} \ , \ Vx = z_0 \Big\}. \tag{1.3}$$

Si además se cumple que $N(T) \cap N(V) = \{0\}$, entonces $\widetilde{x}$ es el único elemento que satisface 1.3.

La función interpolante óptima $\widetilde{x}$ es conocida como *spline interpolante abstracto* o *spline interpolante variacional*, y también se la llama la función (T,V)-*interpolante de* z_0.

Es fácil ver cómo el resultado de Holladay es un caso particular del de Atteia. Si denotamos $\mathcal{H} := \mathcal{H}^2[a,b]$ y definimos el producto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}}$ en $\mathcal{H}$ como

$$\langle\, x_1, x_2\,\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{[a,b]} \left(\sum_{j=0}^{2} \frac{d^j x_1}{dt^j}(t)\, \frac{d^j x_2}{dt^j}(t) \right) dt, \qquad x_1, x_2 \in \mathcal{H},$$

entonces $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}})$ es un espacio de Hilbert. Luego, denotando $\mathcal{K} = L^2[a,b]$ y $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$, con los productos internos usuales, y definiendo los operadores $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{E})$ dados por

$$Tx = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{y} \quad Vx = (x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n))\,, \quad x \in \mathcal{H},$$

se satisfacen las condiciones del Teorema 1.2 y se obtiene al spline cúbico como curva óptima de interpolación, a partir del Teorema 1.3.

La teoría de splines abstractos ha sido desde entonces ampliamente extendida [4, 32, 41, 39, 44, 91, 125, 126, 129], y ha sido utilizada en diversas áreas como el procesamiento de señales [55, 56], la teoría de aprendizaje [104, 121, 132], y la teoría de control [5, 53, 98, 156, 54], entre otras.

El siguiente ejemplo muestra cómo la noción de splines abstractos es aplicada para el modelado de un sistema de control lineal: el regulador lineal cuadrático o LQR (“linear quadratic regulator”). Este problema consiste en controlar la dinámica de un sistema lineal, mediante una señal de control que minimice una función objetivo cuadrática [36, 90, 137].

Ejemplo 1.4. Dado el estado de un sistema lineal $x(t) \in \mathbb{R}^n$, deseamos analizar cómo este estado evoluciona en un intervalo de tiempo $[0,T]$, donde la dinámica que gobierna está dada por el siguiente sistema de tiempo invariante o LTI (“linear time-invariant”):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= c^T x(t), \end{aligned} \tag{1.4}$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$ y donde y es la salida medida. El objetivo es encontrar una señal de control $u \in L^2[0,T]$, que modifique la trayectoria del sistema de acuerdo con algún criterio.

Estableciendo $x(0) = 0$ por simplicidad, la solución de (1.4) está dada por

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} bu(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Supongamos que la salida y se obtiene en $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq T$. Definiendo el conjunto de funciones $(\eta_k)_{k=1}^m \subseteq L^2[0, T]$ como

$$\eta_k(t) := c^T e^{A(t_k - t)} b\chi_{[0,t_k]}(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, ..., m,$$

las muestras de salida pueden expresarse como

$$y(t_k) = \int_0^{t_k} c^T e^{A(t_k - t)} bu(t)dt = \int_0^T \eta_k(t)u(t)dt = \langle\, u, \eta_k \,\rangle_2 \,, \quad k = 1, 2, ..., m,$$

donde $\langle\, \cdot\, , \,\cdot\, \rangle_2$ denota el producto interno usual en $L^2[0, T]$.

Definamos el operador $V : L^2[0, T] \to \mathbb{R}^m$ dado por

$$Vu = \begin{bmatrix} \langle\, u, \eta_1 \,\rangle_2 \\ \langle\, u, \eta_2 \,\rangle_2 \\ \vdots \\ \langle\, u, \eta_m \,\rangle_2 \end{bmatrix}, \quad u \in L^2[0, T], \tag{1.5}$$

y supongamos que V es sobreyectivo, entonces Vu denota el vector de las muestras de salida. Ahora, se desea controlar el sistema de forma que en estas muestras se obtenga un vector de salida de referencia $z_0 \in \mathbb{R}^m$. Se establece, así, la siguiente condición de interpolación:

$$Vu = z_0. \tag{1.6}$$

Finalmente, la señal de control u es seleccionada de forma que minimice una función costo objetivo, además de satisfacer la condición (1.6). Considerando el clásico funcional de la energía:

$$J(u) = \int_0^T u^2(t)dt = \|u\|_2^2, \quad u \in L^2[0, T],$$

el problema se traduce en hallar (de existir) la señal de control $u \in L^2[0, T]$ que alcance el mínimo

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2[0,T]} \quad & \|u\|_2, \\ \text{sujeto a} \quad & Vx = z_0, \end{aligned}$$

que resulta en un problema de interpolación de splines abstractos.

Al aplicar el método de regularización de Tikhonov al problema de interpolación abstracta formulado por Atteia se obtiene el denominado *problema de suavizado abstracto* [4, 9, 23], cuyas soluciones son los llamados, naturalmente, *splines de suavizado abstractos* ("abstract smoothing splines"). Situándonos nuevamente en el contexto del Teorema 1.3, el problema de suavizado abstracto se plantea de la siguiente manera: dados tres espacios de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle \cdot\, , \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$, $(\mathcal{K}, \langle \cdot\, , \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$, $(\mathcal{E}, \langle \cdot\, , \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$, dos operadores acotados y sobreyectivos $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $V : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$, un vector fijo $z_0 \in \mathcal{E}$ y un parámetro de regularización $\rho \in \mathbb{R}$, se desea hallar puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\min_{x\in\mathcal{H}} \quad \big(\|Tx\|_{\mathcal{K}}^2 + \rho\|Vx - z_0\|_{\mathcal{E}}^2 \big).$$

Nuevamente, este problema regularizado es fácil de expresar como un problema de cuadrados mínimos en espacios de Hilbert, por lo que su resolución es más sencilla que la del problema de interpolación original.

1.1.3 Sobre la programación cuadrática o QP

El problema de splines abstractos formulado por Atteia pertenece a la clase de los denominados problemas de programación cuadrática QP ("quadratic programming"), en particular a la de los problemas de programación cuadrática con restricción lineal [92, 22, 51]. El problema de splines indefinidos que estudiaremos en esta tesis, que es un problema de cuadrados mínimos indefinidos con una restricción cuadrática, pertenece a la categoría de problemas de programación cuadrática con restricciones cuadráticas de igualdad, o QPEQC ("quadratic programming with an equality quadratic constraint") [16, 17, 35, 60, 77, 103, 118, 152].

La optimización cuadrática es un área fundamental en la teoría de optimización y su práctica. El equilibrio económico, la teoría de control, la optimización combinatoria y la resolución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales son todas fuentes de problemas de optimización cuadrática [13, 19, 43, 69]. Se ha demostrado que la programación cuadrática con una función objetivo convexa puede resolverse en tiempo polinomial. Sin embargo, QP con un término cuadrático es de dificultad NP en general. Usualmente, conceptos de dualidad y métodos variacionales son aplicados para caracterizar y computar los minimizantes globales. La literatura sobre problemas de programación cuadrática con una restricción cuadrática (QCQP, “quadratically constrained quadratic programming”) es abundante, principalmente en dimensión finita [28, 103, 113, 118, 117, 155], que en su forma más general pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) = x^T P_0 x + q_0^T x + r_0, \\ \text{sujeto a} & g_i(x) = x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \end{array}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de optimización, y $P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q_i \in \mathbb{R}^n$, $r_i \in \mathbb{R}$ son datos del problema, para $i = 0, 1, ..., m$. Si las matrices P_i son semidefinidas positivas, entonces la función objetivo y las funciones que determinan las restricciones son convexas. Esta clase de problemas se resuelve generalmente mediante técnicas que utilizan el lagrangiano generalizado y la formulación de un problema dual de maximización, y con las denominadas condiciones de Karush-Kuhn-Tucker [27, 28, 123, 143]. Estas técnicas requieren de la convexidad de la función objetivo, así como de las restricciones.

La generalización de esta clase de problemas a espacios de dimensión infinita también ha sido estudiada, generalmente en espacios de Hilbert, y en especial en espacios de Hilbert con núcleo reproductivo (RKHS) [50, 87, 136].

Un caso particular de estos problemas se obtiene cuando la restricción cuadrática es una igualdad en lugar de una desigualdad, dando lugar a los ya mencionados QPEQC. En particular, destacamos [60] como un antecesor directo del problema de interpolación abstracta indefinida, donde se formula el siguiente problema de cuadrados mínimos (en dimensión finita) con una igualdad como restricción cuadrática:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \|Ax - b\|^2, \\ \text{sujeto a} & \|Cx - d\|^2 = \gamma, \end{array} \tag{1.7}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de optimización, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^p$ y $\gamma > 0$, y $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Además, en [60] se muestra que el caso en que la igualdad en la restricción de (1.7) es reemplazada por una desigualdad, i.e. $\|Cx - d\|^2 \leq \gamma$, resulta ser un caso particular de (1.7).

Este problema, de la denominada clase de Problemas de regiones de confianza (“Trust region problems”), ha sido ampliamente extendido [31, 57, 66, 78], y aparece en numerosas aplicaciones de la teoría de control y el procesamiento de señales [38, 97, 116, 128, 139, 144].

Es de interés estudiar esta clase de problemas para el caso indefinido, es decir, cuando la falta de convexidad de alguna de las funciones no permite abordarlos mediante las técnicas clásicas. Si bien se han estudiado diversos casos [21, 59, 141], no se ha desarrollado aún una técnica que permita un abordaje general.

En los últimos años, mediante formulaciones con matrices autoadjuntas (simétricas) o productos indefinidos se han analizado problemas de QPEQC indefinidos [111, 112, 115, 127, 133]. En [111, 112, 115] se estudió el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) = x^T P_0 x, \\ \text{sujeto a} & g(x) = x^T P_1 x = \gamma, \end{array}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de optimización, $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\gamma > 0$, con P_0 semidefinida positiva y P_1 simétrica. Por otro lado, en [127] se estudió un caso particular de una función objetivo no convexa dada por un producto interno indefinido, resultando en una generalización directa de (1.7):

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) = (Ax - b)^T J(Ax - b), \\ \text{sujeto a} & g(x) = \|Cx - d\|^2 = \gamma, \end{array}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de optimizacion, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^p$, $\gamma > 0$ y $J \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es una simetría (una matriz simétrica y ortogonal). Si definimos el producto interno indefinido $[x, x] = x^T Jx$, $x \in \mathbb{R}^n$, la función a minimizar se traduce en $[Ax - b, Ax - b]$, resultando en un problema de cuadrados mínimos indefinidos.

1.2 Presentación del problema y aportes originales

Es aquí donde introducimos el problema central estudiado en este trabajo: la generalización del problema de splines abstractos al *problema de splines abstractos indefinidos* o *problema de interpolación abstracta indefinida*, formulado particularmente en espacios de Krein.

El uso de los espacios de Krein para resolver problemas de procesamiento de señales y control ha estado en boga en los últimos años. Algunos de los trabajos pioneros en este sentido fueron los de Hassibi, Sayed y Kailath [73, 74, 75, 130], en los cuales desarrollan la teoría de estimación en espacios de Krein permitiendo extender resultados conocidos de la teoría de control en espacios de Hardy $\mathcal{H}^2$ a $\mathcal{H}^\infty$, introduciendo así un enfoque unificador. Así como en [73, 74, 75, 130] el concepto fundamental subyacente es el problema de cuadrados mínimos en espacios de Krein, otras aplicaciones se vinculan naturalmente con otros problemas de aproximación en espacios con métricas indefinidas.

Una de las principales motivaciones para el estudio de este tipo de problemas está relacionada con la teoría de aprendizaje. En la teoría clásica, formulada en RKHS, los problemas que se plantean son de la clase QP con un conjunto de restriciones, y en general que el núcleo sea semidefinido positivo hace que las funciones objetivas sean convexas [61, 102, 153]. Sin embargo, uno de los principales obstáculos que surge en las aplicaciones es verificar que el núcleo con el que se está trabajando sea, de hecho, positivo (condición de Mercer). Numéricamente, la condición de Mercer es muy difícil de verificar. En [29, 30], y más recientemente en [93], S. Canu et al. propusieron utilizar espacios de Krein con núcleos reproductivos indefinidos (RKKS), esto permite resolver en forma más eficiente problemas vinculados con la teoría de aprendizaje, ya que no hay necesidad de verificar la condición de Mercer. En [107, 108] se usan estas ideas para estudiar problemas de minimización en RKKS. Las técnicas con núcleos indefinidos han sido aplicadas a la clasificación de imágenes; en [70, 140] esta clase de resultados se utilizan para problemas relacionados con el reconocimiento de patrones.

Sin entrar ahora en detalles con respecto a la teoría sobre los espacios de Krein, basta para lo sucesivo notar que si $\mathcal{K}$ es un espacio vectorial complejo (real) y $[\cdot\,,\,\cdot]$ es una forma sesquilineal (bilineal) definida en $\mathcal{K}$, se dice que $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\,\cdot])$ es un espacio de Krein si existe una descomposición en suma directa $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dotplus \mathcal{K}_-$ tal que $(\mathcal{K}_+, [\cdot\,,\,\cdot])$ y $(\mathcal{K}_-, -[\cdot\,,\,\cdot])$ son espacios de Hilbert, y además $\mathcal{K}_+$ y $\mathcal{K}_-$ son ortogonales con respecto al producto interno indefinido $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$.

1.2.1 Splines interpolantes indefinidos

Revisemos el ejemplo 1.4 para ilustrar cómo el uso de productos internos indefinidos puede aplicarse en el problema del LQR, como motivación para la introducción del problema que esta tesis propone.

Ejemplo 1.5. En el ejemplo 1.4 el problema de splines abstractos (clásicos) planteado resultó ser el hallar el mínimo

$$\min_{u \in L^2[0,T]} \quad \int_0^T u^2(t)\, dt, \tag{1.8}$$

$$\text{sujeto a} \quad Vu = z_0, \tag{1.9}$$

donde $u \in L^2[0,T]$ es la señal de control, $z_0 \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida de referencia y el operador de muestras $V : L^2[0,T] \to \mathbb{R}^m$ está dado por (1.5). Ahora, de acuerdo con las particularidades del problema de control en cuestión, es posible que la condición de interpolación (1.9) resulte demasiado restrictiva. Supongamos que, en lugar de (1.9), establecemos la siguiente restricción con respecto al vector z_0:

$$(Vu - z_0)^T W (Vu - z_0) = 0, \tag{1.10}$$

donde $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ representa una matriz de peso conveniente, la cual suponemos es no singular, simétrica e indefinida; ver [99, 109, 110]. Definiendo un producto interno indefinido $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ en $\mathbb{R}^m$ como

$$[\, x, y\,] = y^T W x, \quad x, y \in \mathbb{R}^m,$$

(1.10) puede expresarse como

$$[\, Vu - z_0, Vu - z_0\,] = 0.$$

Una restricción similar puede encontrarse en [86] para el guiado de vehículos autónomos.

Luego, la función objetivo a minimizar en (1.8) puede generalizarse a una función de costo indefinida:

$$J(u) = \int_0^T Q(t) u^2(t) dt, \quad u \in L^2[0,T],$$

donde $Q(t)$ representa una función, que suponemos es indefinida; ver [53, 83, 149]. Definiendo el producto interno indefinido $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_Q$ en $L^2[0,T]$ como

$$[\, x, y\,]_Q = \int_0^T y(t) Q(t) x(t) dt, \quad x, y \in L^2[0,T],$$

la formulación del nuevo problema se traduce en hallar el mínimo

$$\min_{u \in L^2[0,T]} \quad [\, u, u\,]_Q\,,$$

$$\text{sujeto a} \quad [\, Vx - z_0, Vx - z_0\,] = 0.$$

Este problema resulta ser un caso particular del problema de interpolación abstracta indefinida que introducimos a continuación.

De aquí en más, $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ denota un espacio de Hilbert complejo (separable), $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{E}})$ dos espacios de Krein complejos (separables). El símbolo $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ se utiliza para denotar los productos internos en $\mathcal{K}$ y $\mathcal{E}$, y se usa $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}}$ y $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{E}}$ sólo cuando el contexto requiere la distinción. Además, $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ denota el espacio de operadores acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$, y $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ el álgebra de operadores acotados en $\mathcal{H}$. Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $R(A)$ representa al rango del operador y $N(A)$ a su núcleo. Por último, supondremos que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ son dos operadores acotados y sobreyectivos.

Recordando la formulación de splines abstractos dada por Atteia, generalizaremos (1.1) al minimizar $[\,Tx, Tx\,]_{\mathcal{K}}$ como nueva función objetivo. Esta minimización pertenece a la clase de problemas de cuadrados mínimos indefinidos [64, 65]. Por otra parte, siguiendo la idea planteada en el Ejemplo 1.5, consideraremos una restricción de la forma:

$$[\,Vx - z_0, Vx - z_0\,]_{\mathcal{E}} = 0.$$

El problema que nos proponemos analizar es el siguiente: dado un vector fijo $z_0 \in \mathcal{E}$, deseamos analizar las soluciones (y las condiciones para su existencia) de

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \quad [\,Tx, Tx\,]_{\mathcal{K}}, \tag{1.11}$$

$$\text{sujeto a} \quad [\,Vx - z_0, Vx - z_0\,]_{\mathcal{E}} = 0. \tag{1.12}$$

Las soluciones de este problema son los de aquí en más denominados *splines interpolantes indefinidos*, o, usando la nomenclatura antes mencionada para los splines abstractos clásicos, los (T, V)-*interpolantes de* z_0.

La restricción (1.12) es esencialmente diferente de (1.2). La restricción (1.2) es lineal, mientras que (1.12) es una restricción cuadrática que está relacionada con una superficie cónica, dando lugar a una geometría completamente distinta. Si $z_0 \in \mathcal{E}$ y $Vx_0 = z_0$, entonces $[\,Vx - z_0, Vx - z_0\,]_{\mathcal{E}} = 0$ si y sólo si $x \in x_0 + \mathcal{C}_V$, donde

$$\mathcal{C}_V := \{\, y \in \mathcal{H} \,:\, [\,Vy, Vy\,]_{\mathcal{E}} = 0 \,\} \tag{1.13}$$

es el "cono" de elementos neutros de la forma cuadrática $x \mapsto [\,Vx, Vx\,]_{\mathcal{E}}$.

1.2.2 Problema de suavizado abstracto indefinido

Analizaremos también la regularización del problema de splines abstractos indefinidos, dando lugar al *problema de suavizado abstracto indefinido*: dado un vector fijo $z_0 \in \mathcal{E}$ y un parámetro de regularización $\rho \in \mathbb{R}$, se desea hallar los puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\min_{x\in\mathcal{H}} \quad \big([\,Tx, Tx\,]_{\mathcal{K}} + \rho\,[\,Vx - z_0, Vx - z_0\,]_{\mathcal{E}} \big). \tag{1.14}$$

Este problema, íntimamente relacionado con el problema de interpolación abstracta indefinida, será estudiado en profundidad en el Capítulo 4. Dado que puede expresarse como un problema de cuadrados mínimos indefinidos, puede abordarse mediante las técnicas usuales. Definiendo el operador $L : \mathcal{H} \to \mathcal{K} \times \mathcal{E}$ dado por

$$Lx = (Tx, Vx), \quad x \in \mathcal{H}, \tag{1.15}$$

al que denominaremos *operador de regularización de Tikhonov*, consideremos el producto interno indefinido $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho$ en $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$ dado por

$$[\,(y, z), (y', z')\,]_\rho = [\,Ty, Ty'\,]_{\mathcal{K}} + \rho\,[\,Vz, Vz'\,]_{\mathcal{E}}\,, \quad (y, z), (y', z') \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}. \tag{1.16}$$

El espacio $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ resulta ser un espacio de Krein (si $\rho \neq 0$), y (1.14) se traduce en

$$\min_{x\in\mathcal{H}} \quad [\,Lx - (0, z_0), Lx - (0, z_0)\,]_\rho\,. \tag{1.17}$$

El operador de regularización de Tikhonov tendrá además un rol esencial en el análisis del problema de splines interpolantes indefinidos en el Capítulo 5. El Capítulo 3 se dedica a estudiar las propiedades de su rango en detalle, para los diversos valores del parámetro de regularización.

1.2.3 Aportes originales

El problema de interpolación abstracta indefinida es un problema de cuadrados mínimos indefinidos con una restricción cuadrática, también indefinida. Como tal, ni la función objetivo a minimizar ni la restricción son convexas. Más precisamente, este problema es equivalente a analizar la existencia del mínimo

$$\min_{y \in \mathcal{C}_V} \left[T(x_0 + y), T(x_0 + y) \right],$$

donde $x_0 \in \mathcal{H}$ es un punto tal que $Vx_0 = z_0$, y el conjunto $\mathcal{C}_V$ es la superficie cónica definida en (1.13). Este conjunto no es convexo; de hecho, la cápsula convexa de $\mathcal{C}_V$ es el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ completo, por lo que el reemplazar $\mathcal{C}_V$ por su cápsula convexa trivializa el problema. Esto imposibilita el uso de las técnicas usuales de optimización convexa, como la condición de Slater [28], u otras condiciones de dualidad, que permitan hacer uso del problema dual de maximización mediante el lagrangiano generalizado, y de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

En consecuencia, el estudio de este problema requirió el desarrollo de nuevas técnicas y herramientas. Éstas se basan primordialmente en el análisis de las caracterísicas del rango del operador de regularización de Tikhonov, definido en (1.15), operador que resulta inherente tanto al problema de interpolación abstracta indefinida como al de suavizado abstracto indefinido.

La piedra angular del estudio del rango de este operador es un resultado que se obtiene como una versión del Lema de Farkas [28, 58, 123], reconocido resultado del área de optimización convexa. La siguiente es la versión de este último que se expone en [123].

Teorema (Lema de Farkas, [58], Farkas, 1902). *Dado un conjunto de vectores $a_1, a_2, ..., a_m, c \in \mathbb{R}^n$, la desigualdad lineal $c^T x \geq 0$ es una consecuencia del sistema lineal*

$$a_i^T x \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

si y sólo si existen multiplicadores $\lambda_i \geq 0$ tales que $c = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$.

El no menos célebre Lema-S de Yakubovich se obtiene como una consecuencia del Lema de Farkas:

Teorema (Lema-S, [154], Yakubovich, 1971). *Sean $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones cuadráticas, y supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(x_0) > 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(x) \geq 0$;*
2. *existe $\lambda \geq 0$ tal que $g(x) - \lambda h(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

En [49, 82] se exponen varias generalizaciones del Lema de Farkas, y en [76] se demuestra una generalización del Lema-S para espacios de Hilbert reales.

En el contexto del problema de interpolación abstracta indefinida, como una consecuencia inmediata de [14, Capítulo 1, §1] probamos el siguiente resultado: si existen $x_\pm \in \mathcal{H}$ tales que $[\,Vx_+, Vx_+\,]_\mathcal{E} > 0$ y $[\,Vx_-, Vx_-\,]_\mathcal{E} < 0$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $[\,Tx, Tx\,]_\mathcal{K} \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ tal que $[\,Vx, Vx\,]_\mathcal{E} = 0$;

2. existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $[\,Tx, Tx\,]_\mathcal{K} + \lambda\,[\,Vx, Vx\,]_\mathcal{E} \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

Equivalentemente, esto puede enunciarse de la siguiente manera: bajo la mencionada hipótesis, $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$, si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T^\# T + \lambda V^\# V$ es semidefinido positivo (donde el símbolo $\#$ hace referencia a los operadores adjuntos con respecto a $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\mathcal{K}$ y $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\mathcal{E}$, respectivamente). Éstas son condiciones necesarias para la existencia de soluciones, tanto del problema de interpolación abstracta indefinida como del de suavizado. De satisfacerse estas condiciones, existe un *intervalo de valores admisibles* $[\rho_-, \rho_+]$ tal que $R(L)$ es un subespacio no negativo del espacio de Krein $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ (donde $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho$ está dado por (1.16)) si y sólo si $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.

Por un lado, este intervalo determina los valores del parámetro ρ para los que tiene sentido el plantear el problema de suavizado indefinido. Por otro lado, y de más importancia aún, las soluciones del problema de interpolación se encuentran asociadas a un valor de este intervalo a través de una ecuación normal. Para cada punto de $\mathcal{E}$, los splines interpolantes de ese punto se encuentran asociados a priori a un valor distinto del parámetro ρ. Esto conduce a que las características de $R(L)$ deban analizarse como subespacio de todos los elementos de la *familia de espacios de Krein* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, donde ρ pertenece a $[\rho_-, \rho_+]$.

Por último, mencionamos dos de los resultados más importantes de esta tesis. En primer lugar, probamos que el problema de interpolación abstracta indefinida admite solución para todo punto si y sólo si el rango del operador de regularización es un subespacio cerrado y uniformemente positivo. En segundo lugar, demostramos que existe un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{E}$ tal que, para todo z perteneciente a este subconjunto, el conjunto de splines indefinidos interpolantes de z es una variedad afín paralela a $N(T) \cap N(V)$.

1.3 Consideraciones y resumen de capítulos

Diremos que un operador autoadjunto $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es *indefinido* si A no es semidefinido positivo ni semidefinido negativo, i.e. existen $x_\pm \in \mathcal{H}$ tales que $\langle Ax_+, x_+ \rangle > 0$ y $\langle Ax_-, x_- \rangle < 0$. Es inmediato que los operadores $T^\# T$ y $V^\# V$ son autoadjuntos en $\mathcal{H}$. A lo largo de la tesis, se supondrá que los operadores $T^\# T$ y $V^\# V$ son indefinidos.

Hipótesis. *$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ son operadores sobreyectivos tales que*

$$T^\# T \quad y \quad V^\# V \quad \textit{son indefinidos.}$$

Si el operador autoadjunto $V^\# V$ no es indefinido, el conjunto de los elementos neutros de la forma cuadrática $x \mapsto [\, Vx, Vx \,]_{\mathcal{E}}$ se reduce a $N(V)$. En otras palabras, $[\, Vx, Vx \,]_{\mathcal{E}} = 0$ si y sólo si $x \in N(V)$. Como consecuencia, la restricción (1.12) se simplifica, volviéndose una condición de interpolación lineal:

$$[\, Vx - z_0, Vx - z_0 \,]_{\mathcal{E}} = 0 \Longleftrightarrow Vx = z_0.$$

En este caso el problema de interpolación indefinida se reduce al problema de interpolación estudiado en [63]. Este último, que denominaremos *problema de interpolación indefinida con restricción lineal*, es desarrollado brevemente en la Subsección 2.2.8, ya que en el Capítulo 4 se estudia su relación con el problema de suavizado indefinido. Por otro lado, si $V^\# V$ es un operador indefinido, el conjunto $\mathcal{C}_V$ contiene estrictamente a $N(V)$.

Si el operador $T^\# T$ no es indefinido, el funcional a minimizar en (1.11), $x \mapsto [\, Tx, Tx \,] = \left\langle T^\# Tx, x \right\rangle$, es semidefinido. Si $T^\# T$ es semidefinido positivo, y definimos la norma $\|x\|_T := \left\langle T^\# Tx, x \right\rangle^{1/2}$, el problema de interpolación indefinida puede ser expresado como

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathcal{H}} & \|x\|_T, \\ \text{sujeto a} & [\, Vx - z_0, Vx - z_0 \,]_{\mathcal{E}} = 0. \end{array}$$

Es decir, se simplifica sobremanera ya que la función objetivo a minimizar se vuelve positiva (y convexa). No obstante, es fácil ver que los resultados de esta tesis son también válidos para este caso, pero mediante diversas consideraciones ad hoc. Si $T^\# T$ es semidefinido positivo el valor $\rho = 0$ resulta un valor admisible para el parámetro de regularización, y para este valor del parámetro $\mathcal{K}\times\mathcal{E}$, dotado con el producto dado en (1.16), no es un espacio de Krein. Por otra parte, si $T^{\#}T$ es semidefinido negativo, mediante una consideración similar el problema se traduce en maximizar una norma en un conjunto no acotado.

1.3.1 Resumen de capítulos

Capítulo 2 Preliminares

En el Capítulo 2 se exponen los conceptos preliminares utilizados en los subsiguientes capítulos. Se desarrolla someramente la teoría de la derivada de Fréchet en espacios normados, así como ciertas nociones sobre conjuntos proximinales. Luego, se muestran algunos resultados sobre teoría de operadores en espacios de Hilbert. Seguidamente, se introduce la teoría elemental de espacios de Krein, y los resultados principales sobre la teoría de operadores en estos espacios de los que se hace uso a lo largo de la tesis. Finalmente, se desarrollan algunos resultados acerca de dos clases de problemas en particular:

- el problema de cuadrados mínimos indefinidos;
- el problema de interpolación indefinida con restricción lineal analizado en [63].

Capítulo 3 Sobre el operador de regularización de Tikhonov

En este capítulo se analizan las propiedades del rango del operador de regularización de Tikhonov, i.e.

$$Lx = (Tx, Vx), \quad x \in \mathcal{H}.$$

Este operador resulta inherente tanto al problema de interpolación indefinida como al de suavizado indefinido. Más precisamente, el problema de suavizado indefinido puede expresarse como un problema de cuadrados mínimos indefinidos mediante el operador L (ver (1.17)). Por otro lado, los splines interpolantes se caracterizan mediante una ecuación normal que se expresa explícitamente en términos de L, caracterización que será una de las herramientas centrales en el estudio de este problema.

Para un parámetro de regularización $\rho \neq 0$ dado, considerando el producto interno $[\cdot\,,\,\cdot]_\rho$ definido en (1.16), $R(L)$ es un subespacio del espacio de Krein $(\mathcal{K}\times\mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$. Es decir, las características de $R(L)$, como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$, variarán de acuerdo al valor de ρ. Como hemos mencionado, la existencia de soluciones de los problemas de interpolación y de suavizado está relacionada con un intervalo de valores admisibles para el parámetro de regularización, intervalo determinado por la relación entre los operadores T y V. Adelantamos que el resultado de esta sección digno de notar es que, bajo ciertas condiciones, muchas de las características de $R(L)$ como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$ se mantienen invariantes al valor de ρ dentro de este intervalo.

Así, el estudio del operador de regularización consta fundamentalmente, y a grandes rasgos, de dos partes:

1. el análisis de las propiedades de $R(L)$ para un parámetro ρ fijo en relación a los operadores "dato" T y V;
2. el estudio de $R(L)$ como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$, para los diversos valores admisibles del parámetro ρ.

En la primera sección, dado un parámetro $\rho \neq 0$ fijo, se encuentran condiciones necesarias y suficientes para que $R(L)$ sea cerrado, no degenerado, pseudo-regular o regular como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$, en relación a las propiedades de los operadores T y V.

En la segunda sección es donde introducimos el intervalo de valores admisibles para el parámetro de regularización. Es una condición necesaria de la existencia de soluciones, tanto del problema de interpolación como del de suavizado, la existencia de un valor $\rho \neq 0$ tal que $R(L)$ sea un subespacio no negativo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$. Es de nuestro interés abocarnos a aquellos valores del parámetro de regularización que satisfagan esta condición. Aquí probamos que $R(L)$ es un subespacio no negativo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$ si y sólo si ρ pertenece a cierto intervalo $[\rho_-, \rho_+]$, determinado por la relación entre los operadores T y V. Los parámetros ρ_- y ρ_+ resultan así ser figuras centrales en los problemas de suavizado e interpolación.

El caso que más nos interesará es cuando $\rho_- \neq \rho_+$. Bajo esta condición se prueba la invarianza de las propiedades de $R(L)$: dado $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, si $R(L)$ posee alguna propiedad (entre las antes mencionadas) como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_{\rho_0})$, entonces $R(L)$ posee la misma propiedad como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$ para todo $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. Esta invarianza de las características de $R(L)$ tiene dos consecuencias fundamentales. En primer lugar, el análisis del problema de suavizado es virtualmente independiente del valor del parámetro de regularización (con la excepción del caso en que el parámetro toma los valores extremos del intervalo, que son tratados de forma particular). En segundo lugar, y con respecto al problema de interpolación, la invarianza provee la libertad de escoger el valor del parámetro ρ según sea conveniente para trabajar con la estructura de espacio de Krein $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$. Una gran parte del desarrollo del Capítulo 5 tiene lugar bajo la hipótesis de que $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo.

La última sección concentra sus esfuerzos en estudiar el caso en que $R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, es decir, $R(L)$ es un espacio de Krein con el producto $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho$. Aquí se desarrollan las herramientas a emplear en gran parte del análisis del problema de interpolación indefinida. Un resultado a destacar es que si existe algún $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que $R(L)$ es un subespacio regular, entonces $\rho_- \neq \rho_+$, y además $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

Capítulo 4 Problema de suavizado abstracto indefinido

En el Capítulo 4 se estudia el problema de suavizado indefinido, i.e. el problema que se obtiene mediante la regularización del problema de interpolación indefinida: dados un vector $z_0 \in \mathcal{E}$ y un parámetro de regularización $\rho \in \mathbb{R}$, se desea hallar los puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \big([\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx - z_0, Vx - z_0\,] \big). \tag{1.18}$$

Fuera del hecho de que este problema es de interés por sí mismo, la motivación principal para su análisis es el ganar perspectiva e intuición con respecto al problema de interpolación. Las soluciones del problema de suavizado indefinido se encuentran estrechamente relacionadas con las del problema de interpolación, sin embargo su análisis resulta mucho más sencillo. Este capítulo se basa en lo expuesto en el artículo “Regularization of an Indefinite Abstract Interpolation Problem with a Quadratic Constraint”, [68].

Como ya hemos mencionado, fijando un $\rho \neq 0$ y considerando el espacio de Krein $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, mediante el operador de regularización el problema de suavizado indefinido puede expresarse como un problema de cuadrados mínimos indefinidos: dado un vector $z_0 \in \mathcal{E}$, se desea hallar los puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \,[\,Lx - (0, z_0), Lx - (0, z_0)\,]_\rho\,.$$

Por consiguiente, procedemos a aplicar los resultados de la teoría de cuadrados mínimos indefinidos para analizar el problema de suavizado indefinido (considerando el parámetro de regularización fijo, en primera instancia).

En la primer sección caracterizamos la existencia de soluciones de (1.18), así como el conjunto de dichas soluciones. En primer lugar, mostramos que este conjunto es no vacío si y sólo si $R(L)$ es un subespacio no negativo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$, y existe $x \in \mathcal{H}$ que es solución de la ecuación normal

$$(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x = \rho V^{\#}z_0. \tag{1.19}$$

Si bien esta caracterización es una consecuencia inmediata de la teoría de los problemas de cuadrados mínimos indefinidos, destacamos (1.19), ya que las soluciones del problema de interpolación indefinida satisfacen una ecuación normal similar. Además, queda claro que ρ debe pertenecer al intervalo $[\rho_-, \rho_+]$ para que exista solución de (1.18), i.e. la regularización del problema de interpolación indefinida tiene sentido sólo si el parámetro de regularización pertenece al intervalo de valores admisibles $[\rho_-, \rho_+]$.

En la sección siguiente se analiza el conjunto de puntos admisibles (i.e. los puntos $z_0 \in \mathcal{E}$ tales que (1.18) es alcanzado) para los diversos valores del parámetro de regularización. En [63] se probó que, dado un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, (1.18) admite solución para todo $z_0 \in \mathcal{E}$ si y sólo si $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$. Con el objetivo de relajar esta hipótesis, caracterizamos el caso en que $R(L) + R(L)^{[\perp]}$ es cerrado, y mediante lo estudiado en el Capítulo 3 describimos en detalle el conjunto de puntos admisibles para todo valor de ρ en el intervalo $[\rho_-, \rho_+]$. El mencionado resultado de [63] surge luego como una consecuencia inmediata. Además, en vista de la propiedad de invarianza de $R(L)$, queda claro que si $R(L)$ es cerrado y uniformemente positivo para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces (1.18) admite solución para todo punto, para todo $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

La tercer sección se aboca a estudiar la relación entre el problema de suavizado abstracto indefinido y el problema de interpolación indefinida con restricción lineal planteado en [63]; a saber: dado un vector $z_0 \in \mathcal{E}$, se desea hallar los puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathcal{H}} \quad [\,Tx, Tx\,]\,, \\ &\text{sujeto a} \quad Vx = z_0. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Como hemos mencionado, el problema de interpolación indefinida tratado en el Capítulo 5 se reduce a (1.20) en el caso particular en que $V^{\#}V$ no es indefinido. En primer lugar, haciendo uso de los resultados del Capítulo 3, se muestra que, si $\rho_- \neq \rho_+$, el que $R(L)$ sea un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K}\times\mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para algún $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ es también una condición necesaria y suficiente para que (1.20) admita solución para todo $z_0 \in \mathcal{E}$. En otras palabras, el problema de suavizado indefinido admite solución para todo punto, si y sólo si el problema de interpolación indefinida con restricción lineal admite solución para todo punto. Luego, probamos las siguientes condiciones:

- todo conjunto de splines interpolantes con restricción lineal está contenido en el conjunto de soluciones de algún problema de suavizado;
- el conjunto de soluciones de todo problema de suavizado contiene al conjunto de soluciones de algún problema de interpolación con restricción lineal.

Finalmente, mostramos bajo qué condiciones un problema de suavizado puede plantearse como un problema de interpolación con restricción lineal equivalente, y viceversa.

Capítulo 5 Splines interpolantes indefinidos

En este capítulo se presenta el problema central de esta tesis, el problema de interpolación abstracta indefinida o de splines interpolantes indefinidos. Varios de los resultados aquí expuestos pueden encontrarse en el artículo “Indefinite Abstract Splines with a Quadratic Constraint”, [67]. Dado un vector $z_0 \in \mathcal{E}$, se desea hallar los puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathcal{H}} && [\,Tx, Tx\,]\,, \\ &\text{sujeto a} && [\,Vx - z_0, Vx - z_0\,] = 0. \end{aligned} \tag{1.21}$$

En primer lugar, se muestra que este problema puede formularse equivalentemente de la siguiente manera: si $x_0 \in \mathcal{H}$ es tal que $Vx_0 = z_0$, se desea minimizar

$$\min_{y\in\mathcal{C}_V} [\,T(x_0+y), T(x_0+y)\,]\,, \tag{1.22}$$

donde $\mathcal{C}_V$ es la superficie cónica dada por

$$\mathcal{C}_V = \Big\{\, x \in \mathcal{H} \,:\, [\,Vx, Vx\,] = 0 \,\Big\}.$$

El conjunto de soluciones de (1.21), que denotaremos $sp(z_0)$, está entonces contenido en el conjunto $x_0 + \mathcal{C}_V$, donde x_0 puede escogerse de forma arbitraria, siempre que $Vx_0 = z_0$.

Como ya hemos mencionado, el conjunto $\mathcal{C}_V$ no es convexo, lo que impide el uso de las técnicas habituales de optimización para el tratamiento de (1.22).

La primer sección simplemente presenta y describe el problema a estudiar. En la segunda, se analizan tres caracterizaciones diferentes de la existencia de soluciones del problema de interpolación indefinida. Cabe mencionar que en los desarrollos de los resultados posteriores se hace uso de las tres. Fijemos un punto $z_0 \in \mathcal{E}$, y un vector $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$.

La primer caracterización que describimos es la que es obtenida de forma más ortodoxa, mediante el lagrangiano y la derivada de Fréchet. A saber, $sp(z_0) \neq \varnothing$ si y sólo si existen $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T^{\#}T + \lambda V^{\#}V$ es semidefinido positivo, y $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ que satisface la restricción $[\, V\widetilde{x} - z_0, V\widetilde{x} - z_0 \,] = 0$, tales que

$$(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)\widetilde{x} = \lambda V^{\#} z_0. \tag{1.23}$$

Ésta es la que denominaremos la *ecuación normal* del problema de interpolación abstracta indefinida. Por lo analizado en el Capítulo 3, la existencia de un $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $T^{\#}T + \rho V^{\#}V$ es semidefinido positivo es equivalente a que $T(\mathcal{C}_V)$ sea no negativo. De hecho, el parámetro λ en (1.23) (que es, ni más ni menos, que el multiplicador de Lagrange) debe pertenecer al intervalo de valores admisibles $[\rho_-, \rho_+]$. Observemos que (1.23) es similar a la ecuación normal del problema de suavizado indefinido (1.19), con la diferencia de que el parámetro λ no está fijo. En efecto, para los casos no triviales, para cada z_0 tal que $sp(z_0) \neq \varnothing$, demostramos que existe un único $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ que satisface (1.23), para algún $\widetilde{x}$ que cumpla con la restricción.

Mediante el uso de rectas contenidas en el conjunto $\mathcal{C}_V$ probamos la siguiente de las caracterizaciones: $sp(z_0) \neq \varnothing$ si y sólo si $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$, y existe $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que para todo $y \in \mathcal{C}_V$

$$|\,[\, Tx_0, Ty \,]\,|^2 \leq [\, Ty_0, Ty_0 \,]\,[\, Ty, Ty \,]\,,$$

con igualdad cuando $y = y_0$.

Por último, de forma similar a los problemas de optimización con restricciones que satisfacen la condición de dualidad (e.g. problemas de optimización convexa donde las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son suficientes, además de necesarias), demostramos que el problema de interpolación indefinida es equivalente a un *problema dual de maximización*. Denotando el conjunto $\mathcal{D} := \{y \in \mathcal{C}_V : \ [\, Ty, Ty \,] = 1\}$, probamos que

$sp(z_0) \neq \varnothing$ si y sólo si $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$, x_0 pertenece a un cierto conjunto de puntos admisibles, y se alcanza el máximo

$$\max_{y \in \mathcal{D}} \left| [Tx_0, Ty] \right|.$$

La tercer sección es dedicada a analizar condiciones necesarias y suficientes para que el problema de interpolación indefinida admita solución para todo punto. Éste es uno de los resultados más importantes de la tesis. Este resultado, en resonancia con su par análogo para el problema de suavizado indefinido, afirma que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $sp(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$;
2. $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, para algún $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.

En la cuarta sección analizamos la estructura del conjunto de soluciones del problema de interpolación indefinida, bajo las hipótesis que aseguran que este problema admite solución para todo punto. En primera instancia, observando (1.23) es inmediato que

$$sp(z_0) \subseteq \widetilde{x} + N(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V),$$

donde $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ y $\widetilde{x} \in sp(z_0)$ es una solución particular. Esto a priori induce a pensar que el conjunto de soluciones es una variedad afín. Mostramos en esta sección que éste no siempre es el caso, sino que en general consiste de una unión de variedades afines paralelas al subespacio $N(T) \cap N(V)$. No obstante, demostramos que el que $sp(z_0)$ sea una sola variedad afín o una unión de variedades afines depende del valor del parámetro λ en (1.23), más precisamente, de si λ pertenece al interior del intervalo de valores admisibles, o toma alguno de los dos valores extremos. Si $\lambda \in (\rho_-, \rho_+)$, entonces

$$sp(z_0) = \widetilde{x} + N(T) \cap N(V).$$

Por otro lado, si $\lambda = \rho_+$ o $\lambda = \rho_-$ el conjunto $sp(z_0)$ puede contener estrictamente a $\widetilde{x} + N(T) \cap N(V)$, e.g.

$$\widetilde{x} + N(T) \cap N(V) \subset sp(z_0) \subset \widetilde{x} + N(T^{\#}T + \rho_+ V^{\#}V).$$

Es decir, la estructura del conjunto de soluciones queda determinada por el valor de λ en la ecuación normal (1.23). A esto se refiere el segundo de los resultados más importantes de esta tesis: demostramos que existe un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{E}$, tal que para todo z_0 perteneciente a este subconjunto, el conjunto de splines interpolantes $sp(z_0)$ es una variedad afín. Además, describimos en detalle el conjunto de soluciones cuando éste no es una variedad afín.

Para todo el análisis de esta sección hacemos uso de las herramientas desarrolladas en el Capítulo 3. Mediante la regularidad de $R(L)$ reexpresamos el problema de interpolación indefinida en el contexto de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}'$, donde $\mathcal{H}'$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ y el producto interno depende del parámetro ρ. Aprovechando la invarianza de las propiedades de $R(L)$, escogemos un valor particular para ρ dentro del intervalo (ρ_-, ρ_+) que nos resulta conveniente para diversas partes del desarrollo. Asimismo, para un punto $z_0 \in \mathcal{E}$ dado, escogemos un vector $x_0 \in V^{-1}(\{\, z_0 \,\})$ conveniente. Luego, mediante una descomposición de la forma $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_+ \oplus_\rho \mathcal{H}_- \oplus_\rho (N(V) \ominus N(T))$, obtenemos la siguiente caracterización de la estructura del conjunto de splines interpolantes indefinidos, de acuerdo al valor del parámetro λ. Supongamos que $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ satisface (1.23) para algún $\widetilde{x} \in x_0 + \mathcal{C}_V$, entonces:

1. si $\lambda \in (\rho_-, \rho_+)$, entonces existe $w_0 \in \mathcal{H}'$ tal que
$$sp(z_0) = w_0 + N(T) \cap N(V);$$
2. si $\lambda = \rho_+$, entonces existen $w_- \in \mathcal{H}'$ y $\alpha_- \geq 0$ tales que
$$sp(z_0) = w_- + \alpha_- \cdot \mathcal{N}_- \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_-} + N(T) \cap N(V);$$
3. si $\lambda = \rho_-$, entonces existen $w_+ \in \mathcal{H}'$ y $\alpha_+ \geq 0$ tales que
$$sp(z_0) = w_+ + \alpha_+ \cdot \mathcal{N}_+ \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_+} + N(T) \cap N(V);$$

donde $\mathcal{N}_\pm$ denota el autoespacio de cierto operador, y $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\pm}$ la esfera unitaria en $\mathcal{H}_\pm$. Observemos que el conjunto $\alpha_\pm \cdot \mathcal{N}_\pm \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_\pm}$ puede interpretarse como un *anillo* en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\pm$.

Finalmente, probamos que existe un subconjunto abierto y denso $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ tal que, para cada vector $z \in \mathcal{M}$, su valor de λ asociado en la ecuación normal pertenece al intervalo abierto (ρ_-, ρ_+). Por consiguiente, $sp(z)$ resulta ser una variedad afín paralela a $N(T) \cap N(V)$ para cada $z \in \mathcal{M}$.

En la quinta sección analizamos la relación entre el problema de interpolación abstracta indefinida y el de suavizado abstracto indefinido. En primer lugar, mostramos que el conjunto de soluciones del problema de interpolación es también un subconjunto de las soluciones de algún determinado problema de suavizado. Luego, bajo la hipótesis de que $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, probamos que para todo dato inicial z_0 perteneciente a un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{E}$, el problema de interpolación puede traducirse en un problema de suavizado indefinido. Por último, mostramos que el problema de interpolación indefinida admite solución para todo punto si y sólo si el problema de suavizado indefinido admite solución para todo punto, para todo valor del parámetro de regularización en el intervalo abierto (ρ_-, ρ_+).

2

PRELIMINARES

Contenido

2.1 Generalidades sobre espacios de Banach y de Hilbert

Procedemos aquí a exponer las nociones y los resultados preliminares sobre espacios de Banach y de Hilbert que se usarán a lo largo de la tesis. Omitimos las pruebas, por ser resultados más que conocidos.

2.1.1 Derivada de Fréchet y extremos de funciones reales

De aquí en más, denotaremos con $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ y $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ a dos espacios normados. Lo que se desarrolla a continuación puede encontrarse en [1, 94].

Definición 2.1. Una función $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ es un subconjunto abierto, es *diferenciable Fréchet* (o *diferenciable* a secas) en $x \in \mathcal{U}$ si existe un operador lineal acotado $Df(x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ con la propiedad:

$$\lim_{\|\Delta x\|_{\mathcal{X}} \to 0} \frac{\|f(x+\Delta x) - f(x) - Df(x)\Delta x\|_{\mathcal{Y}}}{\|\Delta x\|_{\mathcal{X}}} = 0.$$

Definición 2.2. Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ es una función diferenciable en todos los puntos del subconjunto abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$, entonces llamamos *derivada de f* a la transformación

$$Df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}); \quad u \mapsto Df(u).$$

Si Df es una transformación continua en $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con la topología usual de la norma, decimos que f pertenece a la clase $\mathcal{C}^1$.

Dada $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ un abierto, si f es diferenciable en $x \in \mathcal{U}$ y el operador $Df(x)$ es también diferenciable en x, diremos que f es *doblemente diferenciable* en x y denotaremos con

$$D^2 f(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})),$$

al diferencial de $Df(x)$ en x, que llamaremos *diferencial de segundo orden* de f en x. Usualmente, el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ es identificado con el espacio de Banach $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathcal{L}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ de todas las transformaciones bilineales y continuas de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ (ver [1, Proposición 2.2.9]).

De la misma forma, si f admite derivada, la función $Df : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ puede a su vez admitir derivada, la *derivada de segundo orden* o *derivada segunda* de f, que por definición es una transformación

$$D^2 f : \mathcal{U} \to \mathcal{L}^2(\mathcal{X} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Procediendo inductivamente, y denotando $\mathcal{L}^n(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \mathcal{L}(\mathcal{X}^n, \mathcal{Y})$, podemos definir los diferenciales y derivadas de orden superior, identificando el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{n-1}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ con $\mathcal{L}^n(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Definición 2.3. Sea $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$, con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ un abierto. Denotamos, de existir, con $D^n f(x)$ al *diferencial de orden* n de f en $x \in \mathcal{U}$,

$$D^n f(x) := D\left(D^{n-1} f(x)\right) \in \mathcal{L}^n(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Asimismo, de existir, denotamos con $D^n f$ a la *derivada de orden* n de f,

$$D^n f := D\left(D^{n-1} f\right) : \mathcal{U} \to \mathcal{L}^n(\mathcal{X}, \mathcal{Y}).$$

Si $D^n f$ existe y es continua en $\mathcal{L}^n(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ con la topología usual de la norma, decimos que f pertenece a la clase $\mathcal{C}^n$.

A continuación introducimos las nociones elementales de optimización de funcionales en espacios normados.

Definición 2.4. Sea $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función continua, con $\mathcal{U}$ un abierto en $\mathcal{X}$.

- La función f posee un *mínimo* (resp. *máximo*) *local* en $u_0 \in \mathcal{U}$, si existe un entorno $\mathcal{V}$ de u_0, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $f(u_0) \leq f(u)$ (resp. $f(u_0) \geq f(u)$) para todo $u \in \mathcal{V}$.
- Si la desigualdad es estricta, u_0 es denominado un *mínimo* (resp. *máximo*) *local estricto*.
- El punto u_0 es denominado un *mínimo* (resp. *máximo*) *global* si $f(u_0) \leq f(u)$ (resp. $f(u_0) \geq f(u)$) para todo $u \in \mathcal{U}$.

Llamaremos *extremos locales* a los máximos y mínimos locales. La siguiente proposición establece una condición necesaria para la existencia de un extremo local.

Proposición 2.5. *Sea* $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *una función continua y diferenciable en* $u_0 \in \mathcal{U}$*. Si* f *posee un extremo local en* u_0*, entonces* $Df(u_0) = 0$.

Este criterio no es suficiente. Además, si $\mathcal{U}$ no es abierto, los valores de f en la frontera de $\mathcal{U}$ deben ser examinados por separado. Luego, procedemos a establecer condiciones suficientes para poder afirmar la existencia de un extremo local:

Definición 2.6. Sea $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ una función continua, con $\mathcal{U}$ un abierto en $\mathcal{X}$, tal que $f \in \mathcal{C}^2$.

- Decimos que $u \in \mathcal{U}$ es un *punto crítico* de f si $Df(u) = 0$.
- Si $u \in \mathcal{U}$ es un punto crítico de f, decimos que es *no degenerado* si $D^2 f(u_0)$ define un isomorfismo entre $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$.

Proposición 2.7. *Sea* $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *doblemente diferenciable en* $u_0 \in \mathcal{U}$*.*

1. *Si* u_0 *es un mínimo (máximo), entonces* $D^2 f(u_0)(x, x) \geq 0$ *(*≤ 0*) para todo* $x \in \mathcal{X}$*.*
2. *Si* u_0 *es un punto crítico no degenerado de* f *y* $D^2 f(u_0)(x, x) > 0$ *(*< 0*) para todo* $x \in \mathcal{X}$*,* $x \neq 0$*, entonces* u_0 *es un mínimo (máximo) local estricto de* f*.*

Por último, exponemos el Teorema de los multiplicadores de Lagrange para espacios normados, atribuído a Luenberger.

Teorema 2.8 ([94, §9.3, Teorema 1])**.** *Sean* $f : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *y* $g : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ *pertenecientes a* $\mathcal{C}^1$ *y supongamos que* $Dg(u_0) \neq 0$*, con* $u_0 \in \mathcal{U}$*. Si* f *posee un extremo local en* u_0 *sujeto a la restricción* $g(u) = 0$*, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $Df(u_0)x = 0$ *para todo* $x \in N(Dg(u_0))$*;*
2. *existe (un único)* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $Df(u_0) + \lambda Dg(u_0) = 0$*.*

2.1.2 Conjuntos proximinales

Introducimos ahora un concepto de la teoría de aproximación, sin ahondar con respecto a esta teoría. Lo que sigue puede encontrarse en [71]. Dado un espacio normado $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$

y un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{X}$, denotemos con $\mathrm{d}(x, \mathcal{M}) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ a la distancia entre x y $\mathcal{M}$ con respecto a la norma $\|\cdot\|$:

$$\mathrm{d}(x, M) = \text{ínf}\left\{ \|x - m\| : \ m \in \mathcal{M} \right\}.$$

Definición 2.9. Sea $\mathcal{M}$ un conjunto no vacío de un espacio vectorial normado $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. El conjunto $\mathcal{M}$ se dice *proximinal* (resp. *de Chebyshev*), si para cada $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{M}$, el conjunto de mejores aproximantes de x pertenecientes $\mathcal{M}$,

$$A_{\mathcal{M}}(x) = \left\{ y \in \mathcal{M} \ : \ \|y - x\| = \mathrm{d}(x, \mathcal{M}) \right\},$$

es no vacío (resp. contiene un solo elemento).

El teorema siguiente proporciona una condición suficiente para establecer la proximinalidad de un conjunto.

Teorema 2.10 ([71, Teorema 4.28])**.** *Todo subconjunto no vacío y débilmente cerrado de un espacio de Banach reflexivo es proximinal.*

La noción de proximinalidad permite caracterizar a los espacios de Banach reflexivos, tal y como lo enuncia el siguiente resultado.

Teorema 2.11 ([46, Corolario 2.12])**.** *Si* $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ es reflexivo;*
2. *todo subconjunto no vacío y débilmente cerrado de $\mathcal{X}$ es proximinal;*
3. *todo subconjunto no vacío, cerrado y convexo de $\mathcal{X}$ es proximinal;*
4. *todo subespacio no vacío y cerrado de $\mathcal{X}$ es proximinal.*

2.1.3 Inversas generalizadas y generalidades sobre espacios de Hilbert

Describimos a continuación algunas nociones elementales acerca de la teoría de inversas generalizadas en espacios de Hilbert. Para una exposición más detallada sugerimos los libros de A. Ben-Israel y T. N. E. Greville [20], y M. Z. Nashed [105].

A lo largo de esta subsección, $(\mathcal{H}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ y $(\mathcal{K}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$ denotarán dos espacios de Hilbert.

Definición 2.12. Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, definimos la *inversa de Moore-Penrose* como el operador densamente definido (no necesariamente acotado)

$$A^{\dagger} : R(A) \dotplus R(A)^{\perp} \to \mathcal{H},$$

definido de la siguiente manera; para $y \in R(A)$ y $z \in R(A)^{\perp}$, $A^{\dagger}(y + z) = x$ donde $x \in N(A)^{\perp}$ es el único vector que satisface que $Ax = y$.

La siguientes proposiciones caracterizan la inversa de Moore-Penrose de un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ cuando éste es de rango cerrado.

Proposición 2.13. *Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, si A es de rango cerrado entonces $A^{\dagger} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ es un operador acotado y de rango cerrado, y además*

$$N(A^{\dagger}) = R(A)^{\perp} \quad y \quad R(A^{\dagger}) = N(A)^{\perp}.$$

Proposición 2.14. *Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ con rango cerrado, $A^{\dagger}$ es la única solución del sistema*

$$\begin{aligned} AXA &= A, \quad (AX)^{*} = AX, \\ XAX &= A, \quad (XA)^{*} = XA. \end{aligned}$$

La inversa de Moore-Penrose (cuando es un operador acotado) es un caso particular de las inversas generalizadas.

Definición 2.15. Dados $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, decimos que B es una *inversa generalizada* de A si

$$ABA = A \quad \text{y} \quad BAB = B.$$

Al conjunto de inversas generalizadas de A lo denotaremos por medio de $\mathcal{G}(A)$.

Las inversas generalizadas guardan una estrecha relación con el conjunto de proyecciones, como lo ilustra el teorema a continuación.

Teorema 2.16. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

1. *Si $B \in \mathcal{G}(A)$, entonces AB es una proyección (oblicua) con $R(AB) = R(A)$ y BA es una proyección (oblicua) con $N(BA) = N(A)$.*
2. *A tiene rango cerrado si y sólo si $\mathcal{G}(A) \neq \varnothing$.*
3. *Si $\mathcal{G}(A) \neq \varnothing$, para cada par de proyecciones oblicuas $P \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ y $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tales que $R(P) = R(A)$ y $R(Q) = N(A)$, existe único $B \in \mathcal{G}(A)$ tal que $AB = P$ y $BA = I - Q$.*

En particular, si A es de rango cerrado, la inversa de Moore-Penrose es la única inversa generalizada que satisface que las proyecciones del teorema anterior son ortogonales, i.e. $AA^\dagger = P_{R(A)}$ y $A^\dagger A = P_{N(A)^\perp}$.

Mediante proyecciones oblicuas, la inversa de Moore-Penrose permite describir cualquier inversa generalizada.

Corolario 2.17. *Sean $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ un operador con rango cerrado, $P \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ una proyección con rango $R(A)$ y $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ una proyección con rango $N(A)$. Entonces, $B = (I - Q)A^\dagger P$ es la única inversa generalizada de A tal que $AB = P$ y $BA = I - Q$.*

Proposición 2.18. *Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es un operador de rango cerrado, entonces*

$$\|A^\dagger\| = \min \Big\{ \|B\| \ : \ B \in \mathcal{G}(A) \Big\}.$$

Por último, exponemos dos resultados elementales que serán utilizados a lo largo de toda la tesis.

Proposición 2.19 ([47], Teorema 2.13)**.** *Si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son dos subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{S} + \mathcal{T}$ es cerrado;*
2. *$\mathcal{S}^\perp + \mathcal{T}^\perp$ es cerrado.*

Si bien la siguiente proposición la enunciamos para espacios de Hilbert, también es válida para espacios de Banach.

Proposición 2.20 ([106], Corolario 1)**.** *Si $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{E}$ son espacios de Hilbert, y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ son dos operadores de rango cerrado, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *BA es de rango cerrado;*
2. *$N(B) + R(A)$ es un subespacio cerrado en $\mathcal{K}$.*

2.2 Espacios de Krein

En esta sección presentaremos algunos resultados elementales sobre espacios con producto interno indefinido, centrando nuestra atención en los espacios de Krein. Se desarrolla la mayor parte de las pruebas. Para una exposición más amplia sobre los temas aquí desarrollados sugerimos al lector los libros de J. Bognár [25] y T. Ya. Azizov e I. S. Iokhvidov [14], las monografías redactadas por T. Ando [3] y por M. Dritschel y J. Rovnyak [52], y el trabajo de J. Rovnyak [124].

2.2.1 Espacios con producto interno indefinido

Definición 2.21. Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Decimos que una función $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal si satisface las siguientes condiciones:

1. $B(x + \lambda y, z) = B(x, z) + \lambda B(y, z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in \mathcal{V};$
2. $B(x, y) = B(y, x)^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{V}.$

Definición 2.22. Si $\mathcal{V}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial dotado de una forma sesquilineal $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$, decimos que $(\mathcal{V}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio con producto interno indefinido.

De aquí en más $(\mathcal{V}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ representará un espacio con producto interno indefinido.

Definición 2.23. EL espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{V}, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es denominado el *antiespacio* de $(\mathcal{V}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$.

Dos vectores $x, y \in \mathcal{V}$ son *ortogonales* si $[\,x, y\,] = 0$, que anotaremos $x\,[\perp]\,y$. De la misma manera, diremos que $x \in \mathcal{V}$ es ortogonal a un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ (y lo anotaremos $x\,[\perp]\,\mathcal{M}$) si $[\,x, y\,] = 0$ para todo $y \in \mathcal{M}$. Si $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$ es otro conjunto, diremos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son ortogonales (y lo anotaremos $\mathcal{M}\,[\perp]\,\mathcal{N}$) si $[\,m, n\,] = 0$ para todo $m \in \mathcal{M}$ y todo $n \in \mathcal{N}$. Por último, si $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son subespacios ortogonales de $\mathcal{K}$, usaremos la notación $\mathcal{S}\,[+]\,\mathcal{T}$ para representar el subespacio suma, y si además los subespacios tienen intersección trivial, lo anotaremos $\mathcal{S}\,[\dot{+}]\,\mathcal{T}$.

Definición 2.24. Dado un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$, definimos el *compañero* $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$*-ortogonal* de $\mathcal{M}$ como

$$\mathcal{M}^{[\perp]} := \Big\{\, x \in \mathcal{V} \,:\, x\,[\perp]\,\mathcal{M} \,\Big\}.$$

La siguiente proposición describe las características del compañero ortogonal de un conjunto. Omitimos su prueba por ser análoga a la de las propiedades del subespacio ortogonal en un espacio de Hilbert.

Proposición 2.25. *Sean dos conjuntos* $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \mathcal{V}$.

1. $\mathcal{M}^{[\perp]}$ *es un subespacio;*
2. $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{M}^{[\perp]})^{[\perp]}$*;*
3. *Si* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ *entonces* $\mathcal{N}^{[\perp]} \subseteq \mathcal{M}^{[\perp]}$*;*
4. $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^{[\perp]} \subseteq \mathcal{M}^{[\perp]} \cap \mathcal{N}^{[\perp]}$*;*
5. $\mathcal{M}^{[\perp]} + \mathcal{N}^{[\perp]} \subseteq (\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^{[\perp]}$*;*
6. *si* $\mathcal{M}$ *y* $\mathcal{N}$ *son subespacios,* $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^{[\perp]} = \mathcal{M}^{[\perp]} \cap \mathcal{N}^{[\perp]}$.

Definición 2.26. Dado un subspacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$, llamaremos *parte isotrópica de* $\mathcal{S}$ al subespacio

$$\mathcal{S}^0 := \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{[\perp]},$$

y diremos que $\mathcal{S}$ es *no degenerado* si $\mathcal{S}^0 = \{\,0\,\}$.

Un vector $x \in \mathcal{V}$ se dice *positivo*, *negativo* o *neutro* de acuerdo con el signo de la constante real $[\,x, x\,]$, es decir, si $[\,x, x\,] > 0$, $[\,x, x\,] < 0$ ó $[\,x, x\,] = 0$, respectivamente. Denotamos con $\mathcal{P}^0$ al conjunto de vectores neutros de $\mathcal{V}$, con $\mathcal{P}^{++}$ ($\mathcal{P}^{--}$) al conjunto de vectores positivos (negativos), y con $\mathcal{P}^{+}$ ($\mathcal{P}^{-}$) al conjunto de vectores no negativos (no positivos).

Un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{V}$ se dice *positivo* si los vectores no nulos de $\mathcal{M}$ son positivos, i.e. $\mathcal{M} \setminus \{\,0\,\} \subseteq \mathcal{P}^{++}$. Análogamente se definen los conjuntos *negativos*, *neutros*, *no negativos* y *no positivos*. $\mathcal{M}$ se dice *definido* si es positivo o negativo, es *semidefinido* si es no negativo o no positivo, y es *indefinido* en caso contrario.

Observación 2.27. Si $x \in \mathcal{V}$ es un vector positivo (negativo) entonces αx también es positivo (negativo) para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Sin embargo, la suma de dos vectores positivos puede no ser positiva. Por ejemplo, consideremos el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathcal{V} = \mathbb{C}^2$ dotado con el producto interno indefinido dado por

$$[\,x, y\,] = x_1 y_1^* - x_2 y_2^*, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathcal{V}.$$

Consideremos los vectores $x = (1, 1/2)$ e $y = (-1, 1/2)$; x e y son vectores positivos, pero

$$[\,x + y, x + y\,] = -1 < 0.$$

Proposición 2.28. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio indefinido de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{S}$ contiene vectores neutros distintos del vector nulo.*

Demostración. Dado que $\mathcal{S}$ es indefinido, existen $x_\pm \in \mathcal{S}$ tales que $[\,x_+, x_+\,] > 0$ y $[\,x_-, x_-\,] < 0$. Consideremos la función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) = [\,(1-t)x_+ + tx_-, (1-t)x_+ + tx_-\,], \quad t \in [0, 1].$$

Dado que φ es continua, $\varphi(0) > 0$ y $\varphi(1) < 0$, por el Teorema del Valor Intermedio existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\varphi(t_0) = 0$. Luego, el vector $x_0 = (1 - t_0)x_+ + t_0 x_- \in \mathcal{S}$ es neutro, y además, dado que por la Observación 2.27 x_+ y x_- son linealmente independientes, $x_0 \neq 0$. $\square$

Proposición 2.29 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz)**.** *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio semidefinido de $\mathcal{V}$, entonces*

$$|\,[\,x, y\,]\,|^2 \leq [\,x, x\,]\,[\,y, y\,]\,, \quad \textit{para todos } x, y \in \mathcal{S}.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S}$ es no negativo, y sean $x, y \in \mathcal{S}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 &\leq [\,\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\,] = |\alpha|^2\,[\,x, x\,] + |\beta|^2\,[\,y, y\,] + 2\,\mathrm{Re}\,[\,x, y\,] \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} [\,x, x\,] & [\,y, x\,] \\ [\,x, y\,] & [\,y, y\,] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

donde $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ representa el producto interno usual en $\mathbb{C}^2$. Entonces,

$$0 \leq \det \begin{bmatrix} [\,x, x\,] & [\,y, x\,] \\ [\,x, y\,] & [\,y, y\,] \end{bmatrix} = [\,x, x\,]\,[\,y, y\,] - |\,[\,x, y\,]\,|^2\,.$$

Para el caso en que $\mathcal{S}$ es no positivo, se procede de la misma manera considerando que $\mathcal{S}$ es un subespacio no negativo del espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{V}, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$. $\square$

Corolario 2.30. *Si $\mathcal{S}$ es subespacio semidefinido de $\mathcal{V}$, $\mathcal{S}^0$ coincide con el conjunto de vectores neutros de $\mathcal{S}$, i.e. $\mathcal{S}^0 = \{\, x \in \mathcal{S} \,:\, [\,x, x\,] = 0 \,\}$.*

Demostración. Sea $y \in \mathcal{S}$, $y \neq 0$ un vector neutro, i.e. $[\,y, y\,] = 0$. Entonces, por la Proposición 2.39,

$$|\,[\,x, y\,]\,| \leq [\,x, x\,]\,[\,y, y\,] = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{S}.$$

Luego, $x \in \mathcal{S}^0$. La otra inclusión es trivial. $\square$

Si $\mathcal{S}$ es un subespacio definido, entonces $\mathcal{S}$ es no degenerado. No obstante, también existen subespacios indefinidos y no degenerados.

Ejemplo 2.31. Sea $\mathcal{V}$ el espacio de sucesiones de números complejos con una cantidad finita de coordenadas no nulas, dotado con el producto interno indefinido $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ dado por

$$[\,x, y\,] = -x_1 y_1^* + \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n^*, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{V}.$$

Si $\mathcal{S} = \operatorname{span}\{\, e_1, e_2 \,\}$, entonces $\mathcal{S}$ es un subespacio indefinido (pues e_1 es negativo y e_2 es positivo). Además, $\mathcal{S}$ es no degenerado. De hecho, si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{[\perp]}$, tenemos que $[\,x, e_1\,] = [\,x, e_2\,] = 0$ y esto implica que $\mathcal{S}^{[\perp]} \subseteq \operatorname{span}\{\, e_k \,:\, k \geq 3 \,\}$. Luego, $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{[\perp]} = \{\, 0 \,\}$.

Definición 2.32. Dados dos espacios con producto interno indefinido $(\mathcal{V}_1, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_1)$ y $(\mathcal{V}_2, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_2)$, decimos que $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son *isométricamente isomorfos* si existe un operador lineal biyectivo $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ tal que

$$[\,x, y\,]_1 = [\,Tx, Ty\,]_2\,, \quad \text{para todos } x, y \in \mathcal{V}_1.$$

El operador T es denominado *isomorfismo isométrico* entre $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$.

Por último, exponemos un resultado de [14, Capítulo 1, §1] que será fundamental para todo el desarrollo de la tesis.

Lema 2.33. *Sean $(\mathcal{V}_1, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_1)$ un espacio con producto interno indefinido y $(\mathcal{V}_2, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_2)$ un espacio con un producto interno arbitrario. Si la transformación lineal $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ satisface que $T(\mathcal{P}_1^0) \subseteq \mathcal{P}_2^+$, entonces*

$$\frac{[\,Ty, Ty\,]_2}{[\,y, y\,]_1} \leq \frac{[\,Tz, Tz\,]_2}{[\,z, z\,]_1}, \quad \textit{para todos } y \in \mathcal{P}_1^{--},\ z \in \mathcal{P}_1^{++}. \tag{2.1}$$

Además, en este caso

$$\mu_+(T) := \inf_{z \in \mathcal{P}_1^{++}} \frac{[\,Tz, Tz\,]_2}{[\,z, z\,]_1} \quad y \quad \mu_-(T) := \sup_{y \in \mathcal{P}_1^{--}} \frac{[\,Ty, Ty\,]_2}{[\,y, y\,]_1}$$

existen, $\mu_-(T) \leq \mu_+(T)$, y para cualquier $\mu \in [\mu_-(T), \mu_+(T)]$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$[\,Tx, Tx\,]_2 \geq \mu\,[\,x, x\,]_1\,, \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{V}_1.$$

Demostración. Consideremos vectores $y \in \mathcal{P}_1^{--}$ y $z \in \mathcal{P}_1^{++}$ tales que $[\,y, y\,]_1 = -1$ y $[\,z, z\,]_1 = 1$. Probaremos que $-[\,Ty, Ty\,]_2 \leq [\,Tz, Tz\,]_2$. Supongamos que $-[\,Ty, Ty\,]_2 > [\,Tz, Tz\,]_2$, y dado un $\varphi \in [0, 2\pi)$, definamos el vector $x_0 = e^{i\varphi}y + z$. Luego,

$$[\,x_0, x_0\,]_1 = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\,[\,y, z\,]_1\right),$$

y además

$$[\,Tx_0, Tx_0\,]_2 = [\,Ty, Ty\,]_2 + [\,Tz, Tz\,]_2 + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\,[\,Ty, Tz\,]_2\right) < 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\,[\,Ty, Tz\,]_2\right).$$

Sin embargo, podemos escoger $\varphi \in [0, 2\pi)$ de forma que $\mathrm{Re}\,(e^{i\varphi}\,[\,y, z\,]_1) = 0$ y $\mathrm{Re}\,(e^{i\varphi}\,[\,Ty, Tz\,]_2) \leq 0$. En este caso, resulta que $[\,x_0, x_0\,]_1 = 0$ y $[\,Tx_0, Tx_0\,]_2 < 0$, contradiciendo la hipótesis, y probando así (2.1).

Para completar la prueba, de (2.1) es inmediato que μ_- y μ_+ están bien definidos, y que además $\mu_- \leq \mu_+$. Ahora sea $\mu \in [\mu_-, \mu_+]$ y consideremos un $x \in \mathcal{V}_1$. Si $x \in \mathcal{P}_1^0$, i.e. $[\,x, x\,]_1 = 0$, dado que $T(\mathcal{P}_1^0) \subseteq \mathcal{P}_2^+$, $[\,Tx, Tx\,]_2 \geq 0$, y consecuentemente $[\,Tx, Tx\,]_2 \geq \mu\,[\,x, x\,]_1 = 0$. Si $x \in \mathcal{P}_1^{++}$, por (2.1),

$$\mu \leq \mu_+ \leq \frac{[\,Tx, Tx\,]_2}{[\,x, x\,]_1},$$

y entonces $[\,Tx, Tx\,]_2 \geq \mu\,[\,x, x\,]_1$. Una consideración análoga para el caso en que $x \in \mathcal{P}_1^{--}$ completa la demostración. $\square$

2.2.2 Espacios de Krein

La definición de espacio de Krein está formulada de manera tal que la clase de espacios de Krein contiene a los espacios de Hilbert, a los antiespacios de espacios de Hilbert, y es cerrada al considerar sumas directas ortogonales. Ésta es la familia más pequeña de espacios con producto interno indefinido con estas propiedades.

Definición 2.34. Dado un espacio con producto indefinido $(\mathcal{V}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, si existen subespacios $\mathcal{V}_{\pm} \subseteq \mathcal{V}$ tales que $\mathcal{V}_{+}$ es positivo, $\mathcal{V}_{-}$ es negativo, $\mathcal{V}_{+}$ y $\mathcal{V}_{-}$ son ortogonales y

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{+} \,[\dot{+}]\, \mathcal{V}_{-}, \tag{2.2}$$

decimos que (2.2) es una *descomposición canónica* de $\mathcal{V}$.

Si un espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{V}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ admite una descomposicón canónica (2.2), entonces $(\mathcal{V}_{+}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ y $(\mathcal{V}_{-}, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ son espacios pre-Hilbert.

Definición 2.35. Un espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un *espacio de Krein*, si admite una descomposición canónica

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{+} \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}_{-},$$

donde $\mathcal{K}_{\pm} \subseteq \mathcal{K}$ son subespacios tales que $(\mathcal{K}_{+}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ y $(\mathcal{K}_{-}, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ son espacios de Hilbert.

Dado un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, si $\mathcal{K}$ es definido entonces $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert (o el antiespacio de un espacio de Hilbert). Por otro lado, si $\mathcal{K}$ es indefinido, entonces existen infinitas descomposiciones canónicas de $\mathcal{K}$.

Cada descomposición canónica de un espacio de Krein permite dotarlo de un producto interno definido, y una estructura de espacio de Hilbert.

Definición 2.36. Dado un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ con una descomposición canónica $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{+} \dot{+} \mathcal{K}_{-}$, definimos sobre $\mathcal{K}$ el *producto interno definido asociado* a esta descomposición como

$$\langle\, x, y \,\rangle = [\, x_{+}, y_{+} \,] - [\, x_{-}, y_{-} \,], \quad x = x_{+} + x_{-}, y = y_{+} + y_{-}, x_{\pm} \in \mathcal{K}_{\pm}, y_{\pm} \in \mathcal{K}_{\pm}.$$

Asimismo, diremos que $(\mathcal{K}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ es el *espacio de Hilbert asociado* a esta descomposición canónica, y nos referiremos a $\|x\| = \langle\, x, x\,\rangle^{1/2}$ como la *norma asociada* a esta descomposición.

Dado un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ con una descomposición canónica $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dotplus \mathcal{K}_-$, es inmediato que $\mathcal{K}_+$ y $\mathcal{K}_-$ son ortogonales con respecto al producto interno definido asociado a esta descomposición. De hecho, el espacio de Hilbert asociado es el espacio producto $(\mathcal{K}_+, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]) \oplus (\mathcal{K}_-, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, donde el símbolo $\oplus$ representa la suma ortogonal con respecto al producto interno definido asociado.

Definición 2.37. Dado un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ con una descomposición canónica $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dotplus \mathcal{K}_-$, el operador definido en $\mathcal{K}$ mediante

$$Jx = x_+ - x_-, \quad x = x_+ + x_-, x_\pm \in \mathcal{K}_\pm,$$

se denomina *simetría fundamental asociada* a esta descomposición canónica.

Si $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dotplus \mathcal{K}_-$ es una descomposición canónica del espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, la simetría fundamental J asociada a esta descomposición es un operador acotado con respecto a la topología del espacio de Hilbert asociado $(\mathcal{K}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Además $J = J^{-1} = J^*$ (donde el símbolo $*$ representa al adjunto con respecto al producto $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$), con $\mathcal{K}_\pm = N(I \mp J)$, y para cualquier par de vectores $x, y \in \mathcal{K}$,

$$\langle\, x, y\,\rangle = [\, Jx, y\,] \quad \text{y} \quad [\, x, y\,] = \langle\, Jx, y\,\rangle\,.$$

Nos referiremos a J también como una *simetría fundamental de* $\mathcal{K}$.

Observación 2.38. Si $(\mathcal{K}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ es un espacio de Hilbert y $J \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ es una simetría (i.e. $J = J^{-1} = J^*$), definiendo el producto interno indefinido $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ en $\mathcal{K}$ como

$$[\, x, y\,] = \langle\, Jx, y\,\rangle\,, \quad x, y \in \mathcal{K},$$

resulta que $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Krein con descomposición canónica

$$\mathcal{K} = N(I - J)\,[\dotplus]\,N(I + J),$$

y J es una simetría fundamental de $\mathcal{K}$.

Proposición 2.39 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz generalizada)**.** *Si* $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ *es un espacio de Krein,*

$$|\,[\,x, y\,]\,| \leq \|x\|\,\|y\|, \quad \textit{para todos } x, y \in \mathcal{K},$$

donde $\|\cdot\|$ *denota la norma asociada a alguna descomposición canónica de* $\mathcal{K}$*.*

Demostración. Dada una descomposición canónica de $\mathcal{K}$, sea J la simetría fundamental asociada y denotemos con $\|\cdot\|$ a la norma asociada. Si $x, y \in \mathcal{K}$, considerando que J es un operador unitario,

$$|\,[\,x, y\,]\,| = |\,\langle\, Jx, y\,\rangle\,| \leq \|Jx\|\,\|y\| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

□

Observación 2.40. La Proposición 2.39 establece que en un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, el producto interno $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ es una función continua con respecto a la topología inducida por toda norma asociada a una descomposición canónica de $\mathcal{K}$.

Proposición 2.41. *Dado un espacio de Krein* $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$*, sean* J *y* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *la simetría fundamental y el producto interno definido, respectivamente, asociados a una descomposición canónica de* $\mathcal{K}$*. Si* $\mathcal{M}$ *es un subconjunto de* $\mathcal{K}$*, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\mathcal{M}^{[\perp]} = J(\mathcal{M}^{\perp}) = J(\mathcal{M})^{\perp}$*;*
2. $\mathcal{M}^{[\perp]} = (\operatorname{span} \mathcal{M})^{[\perp]} = \left(\overline{\operatorname{span} \mathcal{M}}\right)^{[\perp]}$*;*
3. $(\mathcal{M}^{[\perp]})^{[\perp]} = \overline{\operatorname{span} \mathcal{M}}$*;*

donde $\perp$ *denota la ortogonalidad con respecto a* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *y las clausuras se consideran con respecto a la topología del espacio de Hilbert* $(\mathcal{K}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$*.*

Como hemos mencionado, un espacio de Krein (que no sea un espacio de Hilbert ni antiespacio de un Hilbert) tiene infinitas descomposiciones canónicas diferentes y, por lo tanto, infinitos espacios de Hilbert (y normas) asociados diferentes. Sin embargo, todas ellas son isomorfas.

Teorema 2.42. *Sea* $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ *un espacio de Krein que admite dos descomposiciones canónicas,*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}_- \quad \textit{y} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}'_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}'_-.$$

Denotemos con $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$*, respectivamente, a las normas asociadas a estas descomposiciones. Sea* $S_+ : \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}'_+$ *definido por*

$$S_+x_+ = x'_+, \quad \textit{si } x_+ \in \mathcal{K}_+ \textit{ y } x_+ = x'_+ + x'_- \textit{ con } x'_\pm \in \mathcal{K}'_\pm, \tag{2.3}$$

y sea $S_- : \mathcal{K}_- \to \mathcal{K}'_-$ *definido por*

$$S_-y_- = y'_-, \quad \textit{si } y_- \in \mathcal{K}_- \textit{ e } y_- = y'_+ + y'_- \textit{ con } y'_\pm \in \mathcal{K}'_\pm. \tag{2.4}$$

Entonces $S_\pm$ *es un isomorfismo entre los espacios de Banach* $(\mathcal{K}_\pm, \|\cdot\|_1)$ *y* $(\mathcal{K}'_\pm, \|\cdot\|_2)$*.*

Demostración. Probaremos el resultado para el caso en que $\mathcal{K}$ es separable. En primer lugar, procedemos a mostrar que S_+ tiene gráfico cerrado. Consideremos una sucesión $\big((x_n, S_+x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ en el gráfico de S_+, y vectores $x \in \mathcal{K}_+$ e $y \in \mathcal{K}'_+$ tales que $x_n \to x$ y $S_+x_n \to y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $x_n = x_n^+ + x_n^-$ con $x_n^\pm \in \mathcal{K}'_\pm$, luego $Sx_n = x_n^+$. Veamos ahora que $x - y \in \mathcal{K}'_-$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n - S_+x_n = x_n^- \in \mathcal{K}'_-$. Entonces, considerando que $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ es una función continua con respecto a las dos normas, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, para todo $z \in \mathcal{K}'_+$ se cumple que

$$0 = [z, x_n - S_+x_n] \to [\,z, x - y\,]\,.$$

Luego, $x - y \in (\mathcal{K}'_+)^{[\perp]} = \mathcal{K}'_-$, y en consecuencia la representación de x de acuerdo a la descomposición $\mathcal{K} = \mathcal{K}'_+\,[\dot{+}]\,\mathcal{K}'_-$ resulta $x = y + (x - y)$. Por lo tanto, $y = Sx$, y entonces el Teorema del gráfico cerrado afirma que S_+ es un operador acotado de $(\mathcal{K}_+, \|\cdot\|_1)$ en $(\mathcal{K}'_+, \|\cdot\|_2)$.

Ahora, mostraremos que S_+ es inyectivo y de rango cerrado. Sea $x \in \mathcal{K}_+$, y escribamos $x = x_+ + x_-$ con $x_\pm \in \mathcal{K}'_\pm$. Luego, considerando que $x_+\,[\perp]\,x_-$ y $[\,x_-, x_-\,] \leq 0$,

$$\|x\|_1^2 = [\,x_+ + x_-, x_+ + x_-\,] \leq [\,x_+, x_+\,] = \|x_+\|_2^2 = \|S_+x\|_2^2.$$

Entonces, S_+ es acotado inferiormente.

Por último, veamos que S_+ es también sobreyectivo. Supongamos que existe $y \in \mathcal{K}'_+$ tal que $y\,[\perp]\,R(S_+)$. Sea $x \in \mathcal{K}_+$, y escribamos $x = x_+ + x_-$ con $x_\pm \in \mathcal{K}'_\pm$. Luego, dado que $x_+ = Sx$, $[\,x, y\,] = 0$. Entonces, $y \in (\mathcal{K}_+)^{[\perp]} = \mathcal{K}_-$, y consecuentemente $y \in \mathcal{K}_- \cap \mathcal{K}'_+ = \{\,0\,\}$. Entonces, considerando que $(\mathcal{K}'_+, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert, hemos probado que $R(S_+)$ es denso en $\mathcal{K}_+$.

Aplicando el mismo procedimiento para el operador S_- se completa la demostración. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior, probaremos que todo par de normas asociadas a dos descomposiciones canónicas de un espacio de Krein son equivalentes.

Teorema 2.43. *Dado un espacio de Krein* $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ *que admite dos descomposiciones canónicas,*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \, [\dot{+}] \, \mathcal{K}_- \quad y \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}'_+ \, [\dot{+}] \, \mathcal{K}'_-,$$

las normas asociadas a estas descomposiones son equivalentes.

Demostración. Denotemos con $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ a las normas asociadas a las descomposiciones $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \, [\dot{+}] \, \mathcal{K}_-$ y $\mathcal{K} = \mathcal{K}'_+ \, [\dot{+}] \, \mathcal{K}'_-$, respectivamente. Representemos a un vector $x \in \mathcal{K}$ arbitrario como

$$x = x_+ + x_- = x'_+ + x'_-,$$

con $x_\pm \in \mathcal{K}$ y $x'_\pm \in \mathcal{K}'_\pm$. Sean S_+ y S_- los operadores definidos por (2.3) y (2.4), respectivamente, luego $x_+ = S_+x_+ + (I - S_+)x_+$ y $x_- = (I - S_-)x_- + S_-x_-$, con $S_+x_+, (I - S_-)x_- \in \mathcal{K}'_+$ y $(I - S_+)x_+, S_-x_- \in \mathcal{K}'_-$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x'_+ &= S_+x_+ + (I - S_-)x_-, \\ x'_- &= (I - S_+)x_+ + S_-x_-. \end{aligned}$$

Entonces, considerando que S_+ y S_- son acotados,

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \|S_+x_+ + (I - S_-)x_-\|_2^2 + \|(I - S_+)x_+ + S_-x_-\|_2^2 \\ &\leq 4\left(\|S_+\|^2\|x_+\|_1^2 + \|I - S_-\|^2\|x_-\|_1^2\right) + 4\left(\|I - S_+\|^2\|x_+\|_1^2 + \|S_-\|^2\|x_-\|_1^2\right) \\ &\leq 4c\left(\|x_+\|_1^2 + \|x_-\|_1^2\right) = 4c\,\|x\|_1^2, \end{aligned}$$

donde $c = \text{máx}\left\{\, \|S_+\|^2 + \|I - S_+\|^2, \|I - S_-\|^2 + \|S_-\|^2 \,\right\}$.

Invirtiendo los roles de las descomposiciones canónicas y aplicando el mismo procedimiento, se obtiene la otra desigualdad, i.e. $\|x\|_1 \leq M\|x\|_2$ para algún $M > 0$. $\square$

Dado que las normas asociadas a diferentes descomposiciones canónicas de un espacio de Krein son equivalentes, todas ellas inducen la misma topología.

Definición 2.44. La *topología de la norma* de un espacio de Krein $\mathcal{K}$, es la topología inducida por la norma asociada a una descomposición canónica de $\mathcal{K}$.

Observación 2.45. Dados un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\mathcal{K})$ y un espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{H}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\mathcal{H})$, si $\mathcal{K}$ y $\mathcal{H}$ son isométricamente isomorfos, entonces

$(\mathcal{H}, [\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{H}})$ es un espacio de Krein. Efectivamente, sea $T : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ un operador biyectivo tal que $[x, y]_{\mathcal{K}} = [Tx, Ty]_{\mathcal{H}}$, para todos $x, y \in \mathcal{K}$. Si $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \,[\dot{+}]_{\mathcal{K}}\, \mathcal{K}_-$ es una descomposición canónica de $\mathcal{K}$, con $\mathcal{K}_+$ y $\mathcal{K}_-$ positivo y negativo, respectivamente, luego

$$\mathcal{H} = T(\mathcal{K}_+) \,[\dot{+}]_{\mathcal{H}}\, T(\mathcal{K}_-)$$

es una descomposición canónica de $\mathcal{H}$. Además, T es un isomorfismo isométrico entre el espacio de Hilbert $(\mathcal{K}_\pm, \pm[\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{K}})$ y el espacio pre-Hilbert $(T(\mathcal{K}_\pm), \pm[\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{H}})$, i.e. $(T(\mathcal{K}_\pm), \pm[\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{H}})$ resulta ser un espacio de Hilbert.

2.2.3 Operadores sobre espacios de Krein

Procedemos aquí a introducir algunos aspectos sobre la teoría de operadores en espacios de Krein, si bien no nos adentraremos en la descripción de las diversas clases de operadores. Las nociones de convergencia y continuidad que aparezcan en el resto de esta sección corresponden a la topología de la norma, a menos que se haga explícito el uso de otra topología.

Al espacio de operadores acotados entre dos espacios de Krein $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ lo denotaremos $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, de la misma forma que lo hacemos para espacios de Hilbert. Recordemos que si $\mathcal{H} = \mathcal{K}$, reemplazaremos $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Notemos que, dado un espacio de Krein $\mathcal{K}$ y fijada una descomposición canónica de $\mathcal{K}$, si dotamos a $\mathcal{K}$ de la topología de la norma, éste resulta, como espacio topológico, indistinguible del espacio de Hilbert asociado a esa descomposición.

Luego, la norma de operadores entre espacios de Krein se define de la misma forma que para los espacios de Hilbert, considerando la topología de la norma.

Definición 2.46. Dados dos espacios de Krein $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{H}, [\cdot\,,\,\cdot]_{\mathcal{H}})$, dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, si denotamos con $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ a dos normas asociadas a descomposiciones canónicas de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, respectivamente, definimos la *norma del operador* A (y la anotaremos $\|A\|$) como

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} \|Ax\|_{\mathcal{K}}.$$

A esta norma la llamaremos *norma de operadores*.

Observación 2.47. Dados dos espacios de Krein $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, todo par de normas de operadores para $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ son equivalentes, por lo tanto tenemos una única topología (de la norma) para $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. Las topologías fuerte de operadores (SOT) y débil de operadores (WOT) se definen para $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ de la misma manera que para espacios de Hilbert.

Proposición 2.48. *Dados dos espacios de Krein* $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ *y* $(\mathcal{H}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{H}})$*, si dotamos al espacio* $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ *con la norma de operadores* $\|\cdot\|$*, entonces* $(\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}), \|\cdot\|)$ *resulta un espacio de Banach.*

Pueden enunciarse para espacios de Krein muchos de los resultados clásicos de teoría de operadores en espacios de Hilbert. Por ejemplo:

- El Teorema del Gráfico Cerrado: un operador lineal de un espacio de Krein $\mathcal{H}$ en un espacio de Krein $\mathcal{K}$, definido en todo $x \in \mathcal{H}$, es continuo si y sólo si tiene el gráfico cerrado.
- El Teorema de Representación de Riesz: todo funcional lineal continuo φ sobre un espacio de Krein $\mathcal{K}$ es de la forma

$$\varphi(x) = [\,x, y\,], \quad x \in \mathcal{K},$$

  para un único $y \in \mathcal{K}$.

Como consecuencia del Teorema de Representación de Riesz, tenemos la siguiente definición. De aquí en más, $(\mathcal{H}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{H}})$ y $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ denotarán dos espacios de Krein.

Definición 2.49. Dado un operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, llamamos *operador adjunto de* A (y lo anotaremos con $A^{\#}$) al único $A^{\#} \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ que satisface que

$$[\,Ax, y\,]_{\mathcal{H}} = \left[\,x, A^{\#}y\,\right]_{\mathcal{K}}, \quad \text{para todos } x \in \mathcal{H},\, y \in \mathcal{K}.$$

Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, si $J_{\mathcal{H}}$ y $J_{\mathcal{K}}$ son dos simetrías fundamentales de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, respectivamente, entonces

$$A^{\#} = J_{\mathcal{H}} A^* J_{\mathcal{K}}. \tag{2.5}$$

En efecto, si $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$,

$$[\,Ax, y\,]_{\mathcal{K}} = \langle\, J_{\mathcal{K}}Ax, y\,\rangle_{\mathcal{K}} = \langle\, x, A^*J_{\mathcal{K}}y\,\rangle_{\mathcal{H}} = [\,x, J_{\mathcal{H}}A^*J_{\mathcal{K}}y\,]_{\mathcal{H}}\,.$$

De (2.5), se sigue que $A^{\#}$ es de rango cerrado si y sólo si A es de rango cerrado.

Las siguientes dos proposiciones describen las características básicas del operador adjunto. Omitimos sus pruebas, por ser análogas a las de las características del operador adjunto en un espacio de Hilbert.

Proposición 2.50. *Sean $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{E}$ tres espacios de Krein. Si $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $C \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{E})$, entonces:*

1. $(A + \alpha B)^{\#} = A^{\#} + \alpha^* B^{\#}$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;
2. $(CA)^{\#} = A^{\#} C^{\#}$;
3. $(A^{\#})^{\#} = A$.

Proposición 2.51. *Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, entonces*

$$N(A^{\#}) = R(A)^{[\perp]}.$$

Además, si $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$,

$$A(\mathcal{S})^{[\perp]} = (A^{\#})^{-1} \left(\mathcal{S}^{[\perp]} \right). \tag{2.6}$$

El siguiente teorema provee de una descomposición muy útil para operadores $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ que satisfacen que $A = A^{\#}$.

Teorema 2.52 (Factorización de Bognár-Kramli)**.** *Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ es tal que $A^{\#} = A$, entonces existe un espacio de Krein $(\mathcal{D}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{D}})$, con $\mathcal{D} = \overline{R(A)}$, y un operador inyectivo $D \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ tales que A puede factorizarse como*

$$A = DD^{\#}.$$

Demostración. Sean J y $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ una simetría fundamental y un producto interno definido, respectivamente, asociados a una descomposición canónica de $\mathcal{K}$. Considerando que de (2.5) $A = A^{\#} = JA^*J$, es fácil ver que el operador $AJ \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ es autoadjunto en $(\mathcal{K}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. En efecto, si $x, y \in \mathcal{K}$,

$$\langle\, AJx, y \,\rangle = \langle\, x, JA^*y \,\rangle = \langle\, x, JA^*JJy \,\rangle = \langle\, x, AJy \,\rangle .$$

Ahora, observemos que

$$N(AJ)^{\perp} = J(N(A))^{\perp} = N(A)^{[\perp]} = \overline{R(A)}.$$

Luego, considerando la descomposición polar de AJ, podemos escribir

$$AJ = PU = UP,$$

donde $P \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^+$ con $\overline{R(P)} = \overline{R(A)}$, y U es una isometría parcial autoadjunta en $(\mathcal{K}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$, con $\overline{R(A)}$ como espacio inicial y final. Denotemos $\mathcal{D} = \overline{R(A)}$. El operador $J_{\mathcal{D}} = U\big|_{\mathcal{D}}$ es una simetría en el espacio de Hilbert $(\mathcal{D}, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$. Entonces, definiendo el producto interno indefinido $[\,\cdot\,, \cdot\,]_{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{D}$ como

$$[\,x, y\,]_{\mathcal{D}} = \langle\, J_{\mathcal{D}}x, y\,\rangle\,, \quad x, y \in \mathcal{D},$$

resulta que $(\mathcal{D}, [\,\cdot\,, \cdot\,]_{\mathcal{D}})$ es un espacio de Krein. Sea $D : \mathcal{D} \to \mathcal{K}$ el operador lineal definido por

$$Dx = P^{1/2}x, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Este operador es acotado, i.e. $D \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{K})$, y por (2.5) $D^{\#} = J_{\mathcal{D}}P^{1/2}J = UP^{1/2}J$. Luego, dado que U y P conmutan,

$$DD^{\#} = P^{1/2}UP^{1/2}J = UPJ = (AJ)J = A.$$

Por último, $N(D) = N(P) \cap \mathcal{D} = N(AJ) \cap N(AJ)^{\perp} = \{\,0\,\}$. □

2.2.4 Subespacios uniformemente definidos

Si $\mathcal{S}$ es un subespacio positivo de $\mathcal{K}$, entonces $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,, \cdot\,])$ es un espacio pre-Hilbert (análogamente, si $\mathcal{S}$ es negativo, entonces $(\mathcal{S}, -[\,\cdot\,, \cdot\,])$ es un espacio pre-Hilbert). La pregunta acerca de qué condiciones debe satisfacer $\mathcal{S}$ para que $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,, \cdot\,])$ resulte un espacio de Hilbert da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.53. Un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{K}$ es uniformemente positivo si existe $\alpha > 0$ tal que

$$[\,x, x\,] \geq \alpha\|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{S},$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma asociada a alguna descomposición canónica de $\mathcal{K}$.

Análogamente, $\mathcal{S}$ es uniformemente negativo si existe $\alpha > 0$ tal que

$$[\,x, x\,] \leq -\alpha\|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{S}.$$

Es importante destacar que estas nociones son independientes de la norma elegida.

Llamaremos subespacios *uniformemente definidos*, a los subespacios uniformemente positivos y a los uniformemente negativos.

Si $\mathcal{S}$ es un subespacio uniformemente definido de $\mathcal{K}$, y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ es un subespacio, entonces $\mathcal{M}$ es uniformemente definido.

Proposición 2.54. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio definido de $\mathcal{K}$ de dimensión finita, entonces $\mathcal{S}$ es uniformemente definido.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S}$ es un subespacio positivo. Considerando que $[x, x]^{1/2}$, $x \in \mathcal{S}$, define una norma en $\mathcal{S}$, el resultado se sigue inmediatamente del hecho de que todas las normas definidas en un subespacio de dimensión finita son equivalentes.

El mismo argumento se utiliza si $\mathcal{S}$ es negativo, con la norma $(-\,[\,x, x\,])^{1/2}$, $x \in \mathcal{S}$. $\square$

Proposición 2.55. *Dado un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ es uniformemente definido si y sólo si $\overline{\mathcal{S}}$ es uniformemente definido.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata de la continuidad de $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ con respecto a la topología de la norma, establecida en la Observación 2.40. $\square$

Proposición 2.56. *Sea $\mathcal{S}$ un subespacio cerrado y positivo (negativo) de $\mathcal{K}$. Luego, $\mathcal{S}$ es uniformemente positivo (negativo) si y sólo si $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ ($(\mathcal{S}, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$) es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S}$ es positivo y denotemos con $|||\cdot|||$ a la norma inducida por $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ en este subespacio: $|||x||| = [\,x, x\,]^{1/2}$, $x \in \mathcal{S}$. Y denotemos con $\|\cdot\|$ a la norma asociada a alguna descomposición canónica de $\mathcal{K}$. Por la Proposición 2.39, $|||x||| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{S}$; además, $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Si suponemos que $\mathcal{S}$ es un subespacio uniformemente positivo, entonces las normas $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes en $\mathcal{S}$, y en consecuencia $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ resulta un espacio de Hilbert.

Para el recíproco, supongamos que $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert. Dado que $|||x||| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{S}$, la aplicación identidad $I : (\mathcal{S}, \|\cdot\|) \to (\mathcal{S}, |||\cdot|||)$ es acotada.

Luego, dado que $(\mathcal{S}, |||\cdot|||)$ y $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$ son espacios de Banach, por el Teorema de la aplicación abierta, la inversa $I' : (\mathcal{S}, |||\cdot|||) \to (\mathcal{S}, \|\cdot\|)$ también es acotada y, por lo tanto, existe $\alpha > 0$ tal que $\|x\| \leq \alpha|||x|||$ para todo $x \in \mathcal{S}$. Entonces,

$$[\,x, x\,] = |||x|||^2 \geq \alpha^2\|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{S},$$

i.e. S es uniformemente positivo.

La prueba es análoga para el caso en que $\mathcal{S}$ es un subespacio negativo. $\square$

Teorema 2.57. *Sea $\mathcal{S}$ un subespacio indefinido de un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$. Luego, $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Krein si y sólo si $\mathcal{S}$ admite una descomposición canónica*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{S}_-,$$

siendo $\mathcal{S}_\pm$ subespacios cerrados y uniformemente definidos.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\mathcal{S}$ se puede descomponer como $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{S}_-$, con $\mathcal{S}_\pm$ subespacios cerrados tales que $\mathcal{S}_+$ y $\mathcal{S}_-$ son uniformemente positivo y negativo, respectivamente. Por la Proposición 2.56, $(\mathcal{S}_+, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ y $(\mathcal{S}_-, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ son espacios de Hilbert, y consecuentemente $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Krein.

Ahora, supongamos que $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Krein, y consideremos una descomposición canónica $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{S}_-$, donde $\mathcal{S}_+$ y $\mathcal{S}_-$ son positivo y negativo, respectivamente. Veamos que estos subespacios son cerrados. Lo haremos para el caso en que $\mathcal{K}$ es separable, pero puede demostrarse de forma similar para el caso general. Denotemos con $\|\cdot\|$ a la norma asociada a esta descomposición, y con $|||\cdot|||$ a la norma en $\mathcal{S}_+$ dada por $|||x||| = [x, x]^{1/2}$, $x \in \mathcal{S}_+$. Notemos que, dado que $(\mathcal{S}_+, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert, $(\mathcal{S}_+, |||\cdot|||)$ es un espacio de Banach. Sea $x \in \overline{\mathcal{S}_+}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_+$ tal que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. De la Proposición 2.39,

$$|||x - x_n||| = [\,x - x_n, x - x_n\,]^{1/2} \leq \|x - x_n\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, $x_n \xrightarrow{|||\cdot|||} x$, y consecuentemente $x \in \mathcal{S}_+$. La Proposición 2.56 afirma entonces que $\mathcal{S}_+$ es uniformemente positivo. Con el mismo procedimiento aplicado al subespacio $\mathcal{S}_-$ se completa la prueba. $\square$

2.2.5 Subespacios regulares

Dado un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{K}$, en general $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ puede no ser un espacio de Krein. Asimismo, su compaẽro ortogonal $\mathcal{S}^{[\perp]}$ no es necesariamente un complemento de $\mathcal{S}$. Nos disponemos ahora a analizar la relación entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^{[\perp]}$, y caracterizar el caso en que estos dos subespacios son complementarios, así como el caso en que $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ resulta un espacio de Krein.

Proposición 2.58. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$, entonces:*

1. $(\mathcal{S}^{[\perp]})^0 = \mathcal{S}^0$;
2. $(\mathcal{S}^0)^{[\perp]} = \overline{\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}}$.

Demostración. Por la Proposición 2.41,

$$(\mathcal{S}^{[\perp]})^0 = \mathcal{S}^0 \cap (\mathcal{S}^{[\perp]})^{[\perp]} = \mathcal{S}^{[\perp]} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}^0.$$

Haciendo uso de las Proposiciones 2.25 y 2.41,

$$\left(\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}\right)^{[\perp]} = \mathcal{S}^{[\perp]} \cap (\mathcal{S}^{[\perp]})^{[\perp]} = \mathcal{S}^{[\perp]} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}^0,$$

y consecuentemente $(\mathcal{S}^0)^{[\perp]} = \left((\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]})^{[\perp]}\right)^{[\perp]} = \overline{\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}}$. $\square$

Proposición 2.59. *Dado un subespacio cerrado $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$, si J y $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ son la simetría fundamental y el producto interno definido, respectivamente, asociados a una descomposición canónica de $\mathcal{K}$, entonces*

$$\mathcal{K} = \left(\overline{\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}}\right) \oplus J(\mathcal{S}^0),$$

donde $\oplus$ denota la suma ortogonal con respecto a $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.

Demostración. Considerando que $\mathcal{S}^0$ es cerrado, por la Proposición 2.25 $(\mathcal{S}^0)^{[\perp]} = J(\mathcal{S}^0)^{\perp}$. Además, dado que J es un homeomorfismo, $J(\mathcal{S}^0)$ es cerrado. Luego,

$$\mathcal{K} = J(\mathcal{S}^0)^{\perp} \oplus J(\mathcal{S}^0) = \left(\overline{\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}}\right) \oplus J(\mathcal{S}^0).$$

$\square$

Mediante estas dos proposiciones podemos caracterizar los subespacios cerrados y no degenerados.

Proposición 2.60. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{S}$ es no degenerado si y sólo si $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}}$.*

Demostración. El resultado se sigue de la Proposición 2.59, y del hecho de que, si J es una simetría fundamental de $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}^0$ es no degenerado si y sólo si $J(\mathcal{S}^0) = \{ 0 \}$. □

A continuación definimos aquellos subespacios que son complementarios a su compañero ortogonal.

Definición 2.61. Dado un subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$, decimos que $\mathcal{S}$ es regular si

$$\mathcal{K} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}.$$

Proposición 2.62. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio regular de $\mathcal{K}$, entonces:*

1. *$\mathcal{S}$ es cerrado y no degenerado;*
2. *$\mathcal{S}^{[\perp]}$ es un subespacio regular.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$. Sea $x \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}$, y escribamos $x = y + z$ con $y \in \mathcal{S}$ y $z \in \mathcal{S}^{[\perp]}$. Luego, haciendo uso de las Proposiciones 2.25 y 2.41,

$$z = x - y \in \mathcal{S}^{[\perp]} \cap \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{[\perp]} \cap (\mathcal{S}^{[\perp]})^{[\perp]} = \big(\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}\big)^{[\perp]} = \{ 0 \} .$$

Consecuentemente, $\mathcal{S}$ es cerrado. La Proposición 2.59 asegura entonces que $\mathcal{S}$ es un subespacio no degenerado. Finalmente, el que $\mathcal{S}^{[\perp]}$ sea también regular es una consecuencia de que $(\mathcal{S}^{[\perp]})^{[\perp]} = \mathcal{S}$. □

Observación 2.63. Si $\mathcal{S}$ es un subespacio regular de $\mathcal{K}$, entonces

$$\mathcal{K} = \mathcal{S} \, [\dot{+}] \, \mathcal{S}^{[\perp]}.$$

El siguiente teorema caracteriza los subespacios regulares.

Teorema 2.64. *Sea $\mathcal{S}$ un subespacio no trivial de $\mathcal{K}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{S}$ es regular;*
2. *$(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Krein;*

3. existe un operador idempotente $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ tal que $Q^{\#} = Q$ y $R(Q) = \mathcal{S}$.

Demostración.

1.↔3. Supongamos que $\mathcal{S}$ es un subespacio regular, luego $\mathcal{K} = \mathcal{S} \dotplus \mathcal{S}^{[\perp]}$. Entonces, considerando que por la Proposición 2.62 $\mathcal{S}$ es cerrado, la proyección oblicua $Q := P_{\mathcal{S}//\mathcal{S}^{[\perp]}}$ es un operador acotado. Finalmente, dados $x, y \in \mathcal{K}$, escribamos $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ con $x_1, y_1 \in \mathcal{S}$ y $x_2, y_2 \in \mathcal{S}^{[\perp]}$. Luego,

$$[\,Qx, y\,] = [\,x_1, y_1 + y_2\,] = [\,x_1, y_1\,] = [\,x_1 + x_2, y_1\,] = [\,x, Qy\,]\,,$$

de donde se desprende, por la unicidad del operador adjunto, que $Q = Q^{\#}$.

Para el recíproco, supongamos que existe una proyección $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ tal que $Q = Q^{\#}$ y $R(Q) = \mathcal{S}$. Luego, $\mathcal{K} = \mathcal{S} \dotplus N(Q)$, y además $(I - Q)^{\#} = I - Q$. Dado $x \in \mathcal{K}$, escribamos $x = y + z$ con $y \in \mathcal{S}$ y $z \in N(Q)$. Entonces,

$$0 = [\,(I - Q)s, x\,] = [\,s, (I - Q)x\,] = [\,s, z\,]\,, \quad \text{para todo } s \in \mathcal{S}.$$

En consecuencia, $z \in \mathcal{S}^{[\perp]}$, y $x \in \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$. Dado que $x \in \mathcal{K}$ es arbitrario, $\mathcal{K} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$.

3.→2. Sea $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ una proyección oblicua tal que $Q = Q^{\#}$ y $R(Q) = \mathcal{S}$. Por el Teorema 2.52 existe un producto interno indefinido $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{S}}$ tal que $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{S}})$ es un espacio de Krein, y un operador inyectivo $D \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{K})$ tal que $Q = DD^{\#}$. Dado que $Q^2 = Q$, tenemos que

$$DD^{\#}DD^{\#} = DD^{\#}.$$

Como D es inyectivo, $D^{\#}$ tiene rango denso en $\mathcal{S}$, y consecuentemente $DD^{\#}D = D$. Luego, $D(D^{\#}D - I_{\mathcal{S}}) = 0$, y en consecuencia $D^{\#}D = I_{\mathcal{S}}$. Además, $R(D) = R(DD^{\#}) = R(Q) = \mathcal{S}$. Entonces, dado que

$$[\,x, y\,] = \left[\,D^{\#}Dx, y\,\right] = [\,Dx, Dy\,]_{\mathcal{S}}\,, \quad \text{para todos } x, y \in \mathcal{S},$$

D es un isomorfismo isométrico entre el espacio de Krein $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{S}})$ y el espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$. Por lo tanto, por la Observación 2.45, $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Krein.

2.→1. Supongamos que $(\mathcal{S}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Krein, y consideremos una descomposición canónica $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \,[\dotplus]\, \mathcal{S}_-$, tal que $(\mathcal{S}_\pm, \pm[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ es un espacio de Hilbert. Sea $x \in \mathcal{K}$

arbitrario, y definamos el funcional $\varphi_x^+ : \mathcal{S}_+ \to \mathbb{C}$ dado por

$$\varphi_x^+(y_+) = [\, y_+, x\,], \quad y_+ \in \mathcal{S}_+.$$

Este funcional es acotado. Para ver esto, denotemos con $\|\cdot\|$ a la norma en $\mathcal{S}$ asociada a la descomposición canónica $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{S}_-$, y notemos que $[\, y_+, y_+\,]^{1/2} = \|y_+\|$ para todo $y_+ \in \mathcal{S}_+$. Entonces, por la Proposición 2.39,

$$\left|\, \varphi_x^+(y_+) \,\right| = |\, [\, y_+, x\,] \,| \leq \|y_+\| \, \|x\| = \|x\| \, [\, y_+, y_+\,]^{1/2} .$$

Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $x_+ \in \mathcal{S}_+$ tal que $[\, y_+, x\,] = [\, y_+, x_+\,]$, para todo $y_+ \in \mathcal{S}_+$. Mediante el mismo procedimiento aplicado al espacio de Hilbert $(\mathcal{S}_-, -[\,\cdot\,,\,\cdot\,])$, obtenemos que existe un único $x_- \in \mathcal{S}_-$ tal que $[\, y_-, x\,] = [\, y_-, x_-\,]$, para todo $y_- \in \mathcal{S}_-$. Denotemos $x_0 = x_+ + x_- \in \mathcal{S}$. Dado $y \in \mathcal{S}$, escribamos $y = y_+ + y_-$ con $y \pm \in \mathcal{S}_\pm$. Luego,

$$[\, y, x\,] = [\, y_+, x\,] + [\, y_-, x\,] = [\, y_+, x_+\,] + [\, y_-, x_-\,] = [\, y, x_0\,] .$$

Por consiguiente, $x - x_0 \in \mathcal{S}^{[\perp]}$, y consecuentemente $x \in \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$. Dado que x es arbitario, la prueba queda completa. $\square$

Las proyecciones que se mencionan en el Teorema 2.64 son denominadas *proyecciones J-autoadjuntas* (i.e. autoadjuntas con respecto a $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$). Estas proyecciones han sido estudiadas en la literatura cásica [14, 25], y más recientemente en [40, 72, 95].

Corolario 2.65. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio de dimensión finita de $\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{S}$ es regular si y sólo si $\mathcal{S}$ es no degenerado.*

Demostración. Dado que $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$ es cerrado, el resultado se sigue de la Proposición 2.59 y el Teorema 2.64. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior y de la Proposición 2.56 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.66. *Dado un subespacio $\mathcal{S}$ cerrado y definido de $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ es regular si y sólo si es uniformemente definido.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S}$ es un subespacio positivo. Entonces, $(\mathcal{S}, [\cdot\,,\,\cdot])$ es un espacio de Krein si y sólo si es un espacio de Hilbert. Luego, la equivalencia es una consecuencia de la Proposición 2.56 y el Teorema 2.64.

Si $\mathcal{S}$ es negativo, la equivalencia se prueba de forma análoga, considerando que $\mathcal{S}$ es un subespacio positivo del espacio de Krein $(\mathcal{K}, -[\cdot\,,\,\cdot])$. □

2.2.6 Subespacios pseudo-regulares

Introducimos aquí una última clase de subespacios. Habiendo ya analizado aquellos subespacios $\mathcal{S}$ que satisfacen que la suma $\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$ es todo el espacio $\mathcal{K}$, consideramos ahora aquellos tales que esta suma es al menos cerrada.

Definición 2.67. Decimos que un subespacio $\mathcal{S}$ cerrado de $\mathcal{K}$ es *pseudo-regular* si $\mathcal{S}+\mathcal{S}^{[\perp]}$ es un subespacio cerrado.

Proposición 2.68. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ es regular si y sólo si $\mathcal{S}$ es pseudo-regular y no degenerado.*

Demostración. Esta equivalencia es una consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.60 y 2.62. □

El siguiente teorema compila diversas caracterizaciones de la pseudo-regularidad que se encuentran diseminadas en la literatura y en diferentes artículos científicos, ver [14, 15, 62, 84, 96].

Teorema 2.69. *Si $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado y no trivial de $\mathcal{K}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{S}$ es pseudo-regular;*
2. *$(\mathcal{S}^0)^{[\perp]} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$;*
3. *existe un subespacio regular $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{S} = \mathcal{R}\,[\dotplus]\,\mathcal{S}^0$;*
4. *si $\mathcal{S} = \mathcal{M} \dotplus \mathcal{S}^0$, con $\mathcal{M}$ un subespacio de $\mathcal{K}$, entonces $\mathcal{M}$ es regular;*
5. *existe un subespacio $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{K}$ regular tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$ y $\mathcal{S}^0 = \mathcal{N} \cap \mathcal{S}^{[\perp]}$;*
6. *existe un operador idempotente $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ tal que $Q^{\#}Q = QQ^{\#}$ y $R(Q) = \mathcal{S}$.*

Demostración.

1.↔2. Esta equivalencia es una consecuencia de la Proposición 2.58.

1.→3. Consideremos una simetría fundamental J, y un producto interno $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$, asociados a una descomposición canónica de $\mathcal{K}$. Por la Proposición 2.59,

$$\mathcal{K} = \left(\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}\right) \oplus J(\mathcal{S}^0) = (\mathcal{S} \ominus \mathcal{S}^0) \oplus \mathcal{S}^{[\perp]} \oplus J(\mathcal{S}^0), \tag{2.7}$$

donde $\oplus$ y $\ominus$ denotan, respectivamente, la suma y resta ortogonales con respecto a $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$. Denotemos $\mathcal{R} = \mathcal{S}\ominus\mathcal{S}^0 = \mathcal{S}\cap(\mathcal{S}^0)^{\perp}$, y observemos que $\mathcal{S} = (\mathcal{S}\ominus\mathcal{S}^0)\,[\dot{+}]\,\mathcal{S}^0 = \mathcal{R}\,[\dot{+}]\,\mathcal{S}^0$. Haciendo uso de la Proposición 2.41,

$$\mathcal{R}^{[\perp]} = \overline{\mathcal{S}^{[\perp]} + (\mathcal{S}^0)^{\perp[\perp]}} = \overline{\mathcal{S}^{[\perp]} + J((\mathcal{S}^0)^{\perp\perp})} = \overline{\mathcal{S}^{[\perp]} + J(\mathcal{S}^0)}. \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) se sigue que $\mathcal{R} + \mathcal{R}^{[\perp]} = \mathcal{K}$, i.e. $\mathcal{R}$ es un subespacio regular.

3.→2. Dado que por la Proposición 2.58 $(\mathcal{S}^0)^{[\perp]} = \overline{\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}}$, basta con probar que $(\mathcal{S}^0)^{[\perp]} \subseteq \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$. Sea $x \in (\mathcal{S}^0)^{[\perp]}$ y escribamos $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ y $x_2 \in \mathcal{R}^{[\perp]}$. Luego, considerando que $x_1\,[\perp]\,\mathcal{S}^0$, si $y \in \mathcal{S}^0$ entonces

$$0 = [\,y, x\,] = [\,y, x_1 + x_2\,] = [\,y, x_2\,]\,.$$

En consecuencia, $x_2 \in \mathcal{R}^{[\perp]} \cap (\mathcal{S}^0)^{[\perp]} = (\mathcal{R} + \mathcal{S}^0)^{[\perp]} = \mathcal{S}^{[\perp]}$. Luego, $x \in \mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}$.

3.→4. Consideremos el operador $T : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ dado por

$$Tx = y, \quad z = x + \widetilde{x} = y + \widetilde{y} \in \mathcal{S},\ x \in \mathcal{R},\ y \in \mathcal{M},\ \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathcal{S}^0.$$

Es inmediato que T es biyectivo. Dados $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$, sean $y_1 \in \mathcal{M}$ y $\widetilde{x}_1, \widetilde{y}_1 \in \mathcal{S}^0$ tales que $x_1 + \widetilde{x}_1 = y_1 + \widetilde{y}_1$, y sean $y_2 \in \mathcal{M}$ y $\widetilde{x}_2, \widetilde{y}_2 \in \mathcal{S}^0$ tales que $x_2 + \widetilde{x}_2 = y_2 + \widetilde{y}_2$. Luego, $Tx_1 = y_1$ y $Tx_2 = y_2$, y considerando que $\mathcal{R}\,[\perp]\,\mathcal{S}^0$ y $\mathcal{M}\,[\perp]\,\mathcal{S}^0$,

$$[\,x_1, x_2\,] = [\,x_1 + \widetilde{x}_1, x_2 + \widetilde{x}_2\,] = [\,y_1 + \widetilde{y}_1, y_2 + \widetilde{y}_2\,] = [\,y_1, y_2\,] = [\,Tx_1, Tx_2\,]\,.$$

En consecuencia, T es un isomorfismo isométrico entre $(\mathcal{R}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ y $(\mathcal{M}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$. Por el Teorema 2.64 y la Observación 2.45, $\mathcal{M}$ es entonces un subespacio regular de $\mathcal{K}$.

4.→3. Es trivial, considerando que $\mathcal{S}$ puede descomponerse como $\mathcal{S} = (\mathcal{S} \ominus \mathcal{S}^0)\,[\dot{+}]\,\mathcal{S}^0$, donde $\ominus$ denota la resta ortogonal con respecto al producto interno definido asociado a una descomposición canónica de $\mathcal{K}$.

3.→5. Dado que $\mathcal{S}$ es pseudo-regular, $\mathcal{S}^{[\perp]}$ también lo es. Luego, sea $\mathcal{T}$ un subespacio regular tal que $\mathcal{S}^{[\perp]} = \mathcal{T}\,[\dot{+}]\,\mathcal{S}^0$. El subespacio $\mathcal{N} = \mathcal{T}^{[\perp]}$ es regular, y satisface que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$. Además,

$$\mathcal{S}^0 = \left(\mathcal{T} + \mathcal{S}^0\right)^{[\perp]} \cap \mathcal{S}^{[\perp]} = \mathcal{N} \cap \left(\mathcal{S} + \mathcal{S}^{[\perp]}\right) \cap \mathcal{S}^{[\perp]} = \mathcal{N} \cap \mathcal{S}^{[\perp]}.$$

5.→1. Sea $x \in \mathcal{S}^{[\perp]}$ y escribamos $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \mathcal{N}$ y $x_2 \in \mathcal{N}^{[\perp]}$. Luego, $0 = [\,y, x\,] = [\,y, x_1\,]$ para todo $y \in \mathcal{S}$. Consecuentemente, $x_1 \in \mathcal{N} \cap \mathcal{S}^{[\perp]} = \mathcal{S}^0$, y así $\mathcal{S}^{[\perp]} \subseteq \mathcal{N}^{[\perp]} + \mathcal{S}^0$. Notando que $\mathcal{N}^{[\perp]} + \mathcal{S}^0 \subseteq \mathcal{S}^{[\perp]} + \mathcal{S}^0 = \mathcal{S}^{[\perp]}$, resulta que $\mathcal{S}^{[\perp]} = \mathcal{N}^{[\perp]} + \mathcal{S}^0$, y dado que $\mathcal{N}^{[\perp]}$ es no degenerado, $\mathcal{S}^{[\perp]} = \mathcal{N}^{[\perp]}\,[\dot{+}]\,\mathcal{S}^0$. Luego, considerando que $\mathcal{N}^{[\perp]}$ es regular y $\mathcal{S}^0 = (\mathcal{S}^{[\perp]})^0$, $\mathcal{S}^{[\perp]}$ es un subespacio pseudo-regular, y en consecuencia $\mathcal{S}$ es pseudo-regular.

1.↔6. Ver [96, Teorema 4.3]. □

Las proyecciones que se mencionan en el Teorema 2.69 son denominadas *proyecciones J-normales* (i.e. normales con respecto a $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$), y se estudian en profundidad en [96]. Dado un subespacio, $\mathcal{S} \neq \{\,0\,\}$ pseudo-regular, si $\mathcal{S}$ es degenerado entonces existen infinitas proyecciones J-normales sobre $\mathcal{S}$.

Por último, exponemos un resultado del que haremos uso a lo largo de toda la tesis.

Proposición 2.70. *Sean $(\mathcal{H}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{H}})$ y $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ dos espacios de Krein, y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ un operador de rango cerrado. Luego, $R(A)$ es un subespacio pseudo-regular de $\mathcal{K}$ si y sólo si $R(A^{\#}A)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.20, $R(A^{\#}A)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ si y sólo si $R(A) + N(A^{\#}) = R(A) + R(A)^{[\perp]}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$. □

2.2.7 Problema de cuadrados mínimos indefinidos

El problema de cuadrados mínimos indefinidos, o ILSP (“Indefinite Least Squares Problem”), ha sido exhaustivamente estudiado en dimensión finita, ver e.g. [26, 34, 73, 74, 75, 114, 130]. En [64, 65] se estudia su generalización a espacios de Krein infinito dimensionales. A continuación, exponemos algunos de los resultados desarrollados en estos últimos trabajos.

Por el resto de esta subsección, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{E}$ denotarán dos espacios de Krein (complejos), y $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ un operador acotado.

El problema de cuadrados mínimos indefinidos puede formularse de la siguiente manera:

Problema 0. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, analizar la existencia de*

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \,[\, Ax - z_0, Ax - z_0 \,] \,,$$

y si el mínimo existe, hallar el conjunto de argumentos donde se alcanza.

Definición 2.71. Denotamos con $ls(z_0)$ al conjunto de soluciones del Problema 0, para un dado $z_0 \in \mathcal{E}$.

La siguiente proposición establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones del Problema 0.

Proposición 2.72. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, el Problema 0 admite solución si y sólo si $R(A)$ es un subespacio no negativo de $\mathcal{E}$ y $z_0 \in R(A) + R(A)^{[\perp]}$.*

Demostración. Supongamos que existe $\widetilde{x} \in ls(z_0)$. Si $x \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}[\, A\widetilde{x} - z_0, A\widetilde{x} - z_0 \,] &\leq [\, A(\widetilde{x} + tx) - z_0, A(\widetilde{x} + tx) - z_0 \,] \\ &= [\, A\widetilde{x} - z_0, A\widetilde{x} - z_0 \,] + 2\alpha \operatorname{Re} [\, A\widetilde{x} - z_0, Ax \,] + \alpha^2 \,[\, Ax, Ax \,] \,.\end{aligned}$$

Luego, $2\alpha \operatorname{Re} [\, A\widetilde{x} - z_0, Ax \,] + \alpha^2 \,[\, Ax, Ax \,] \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y consecuentemente $[\, Ax, Ax \,] \geq 0$ y $\operatorname{Re} [\, A\widetilde{x} - z_0, Ax \,] = 0$. Siguiendo el mismo procedimiento con $i\alpha$ en lugar de α, obtenemos que $\operatorname{Im} [\, A\widetilde{x} - z_0, Ax \,] = 0$. Entonces, $[\, Ax, Ax \,] \geq 0$ y $[\, A\widetilde{x} - z_0, Ax \,] = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, i.e. $R(A)$ es no negativo y $A\widetilde{x} - z_0 \in R(A)^{[\perp]}$.

Recíprocamente, supongamos que $R(A)$ es no negativo, y que existe $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que $A\widetilde{x} - z_0 \in R(A)^{[\perp]}$. Luego, si $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}[\, A(\widetilde{x} + x) - z_0, A(\widetilde{x} + x) - z_0 \,] &= [\, A\widetilde{x} - z_0, A\widetilde{x} - z_0 \,] + [\, Ax, Ax \,] \\ &\geq [\, A\widetilde{x} - z_0, A\widetilde{x} - z_0 \,] \,.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\widetilde{x} \in ls(z_0)$. $\square$

Observación 2.73. Dado $z_0 \in \mathcal{E}$ tal que $ls(z_0) \neq \varnothing$, si $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ entonces $\widetilde{x} \in ls(z_0)$ si y sólo si $A\widetilde{x} - z_0 \in R(A)^{[\perp]}$.

Como corolario de la proposición anterior, podemos caracterizar las soluciones del Problema 0 (de existir) por medio de una ecuación normal.

Corolario 2.74. *Sea $R(A)$ un subespacio no negativo de $\mathcal{E}$. Dado $z_0 \in R(A) + R(A)^{[\perp]}$, si $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$, entonces $\widetilde{x} \in ls(z_0)$ si y sólo si $\widetilde{x}$ es una solución de la ecuación:*

$$A^{\#}Ax = A^{\#}z_0. \tag{2.9}$$

En este caso,

$$ls(z_0) = (A^{\#}A)^{\dagger}A^{\#}z_0 + N(A^{\#}A).$$

Demostración. De la Observación 2.73, $\widetilde{x} \in ls(z_0)$ si y sólo si $A\widetilde{x} - z_0 \in R(A)^{[\perp]}$, o equivalentemente, $A^{\#}(A\widetilde{x} - z_0) = 0$. Si suponemos que $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in ls(z_0)$, luego $A^{\#}A(\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2) = 0$, y entonces $ls(z_0)$ es una variedad afín paralela a $N(A^{\#}A)$. Finalmente, considerando que $A^{\#}z_0 \in R(A^{\#}A)$, $(A^{\#}A)^{\dagger}A^{\#}z_0$ está bien definido y satisface la ecuación normal (2.9), por lo que es una solución particular. □

Notemos que el operador $(A^{\#}A)^{\dagger}$ no es necesariamente acotado. De hecho, si A es un operador de rango cerrado, por la Proposición 2.70 el que $(A^{\#}A)^{\dagger}$ sea acotado es equivalente a que $R(A)$ sea un subespacio pseudo-regular. La siguiente proposición analiza este caso.

Proposición 2.75. *Si $R(A)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{E}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$ls(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \big(R(A)^0\big)^{[\perp]}$;*
2. *$R(A)$ es un subespacio no negativo y pseudo-regular.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia de la Proposición 2.72, y de que, por la Proposición 2.58, $\big(R(A)^0\big)^{[\perp]} = \overline{R(A) + R(A)^{[\perp]}}$. □

Bajo la hipótesis de que $R(A)$ es un subespacio no negativo y pseudo-regular, las soluciones del Problema 0 pueden caracterizarse en términos de proyecciones J-normales sobre $R(A)$.

Proposición 2.76. *Supongamos que $R(A)$ es un subespacio no negativo y pseudo-regular de $\mathcal{E}$, y sea $z_0 \in R(A)+R(A)^{[\perp]}$. Si $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$, entonces $\widetilde{x} \in ls(z_0)$ si y sólo si $A\widetilde{x}-Qz_0 \in R(A)^0$ donde $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ es cualquier proyección J-normal con $R(Q) = R(A)$.*

Demostración. Ver [65, Teorema 3.5]. □

Procedemos ahora a establecer las condiciones necesarias y suficientes para que el Problema 0 admita solución para todo $z_0 \in \mathcal{E}$.

Proposición 2.77. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$ls(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$;*
2. *$R(A)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $\mathcal{E}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.72, $ls(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$ si y sólo si $R(A)$ es un subespacio no negativo y satisface que $\mathcal{E} = R(A) + R(A)^{[\perp]}$, i.e. $R(A)$ es regular. De la Proposición 2.66, estas condiciones son equivalentes a que $R(A)$ sea cerrado y uniformemente positivo. □

Bajo las condiciones de esta proposición las soluciones del Problema 0 pueden describirse mediante la proyección J-autoadjunta sobre $R(A)$.

Proposición 2.78. *Supongamos que $R(A)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo $\mathcal{E}$, y sea $z_0 \in \mathcal{E}$. Si $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$, entonces $\widetilde{x} \in ls(z_0)$ si y sólo si $A\widetilde{x} = Qz_0$ donde $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ es la proyección J-autoadjunta sobre $R(A)$.*

Demostración. Por el Corolario 2.74, $\widetilde{x} \in ls(z_0)$ si y sólo si $A^{\#}A\widetilde{x} = A^{\#}z_0$. Dado que $N(A^{\#}) = R(A)^{[\perp]} = N(Q)$, $A^{\#}z_0 = A^{\#}Qz_0$. Luego, $\widetilde{x} \in ls(z_0)$ si y sólo si $A^{\#}(A\widetilde{x} - Qz) = 0$, o equivalentemente $A\widetilde{x} - Qz_0 \in N(A^{\#}) \cap R(A) = \{0\}$, donde hemos considerado que $R(A)$ es un subespacio no degenerado. □

2.2.8 Splines indefinidos con restricción lineal

Aquí procedemos a analizar el problema de interpolación indefinida formulado y estudiado en [63], que llamaremos *problema de interpolación indefinida con restricción* *lineal*. Recordemos que este problema está relacionado con el problema de interpolación abstracta indefinida, en cuanto a que este último se reduce al primero si el operador $V^{\#}V$ no es indefinido.

De aquí en más, $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert (complejo y separable), $\mathcal{K}$ y $\mathcal{E}$ dos espacios de Krein (complejos y separables), y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ dos operadores acotados y sobreyectivos.

El problema de interpolación indefinida con restricción lineal se plantea de la siguiente manera:

Problema 0'. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, analizar la existencia de*

$$\begin{array}{cc} \min\limits_{x \in \mathcal{H}} & [\,Tx, Tx\,], \\ \textit{sujeto a} & Vx = z_0, \end{array}$$

y si el mínimo existe, hallar el conjunto de argumentos donde se alcanza.

Definición 2.79. Un vector $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ es un *spline abstracto indefinido, o (T, V)-interpolante, con restricción lineal* de $z_0 \in \mathcal{E}$, si es una solución del Problema 0'. El conjunto de (T, V)-interpolantes con restricción lineal de z_0 es denotado con $spl(z_0)$.

Definición 2.80. Denotaremos con $\mathcal{A}_{spl}$ al conjunto de puntos $z_0 \in \mathcal{E}$ tales que el Problema 0' admite solución, i.e.

$$\mathcal{A}_{spl} = \Big\{ z_0 \in \mathcal{E} \;:\; spl(z_0) \neq \varnothing \Big\}.$$

Si consideramos un vector $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$, luego, para $x \in \mathcal{H}$, $Vx = z_0$ si y sólo si $x \in x_0 + N(V)$. Entonces, el Problema 0' puede formularse equivalentemente de la siguiente manera.

Problema 0''. *Dados $z_0 \in \mathcal{E}$, y $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$, analizar la existencia de*

$$\min_{y \in N(V)} \; [\,T(x_0 + y), T(x_0 + y)\,],$$

y si el mínimo existe, hallar el conjunto de argumentos donde se alcanza.

Dado $z_0 \in \mathcal{A}_{spl}$, si $x_0 \in \mathcal{H}$ es cualquier vector tal que $Vx_0 = z_0$, entonces $spl(z_0) \subseteq x_0 + N(V)$.

La siguiente proposición establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones del Problema 0', mostrando que éste es de hecho un problema de cuadrados mínimos indefinidos.

Proposición 2.81. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, $spl(z_0) \neq \varnothing$ si y sólo si $T(N(V))$ es un subespacio no negativo de $\mathcal{K}$ y $z_0 \in V\big(T^{\#}T(N(V))^{\perp}\big)$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$. Dado que

$$\min_{y \in N(V)} [\,T(x_0+y), T(x_0+y)\,] = \min_{x \in \mathcal{H}} \big[\,Tx_0 + TP_{N(V)}x, Tx_0 + TP_{N(V)}x\,\big], \quad (2.10)$$

por la Proposición 2.72 $spl(z_0) \neq \varnothing$ si y sólo si $T(N(V)) = R(TP_{N(V)})$ es no negativo y $Tx_0 \in T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}$. Considerando que T es sobreyectivo y que por (2.6) $T^{-1}\big(T(N(V))^{[\perp]}\big) = T^{\#}T(N(V))^{\perp}$, esta última condición es equivalente a que

$$z_0 \in V\Big(T^{-1}\Big(T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}\Big)\Big) = V\big(T^{\#}T(N(V))^{\perp}\big)$$

□

Observación 2.82. Si $T(N(V))$ es un subespacio no negativo de $\mathcal{K}$, entonces

$$\mathcal{A}_{spl} = V\big(T^{\#}T(N(V))^{\perp}\big).$$

Como un corolario inmediato, describimos a continuación el conjunto $spl(z_0)$ para un dado $z_0 \in \mathcal{A}_{spl}$ como una variedad afín. Para esto, denotemos el conjunto

$$\mathcal{N}_0 := N(V) \cap T^{\#}T(N(V))^{\perp}.$$

Corolario 2.83. *Supongamos que $T(N(V))$ es un subespacio no negativo de $\mathcal{K}$. Dado $z_0 \in V\big(T^{\#}T(N(V))^{\perp}\big)$, si $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ es tal que $V\widetilde{x} = z_0$, entonces $\widetilde{x} \in spl(z_0)$ si y sólo si $\widetilde{x} \in T^{\#}T(N(V))^{\perp}$. En este caso,*

$$spl(z_0) = \widetilde{x} + \mathcal{N}_0.$$

Demostración. Considerando (2.10), por la Observación 2.73 $\widetilde{x} \in spl(z_0)$ si y sólo si $T\widetilde{x} \in T(N(V))^{[\perp]}$, o equivalentemente, $\widetilde{x} \in T^{\#}T(N(V))^{\perp}$. Fijemos un $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$. Si $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in spl(z_0)$, entonces $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ y además existen $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2 \in N(V)$ tales que $\widetilde{x}_1 = x_0 + \widetilde{y}_1$ y $\widetilde{x}_2 = x_0 + \widetilde{y}_2$. Consecuentemente $\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2 = \widetilde{y}_1 - \widetilde{y}_2 \in N(V) \cap T^{\#}T(N(V))^{\perp} = \mathcal{N}_0$, y así $spl(z_0)$ es una variedad afín paralela a $\mathcal{N}_0$. □

Observación 2.84. Si $z_0 \in \mathcal{E}$ es tal que $spl(z_0) \neq \varnothing$, del anterior corolario es inmediato que el conjunto de soluciones $spl(z_0)$ puede también describirse como

$$spl(z_0) = \big(V^\dagger z_0 + N(V)\big) \cap T^\# T(N(V))^\perp.$$

El siguiente lema caracteriza las propiedades de $T(N(V))$ como subespacio de $\mathcal{K}$. Este resultado no sólo es útil para estudiar el Problema 0', sino que se usará para el análisis de los problemas de interpolación y suavizado indefinidos en los capítulos posteriores.

Lema 2.85. *Se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $T(N(V))^\circ = T(\mathcal{N}_0)$. *Además,*

$$T(N(V)) = T(\mathcal{N}_0)\,[\dot{+}]\; T\big(N(V) \ominus \mathcal{N}_0\big); \tag{2.11}$$

2. $T(N(V))$ *es no degenerado si y sólo si* $\mathcal{N}_0 = N(V) \cap N(T)$*;*
3. $T(N(V))$ *es pseudo-regular si y sólo si* $N(V) + T^\# T(N(V))^\perp$ *es un subespacio cerrado de* $\mathcal{H}$*. En este caso,* $T\big(N(V) \ominus \mathcal{N}_0\big)$ *es regular;*
4. $T(N(V))$ *es regular si y sólo si* $\mathcal{H} = N(V) + T^\# T(N(V))^\perp$*;*
5. $T(N(V))$ *es cerrado y* $T^\# T(N(V))^\perp = N(T)$ *si y sólo si* $\mathcal{H} = N(V) + N(T)$*.*

Demostración. La mayoría de las condiciones del enunciado pueden derivarse del hecho de que

$$T^\# T(N(V))^\perp = T^{-1}\left(T(N(V))^{[\perp]}\right), \tag{2.12}$$

que es una consecuencia de (2.6).

1. Si $y \in T(N(V))^\circ$, existe $x \in N(V)$ tal que $y = Tx \in T(N(V)^{[\perp]})$. Luego, (2.12) implica que $x \in \mathcal{N}_0$ y $y = Tx \in T(\mathcal{N}_0)$. La otra inclusión es también una consecuencia de (2.12).

Por otro lado, dado que $N(V) = \mathcal{N}_0 \oplus (N(V) \ominus \mathcal{N}_0)$ es fácil ver que $T(N(V)) = T(\mathcal{N}_0) + T\big(N(V) \ominus \mathcal{N}_0\big)$. Además, estos subespacios son ortogonales porque $T(\mathcal{N}_0) \subseteq T(N(V))^{[\perp]}$ y $T\big(N(V) \ominus \mathcal{N}_0\big) \subseteq T(N(V))$. Resta probar que la suma es directa, pero si $y \in T(\mathcal{N}_0) \cap T\big(N(V) \ominus \mathcal{N}_0\big)$, entonces existen $x_1 \in \mathcal{N}_0$ y $x_2 \in N(V) \ominus \mathcal{N}_0$ tales que $Tx_1 = y = Tx_2$. Luego, $x_2 - x_1 \in N(V) \cap N(T) \subseteq \mathcal{N}_0$ y $x_2 = (x_2 - x_1) + x_1 \in \mathcal{N}_0 \cap (N(V) \ominus \mathcal{N}_0) = \{0\}$.

2. Observemos que $N(V) \cap N(T) \subseteq \mathcal{N}_0$. Por otra parte, $T(N(V))$ es no degenerado si y sólo si $T(\mathcal{N}_0) = \{0\}$, o equivalentemente, si $\mathcal{N}_0 \subseteq N(T)$. Esto completa la demostración.

3. Supongamos que $T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}$ es cerrado en $\mathcal{K}$. Dado que T es acotado,

$$\begin{aligned} T^{-1}\left(T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}\right) &= T^{-1}\left(T(N(V))\right) + T^{-1}\left(T(N(V))^{[\perp]}\right) = \\ &= (N(V) + N(T)) + T^{\#}T(N(V))^{\perp} \\ &= N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp} \end{aligned} \tag{2.13}$$

es también un subespacio cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ es cerrado en $\mathcal{H}$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}$ tal que $y_n \to y$, con $y \in \mathcal{K}$. Dado que T es sobreyectivo, existe $x \in N(T)^{\perp}$ tal que $Tx = y$. Además, por (2.13), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ tal que $Tx_n = y_n$. Luego, como $T^{\dagger}$ es acotado,

$$P_{N(T)^{\perp}} x_n = T^{\dagger}Tx_n = T^{\dagger}y_n \to T^{\dagger}y = T^{\dagger}Tx = x. \tag{2.14}$$

En vista de que $N(T) \subseteq T^{\#}T(N(V))^{\perp}$, es inmediato que $N(T) + (N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp})$ es un subespacio cerrado. Equivalentemente, $P_{N(T)^{\perp}}(N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp})$ es cerrado en $\mathcal{H}$, por la Proposición 2.20. De (2.14), se tiene que $x \in P_{N(T)^{\perp}}(N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp})$. Entonces, existe $z \in N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ tal que $x = P_{N(T)^{\perp}} z$. Así, $y = Tx = TP_{N(T)^{\perp}} z = Tz \in T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}$, ver (2.13). Luego, $T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}$ es cerrado en $\mathcal{K}$.

Resta mostrar que si $T(N(V))$ es pseudo-regular, entonces $T(N(V) \ominus \mathcal{N}_0)$ es regular. Dado que $T(\mathcal{N}_0) = T(N(V))^{\circ}$ y considerando (2.11), es suficiente con probar que $T(N(V) \ominus \mathcal{N}_0)$ es cerrado (ver la Proposición 2.69).

Por la Proposición 2.20, $T(N(V) \ominus \mathcal{N}_0)$ es cerrado si y sólo si $(N(V) \ominus \mathcal{N}_0) + N(T)$ es cerrado. Por (2.13), $N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp} = (N(V) \ominus \mathcal{N}_0) \dotplus T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ es cerrado. Dado que $N(T) \subseteq T^{\#}T(N(V))^{\perp}$, $(N(V) \ominus \mathcal{N}_0) + N(T)$ es también cerrado, completando así la prueba.

4. Si $T(N(V))$ es regular, entonces (2.13) implica que

$$\mathcal{H} = T^{-1}(\mathcal{K}) = T^{-1}\left(T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]}\right) = N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp}.$$

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{H} = N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp}$. Dado que T es sobreyectivo,

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= T\left(N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp}\right) = T(N(V)) + T\left(T^{-1}\left(T(N(V))^{[\perp]}\right)\right)\\ &= T(N(V)) + T(N(V))^{[\perp]},\end{aligned}$$

i.e. $T(N(V))$ es regular.

5. Supongamos que $T(N(V))$ es cerrado y que $T^{\#}T(N(V)))^{\perp} = N(T)$. Dado que $T^{-1}\left(T(N(V))^{[\perp]}\right) = T^{\#}T(N(V))^{\perp} = N(T)$ y T es sobreyectivo, $T(N(V))^{[\perp]} = T(N(T)) = \{\,0\,\}$. Luego, $\mathcal{K} = \overline{T(N(V))} = T(N(V))$ y consecuentemente $\mathcal{H} = N(V) + N(T)$.

Recíprocamente, si $\mathcal{H} = N(V) + N(T)$, entonces $T(N(V)) = \mathcal{K}$ (y es un subespacio cerrado). Luego, $T(N(V))^{[\perp]} = \{\,0\,\}$ y en consecuencia

$$T^{\#}T(N(V))^{\perp} = T^{-1}\left(T(N(V))^{[\perp]}\right) = N(T).$$

□

Haciendo uso del lema anterior, exponemos las condiciones necesarias y suficientes para que el Problema 0' admita solución para todo $z_0 \in \mathcal{E}$

Proposición 2.86. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $spl(z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$*;*
2. $T(N(V))$ *es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de* $\mathcal{K}$*.*

En este caso,

$$spl(z_0) = (I - Q)V^{\dagger}z_0 + N(T) \cap N(V),$$

donde $Q = P_{N(V)//T^{\#}T(N(V))^{\perp}\ominus N(V)}$.

Demostración. De la Proposición 2.81 se tiene que $spl(z_0) \neq \varnothing$ si y sólo si $T(N(V))$ es no negativo $z_0 \in V\big(T^{\#}T(N(V))^{\perp}\big)$. Por otro lado, dado que V es sobreyectivo, $V\big(T^{\#}T(N(V))^{\perp}\big) = \mathcal{E}$ si y sólo si $\mathcal{H} = N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp}$, que, de acuerdo al Lema 2.85, es equivalente a que $T(N(V))$ sea regular. Así, la equivalencia queda probada considerando que $T(N(V))$ es cerrado y uniformemente positivo si y sólo si es regular y no negativo (ver la Proposición 2.66).

Por último, observemos que $(I-Q)V^{\dagger}z_0 \in T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ y, considerando que $VV^{\dagger} = I$, satisface que $V(I-Q)V^{\dagger}z_0 = z_0$. El Corolario 2.83 entonces afirma que $(I-Q)V^{\dagger}z_0 \in spl(z_0)$. Además, dado que $T(N(V))$ es no degenerado, por el Lema 2.85 $\mathcal{N}_0 = N(T) \cap N(V)$. □

3

Sobre el operador de regularización de Tikhonov

Contenido

3.1 Análisis con el parámetro de regularización fijo

En esta sección presentamos formalmente el operador de regularización. Sea $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espacio de Hilbert (complejo y separable), $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{E}})$ dos espacios de Krein (complejos y separables), y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ dos operadores acotados y sobreyectivos tales que $T^\# T$ y $V^\# V$ son operadores indefinidos en $\mathcal{H}$.

Definición 3.1. Se define el *operador de regularización de Tikhonov* como el operador acotado $L : \mathcal{H} \to \mathcal{K} \times \mathcal{E}$ dado por

$$Lx = (Tx, Vx), \quad x \in \mathcal{H}.$$

Con este operador, podemos formular el diagrama siguiente, característico de los problemas de interpolación y suavizado:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "V"] \arrow[dr, "L"] & \mathcal{K} \\ \mathcal{E} & \mathcal{K} \times \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

En primer lugar, dotaremos al espacio $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$ con una estructura de espacio de Krein. Dado un $\rho \in \mathbb{R}$ fijo, definamos el siguiente producto interno indefinido sobre $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$:

$$[\,(y, z), (y', z')\,]_\rho := [\,y, y'\,]_{\mathcal{K}} + \rho\,[\,z, z'\,]_{\mathcal{E}}\,, \qquad y, y' \in \mathcal{K},\ z, z' \in \mathcal{E}. \tag{3.1}$$

Es fácil ver que, si $\mathcal{E} \neq \{\,0\,\}$, el espacio $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$ dotado con este producto interno es un espacio de Krein si y sólo si $\rho \neq 0$. En efecto, consideremos las simetrías fundamentales $J_{\mathcal{K}}$ y $J_{\mathcal{E}}$ asociadas a ciertas descomposiciones canónicas de los espacios de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{E}})$, respectivamente, y los espacios de Hilbert asociados $(\mathcal{K}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{E}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{E}})$. Si consideramos el producto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\rho$ dado por

$$\langle\,(y, z), (y', z')\,\rangle_\rho = \langle\,y, y'\,\rangle_{\mathcal{K}} + |\rho|\,\langle\,z, z'\,\rangle_{\mathcal{E}}\,, \quad (y, z), (y', z') \in \mathcal{K} \times \mathcal{E},$$

entonces el operador $J_\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{K} \times \mathcal{E})$ definido como

$$J_\rho(y, z) = (J_{\mathcal{K}} y, \operatorname{sgn}(\rho)\ J_{\mathcal{E}} z), \quad (y, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}, \tag{3.2}$$

es una simetría fundamental asociada a $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$. Por otro lado, si $\rho = 0$ se tiene que el espacio $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$ es degenerado ya que $\mathcal{E}$ es $[\cdot\,,\,\cdot]_\rho$-ortogonal al espacio completo $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$.

Por el resto de esta sección, supondremos que $\rho \neq 0$ se encuentra fijo, y con este valor del parámetro fijado consideraremos el espacio $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot\,,\,\cdot]_\rho)$.

Mostramos dos propiedades elementales en el siguiente lema.

Lema 3.2. *Se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $L^\#(y,z) = T^\# y + \rho V^\# z, \quad (y,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E};$ (3.3)
2. $R(L)^\circ = L(N(L^\# L))$.

Demostración.

1. Dado $(y,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$, se cumple que

$$\begin{aligned}[\,Lx,(y,z)\,]_\rho &= [\,Tx,y\,]_\mathcal{K} + \rho\,[\,Vx,z\,]_\mathcal{E} = \left\langle\, x, T^\# y \,\right\rangle + \rho \left\langle\, x, V^\# y \,\right\rangle \\ &= \left\langle\, x, T^\# y + \rho V^\# z \,\right\rangle,\end{aligned}$$

i.e. $L^\#(y,z) = T^\# y + \rho V^\# z$.

2. La inclusión $L(N(L^\# L)) \subseteq R(L) \cap N(L^\#) = R(L)^\circ$ es inmediata. Para obtener la otra, es suficiente el aplicar L a ambos lados de la inclusión $L^{-1}(N(L^\#)) \subseteq N(L^\# L)$. □

Notemos que cada uno de los tres símbolos $\#$ en (3.3) denota el adjunto del operador con respecto a su correspondiente producto interno, i.e. $L^\# : \mathcal{K} \times \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ es el operador adjunto de L con respecto a $[\cdot\,,\,\cdot]_\rho$, mientras que $T^\# : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ y $V^\# : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ denotan los adjuntos de T y V con respecto a los productos $[\cdot\,,\,\cdot]_\mathcal{K}$ y $[\cdot\,,\,\cdot]_\mathcal{E}$, respectivamente.

Del Lema 3.2 es inmediato que

$$L^\# L = T^\# T + \rho V^\# V.$$

Efectivamente, dado $x \in \mathcal{H}$,

$$L^\# Lx = L^\#(Tx, Vx) = T^\# Tx + \rho V^\# Vx = (T^\# T + \rho V^\# V)x.$$

Este operador cumplirá un rol fundamental en los Capítulos 4 y 5, para el estudio de los problemas de suavizado e interpolación indefinidos, respectivamente. Además, a lo largo de este capítulo el análisis de las propiedades de $N(L^\# L)$ y $R(L^\# L)$ permitirá estudiar las características de $R(L)$.

La siguiente proposición analiza en detalle las diversas propiedades de $R(L)$ como subespacio del espacio de Krein $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, en relación a los operadores T y V. Denotaremos con $\mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ al conjunto de operadores semidefinidos positivos en $\mathcal{H}$.

Proposición 3.3. *Se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $R(L)$ *es cerrado si y sólo si* $N(T) + N(V)$ *es cerrado;*
2. $R(L)$ *es no negativo si y sólo si* $L^\# L \in L(\mathcal{H})^+$*;*
3. $R(L)$ *es no degenerado si y sólo si* $N(L^\# L) = N(T) \cap N(V)$*;*
4. $R(L)$ *es pseudo-regular si y sólo si* $N(T) + N(V)$ *y* $R(L^\# L)$ *son subespacios cerrados;*
5. $R(L)$ *es regular si y sólo si* $R(L^\# L) = R(T^\# T) + R(V^\# V)$*;*
6. $R(L) = \mathcal{K} \times \mathcal{E}$ *si y sólo si* $\mathcal{H} = N(T) + N(V)$.

Demostración.

1. Por la Proposición 2.19, $N(T) + N(V)$ es cerrado si y sólo si $N(T)^\perp + N(V)^\perp$ es cerrado. Luego, dado que $R(L)$ es cerrado si y sólo si $R(L^\#)$ es cerrado, el resultado se sigue de que $R(L^\#) = N(T)^\perp + N(V)^\perp$.

2. Notemos que $R(L)$ es no negativo si y sólo si

$$\left\langle L^\# Lx, x \right\rangle = [\, Lx, Lx \,] \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

i.e. $T^\# T + \rho V^\# V = L^\# L \in L(\mathcal{H})^+$.

3. Por el Lema 3.2, $R(L)^\circ = L(N(L^\# L))$. Entonces, $R(L)$ es no degenerado si y sólo si $N(L^\# L) \subseteq N(L) = N(T) \cap N(V)$.

4. En primer lugar, observemos que $R(L)$ es cerrado si y sólo si $N(T) + N(V)$ es cerrado en $\mathcal{H}$. Por otro lado, si L es un operador de rango cerrado, la pseudo-regularidad de $R(L)$ es equivalente a que $R(L^\# L)$ sea cerrado (ver la Proposición 2.70).

5. Observemos que $R(L)$ es regular si y sólo si para cada $(y, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$ existe (un único) $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Lx_0 - (y, z) \in R(L)^{[\perp]}$, o equivalentemente,

$$L^\#(y, z) = L^\# Lx_0 = (T^\# T + \rho V^\# V)x_0.$$

Dado que T y V son sobreyectivos, para cada $(y,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$ existen $u, w \in \mathcal{H}$ tales que $y = Tu$ y $z = Vw$. Entonces, $R(L)$ es regular si y sólo si para cada $u, w \in \mathcal{H}$ existe $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que

$$T^{\#}Tu + \rho V^{\#}Vw = L^{\#}(Tu, Vw) = (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x_0,$$

i.e. $R(L)$ es regular si y sólo si $R(T^{\#}T) + R(V^{\#}V) \subseteq R(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)$.

6. Supongamos que $R(L) = \mathcal{K} \times \mathcal{E}$, y sea $(u, 0) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$. Luego, existe $y \in \mathcal{H}$ tal que $(Ty, 0) = Ly = (u, 0)$. Consecuentemente, $y \in N(V)$ y dado que $u \in \mathcal{K}$ es arbitrario se sigue que $\mathcal{K} = T(N(V))$. Entonces, $\mathcal{H} = T^{-1}\left(T(N(V))\right) = N(T) + N(V)$.

Recíprocamente, si $\mathcal{H} = N(T) + N(V)$, entonces $N(T)^{\perp} \cap N(V)^{\perp} = \{\,0\,\}$. Sea $(u, w) \in N(L^{\#})$, luego

$$L^{\#}(u, w) = T^{\#}u + \rho V^{\#}w = 0.$$

Dado que $T^{\#}$ y $V^{\#}$ son inyectivos, se sigue que $T^{\#}u = -\rho V^{\#}w \in R(T^{\#}) \cap R(V^{\#}) = N(T)^{\perp} \cap N(V)^{\perp} = \{\,0\,\}$, y consecuentemente $(u, w) = (0, 0)$ y $N(L^{\#}) = \{\,0\,\}$. Entonces, $\overline{R(L)} = \mathcal{K} \times \mathcal{E}$. Dado que $\mathcal{K} = T(\mathcal{H}) = T(N(V))$, $T(N(V))$ es cerrado. Ahora consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ tal que $Lx_n \to (y, z)$ con $(y, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$; y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos las sucesiones $u_n = P_{N(V)^{\perp}}x_n$ y $v_n = P_{N(V)}x_n$. Entonces, $Vu_n = Vx_n = z_n \to z$ y, dado que $u_n \in N(V)^{\perp}$, $u_n = V^{\dagger}Vu_n \to V^{\dagger}z$. Luego, $Tu_n \to TV^{\dagger}z$ y

$$Tv_n = Tx_n - Tu_n \to y - TV^{\dagger}z.$$

El que $T(N(V))$ sea cerrado implica que existe $u \in N(V)$ tal que $y - TV^{\dagger}z = Uu$. Por ende, $T(V^{\dagger}z + u) = y$ y $V(V^{\dagger}z + u) = z + Vu = z$. Así, $L(V^{\dagger}z + u) = (y, z)$ y el rango de L es cerrado, completando la demostración. □

Para concluir esta sección, exponemos un lema de carácter técnico.

Lema 3.4. *Sea $(y, z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$. Entonces,*

$$(y, z) \in \overline{R(L) + R(L)^{[\perp]}} \quad \textit{si y sólo si} \quad z - VT^{\dagger}y \in V(N(L^{\#}L))^{[\perp]}.$$

Demostración. Haciendo uso de que $T^{\#}$ es inyectivo y $(T^{\#})^{\dagger} = (T^{\dagger})^{\#}$, es fácil ver que $(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x = 0$ si y sólo si $Tx = -\rho(T^{\dagger})^{\#}V^{\#}Vx$. Entonces,

$$R(L)^{\circ} = \left\{\, (-\rho(T^{\dagger})^{\#}V^{\#}Vx, Vx) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E} :\ x \in N(L^{\#}L) \,\right\}.$$

Ahora, dado que $\overline{R(L)+R(L)^{[\perp]}} = (R(L)^\circ)^{[\perp]}$, esta descripción de $R(L)^\circ$ implica que $(y,z) \in \overline{R(L)+R(L)^{[\perp]}}$ si y sólo si

$$\big[\,(y,z),(-\rho(T^\dagger)^\# V^\# Vx, Vx)\,\big]_\rho = 0 \quad \text{para todo } x \in N(L^\# L).$$

Pero

$$\begin{aligned}\big[\,(y,z),(-\rho(T^\dagger)^\# V^\# Vx, Vx)\,\big]_\rho &= \big[\,y,-\rho(T^\dagger)^\# V^\# Vx\,\big]_{\mathcal{K}} + \rho\,[\,z,Vx\,]_{\mathcal{E}} \\ &= \rho\,\big[\,z - VT^\dagger y, Vx\,\big]_{\mathcal{E}}\,.\end{aligned}$$

Luego, $(y,z) \in \overline{R(L)+R(L)^{[\perp]}}$ si y sólo si $\big[\,z - VT^\dagger y, Vx\,\big]_{\mathcal{E}} = 0$ para todo $x \in N(L^\# L)$. Así, la afirmación queda probada. □

3.2 Variando el parámetro de regularización

Procederemos ahora a analizar las características del operador L en relación a la familia de espacios de Krein en el espacio producto $\mathcal{K}\times\mathcal{E}$ que se obtiene al variar el parámetro de regularización, i.e. para cada $\rho \in \mathbb{R}\setminus\{\,0\,\}$ el espacio $(\mathcal{K}\times\mathcal{E},[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ es un espacio de Krein diferente, a raíz de (3.1). Por lo tanto, de ahora en más ya no consideraremos a ρ como un parámetro fijo.

Si bien, como hemos mencionado en la Introducción, nos interesarán sólo los valores de ρ tales que $R(L)$ sea un subespacio no negativo de $(\mathcal{K}\times\mathcal{E},[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, la siguiente proposición no se acota a éstos.

Proposición 3.5. *Si $R(L)$ es un subespacio cerrado de $(\mathcal{K}\times\mathcal{E},[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ para algún $\rho_0 \in \mathbb{R}\setminus\{\,0\,\}$, entonces $R(L)$ es un subespacio cerrado de $(\mathcal{K}\times\mathcal{E},[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para cada $\rho \in \mathbb{R}\setminus\{\,0\,\}$.*

Demostración. El resultado sigue inmediatamente del hecho de que, de la Proposición 3.3, para cualquier $\rho \neq 0$, $R(L)$ es un subespacio cerrado de $(\mathcal{K}\times\mathcal{E},[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ si y sólo si $N(T)+N(V)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. □

A continuación, introducimos el intervalo de valores *admisibles* para el parámetro de regularización, en cuanto a los problemas de interpolación y suavizado se refiere. Recordemos la definición del conjunto $\mathcal{C}_V$ dada en 1.13:

$$\mathcal{C}_V = \big\{\, x \in \mathcal{H} \,:\, [\,Vx, Vx\,] = 0 \,\big\}.$$

En los Capítulos 4 y 5 se observará que una condición necesaria para la existencia de splines indefinidos es que T transforme el conjunto $\mathcal{C}_V$ en vectores no negativos del espacio de Krein $\mathcal{K}$. Los siguientes dos resultados pueden interpretarse como otra versión del Lema-S (o del Lema de Farkas), ver [117, 152], y son una consecuencia del Lema 1.35 y el Corolario 1.36 en [14, Capítulo 1, §1].

Antes de exponer los resultados, definamos los conjuntos

$$\mathcal{P}^+(V) := \{\, x \in \mathcal{H} \,:\, [\,Vx, Vx\,] > 0 \,\} \quad , \quad \mathcal{P}^-(V) := \{\, x \in \mathcal{H} \,:\, [\,Vx, Vx\,] < 0 \,\},$$

y notemos que $\mathcal{P}^+(V) \cup \mathcal{P}^-(V) \cup \mathcal{C}_V = \mathcal{H}$. Debemos observar que la siguiente proposición no es válida si $V^\# V$ no es indefinido.

Proposición 3.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T(\mathcal{C}_V)$ *es un conjunto no negativo de* $\mathcal{K}$*;*
2. *existe* $\rho \in \mathbb{R}$ *tal que* $T^\# T + \rho V^\# V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$.

Demostración. Por el Lema 2.33, si $T(\mathcal{C}_V)$ es no negativo, entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$[\,Tx, Tx\,]_{\mathcal{K}} \geq \mu\, [\,Vx, Vx\,]_{\mathcal{E}} \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

o equivalentemente, $T^\# T - \mu V^\# V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$. Luego, 2. se cumple considerando $\rho = -\mu$.

Recíprocamente, supongamos que $T^\# T + \rho V^\# V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ para algún $\rho \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $y \in \mathcal{C}_V$,

$$[\,Ty, Ty\,]_{\mathcal{K}} = [\,Ty, Ty\,]_{\mathcal{K}} + \rho\, [\,Vy, Vy\,]_{\mathcal{E}} = \big\langle\, (T^\# T + \rho V^\# V)y, y \,\big\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Consecuentemente, $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo. □

Corolario 3.7. *Si* $T(\mathcal{C}_V)$ *es no negativo, entonces*

$$\rho_- := -\inf_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]} < +\infty \quad , \quad \rho_+ := -\sup_{x \in \mathcal{P}^-(V)} \frac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]} > -\infty, \tag{3.4}$$

y $\rho_- \leq \rho_+$.

Además, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$;
2. $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.

Demostración. De la Proposición 3.6, tenemos que existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$. Es decir,

$$0 \leq \left\langle (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x, x \right\rangle = [\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,], \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \tag{3.5}$$

Consideremos ahora un punto $x_+ \in \mathcal{P}^+(V)$, i.e. $[\,Vx_+, Vx_+\,] > 0$. Entonces, de (3.5)

$$-\rho \leq \frac{[\,Tx_+, Tx_+\,]}{[\,Vx_+, Vx_+\,]}.$$

En consecuencia

$$-\,\rho_- = \inf_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]} \geq -\rho > -\infty. \tag{3.6}$$

Análogamente, si consideramos un punto $x_- \in \mathcal{P}^-(V)$ obtenemos que

$$-\,\rho_+ = \sup_{x \in \mathcal{P}^-(V)} \frac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]} \leq -\rho < +\infty. \tag{3.7}$$

Finalmente, de (3.6) y (3.7) resulta que $\rho_- \leq \rho \leq \rho_+$.

Para completar la prueba, supongamos que $\mu \in [\rho_-, \rho_+]$. Notemos que, de (3.5), $T^{\#}T + \mu V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ si y sólo si $[\,Tx, Tx\,] \geq -\mu\,[\,Vx, Vx\,]$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Ahora, supongamos que existe $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $[\,Tx_0, Tx_0\,] < -\mu\,[\,Vx_0, Vx_0\,]$. Si $x_0 \in \mathcal{P}^+(V)$, entonces

$$-\rho_- = \inf_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]} \leq \frac{[\,Tx_0, Tx_0\,]}{[\,Vx_0, Vx_0\,]} < -\mu,$$

que es una contradicción ya que $\rho_- \leq \mu$, Análogamente obtenemos una contradicción si suponemos que $x_0 \in \mathcal{P}^-(V)$. Por último, si $x_0 \in \mathcal{C}_V$ resulta que $[\,Tx_0, Tx_0\,] < 0$, que es absurdo ya que $T(\mathcal{C}_V)$ es no negativo. □

Dado que $T^{\#}T$ es indefinido, se tiene que, si $T(\mathcal{C}_V)$ es no negativo, entonces $0 \notin [\rho_-, \rho_+]$; es decir ó $0 < \rho_- \leq \rho_+$, o $\rho_- \leq \rho_+ < 0$. Como se ha mencionado, esto simplificará la escritura a lo largo de este trabajo ya que evita el que debamos contemplar el caso en que $\rho = 0$ es un valor admisible, caso en que $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ no es un espacio de Krein, que requeriría consideraciones ad hoc. De todas formas, los resultados pueden fácilmente generalizarse para el caso en que $T^{\#}T$ es un operador semidefinido positivo.

De aquí en más, por el resto de este capítulo supondremos que $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$:

Hipótesis 3.8. *$T^{\#}T$ y $V^{\#}V$ son operadores indefinidos en $\mathcal{H}$ y*

$$T(\mathcal{C}_V) \textit{ es un conjunto no negativo de } \mathcal{K}.$$

Observación 3.9. Una consecuencia inmediata de las Hipótesis 4.5 es que $R(L)$ es un subconjunto propio de $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$. En efecto, si suponemos que $R(L) = \mathcal{K} \times \mathcal{E}$, de la Proposición 3.3 $\mathcal{H} = N(T) + N(V)$. Luego, $\mathcal{K} = T(N(V)) = T(\mathcal{C}_V)$ es no negativo (de hecho, $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ es un espacio de Hilbert), que contradice la suposición de que $T^{\#}T$ es un operador indefinido.

El Corolario 3.7 puede expresarse en términos de $R(L)$ como muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.10. *Si $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$R(L)$ es un subespacio no negativo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$;*
2. *$\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.*

Demostración. La equivalencia es consecuencia del Corolario 3.7, y de que la Proposición 3.3 establece que, dado un $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$, $R(L)$ es un subespacio no negativo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ si y sólo si $T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$. □

Deberemos ahora considerar dos situaciones diferentes: aquella donde $\rho_- \neq \rho_+$, y donde $\rho_- = \rho_+$. Sin embargo, es la primera la que más nos interesará, ya que el que $\rho_- \neq \rho_+$ es una condición necesaria de que existan soluciones de los problemas de interpolación y suavizado para todo punto del espacio.

A continuación, analizamos los subespacios $N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)$ para cada $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.

Lema 3.11. *Si $\rho_- \neq \rho_+$, entonces*

$$N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V) = N(T) \cap N(V) \quad \textit{para todo } \rho \in (\rho_-, \rho_+).$$

Demostración. Sea $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$; en primer lugar, veremos que $N(T^\# T + \rho V^\# V) \cap \mathcal{C}_V = \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$. Del Corolario 3.7, $T^\# T + \rho V^\# V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$. Entonces, para todo $x \in \mathcal{H}$

$$\|(T^\# T + \rho V^\# V)^{1/2} x\|^2 = \big\langle\, (T^\# T + \rho V^\# V)x, x \,\big\rangle = [\, Tx, Tx\,] + \rho\, [\, Vx, Vx\,]. \quad (3.8)$$

De (3.8) la inclusión $N(T^\# T + \rho V^\# V) \cap \mathcal{C}_V \subseteq \mathcal{C}_T$ es inmediata. Por otro lado, si $x \in \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$, entonces (3.8) asegura que $x \in N\big((T^\# T + \rho V^\# V)^{1/2}\big) \subseteq N(T^\# T + \rho V^\# V)$.

Ahora, supongamos que existe $x_0 \in N(T^\# T + \rho V^\# V) \setminus (\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V) = N(T^\# T + \rho V^\# V) \setminus \mathcal{C}_V$. Dado que $[\, Tx_0, Tx_0\,] + \rho\, [\, Vx_0, Vx_0\,] = 0$ y $\rho_- < \rho < \rho_+$,

$$\sup_{x \in \mathcal{P}^-(V)} \frac{[\, Tx, Tx\,]}{[\, Vx, Vx\,]} = -\rho_+ < \frac{[\, Tx_0, Tx_0\,]}{[\, Vx_0, Vx_0\,]} < -\rho_- = \inf_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\, Tx, Tx\,]}{[\, Vx, Vx\,]}. \quad (3.9)$$

Entonces, dado que $x_0 \in \mathcal{P}^+(V)$ o $x_0 \in \mathcal{P}^-(V)$,(3.9) conduce a una contradicción, y consecuentemente $N(T^\# T + \rho V^\# V) = \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$. Finalmente, si $y_0 \in \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$, luego $T^\# T y_0 = -\rho V^\# V y_0$. Sin embargo, dado que $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ era arbitrario, se sigue que $T^\# T x = V^\# V x = 0$, y de la inyectividad de $T^\#$ y $V^\#$ resulta que $y_0 \in N(T) \cap N(V)$. $\square$

Del Lema 3.11 se desprende el siguiente corolario.

Corolario 3.12. *Si $\rho_- \neq \rho_+$, entonces $R(L)$ es un subespacio no degenerado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.*

Demostración. La aserción es una consecuencia del Lema 3.11 y de que, de la Proposición 3.3, para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ $R(L)$ es un subespacio no degenerado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ si y sólo si $N(T^\# T + \rho V^\# V) = N(T) \cap N(V)$. $\square$

Para caracterizar el núcleo en los casos extremos del intervalo, i.e. $N(T^\# T + \rho_\pm V^\# V)$, definiremos los conjuntos

$$\mathcal{M}_\pm := \left\{ x \in \mathcal{P}^\pm(V) \,:\, \frac{[\, Tx, Tx\,]}{[\, Vx, Vx\,]} = \mp \rho_\mp \right\}. \quad (3.10)$$

Notemos que si $\mathcal{M}_\pm \neq \varnothing$, entonces $\mathcal{M}_\pm + N(T) \cap N(V) = \mathcal{M}_\pm$.

Lema 3.13. *Se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *si $\rho_- \neq \rho_+$, entonces $N(T^\# T + \rho_\pm V^\# V) = \mathcal{M}_\mp \cup \big(N(T) \cap N(V)\big)$;*
2. *si $\rho_- = \rho_+$, entonces $N(T^\# T + \rho_\pm V^\# V) = \mathcal{M}_+ \cup \mathcal{M}_- \cup \big(N(T) \cap N(V)\big)$.*

Demostración. Observemos que, dado que $T^{\#}T + \rho_{-}V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{+}$, $x \in N(T^{\#}T + \rho_{-}V^{\#}V)$ si y sólo si $[\,Tx, Tx\,] = -\rho_{-}\,[\,Vx, Vx\,]$.

1. En primer lugar, es trivial que $N(T) \cap N(V) \subseteq N(T^{\#}T + \rho_{-}V^{\#}V)$, y notemos que si $x \in \mathcal{M}_{+}$, entonces $[\,Tx, Tx\,] = -\rho_{-}\,[\,Vx, Vx\,]$, por lo que la inclusión $\mathcal{M}_{+} \subseteq N(T^{\#}T + \rho_{-}V^{\#})$ es inmediata. Ahora, sea $x \in N(T^{\#}T + \rho_{-}V^{\#}V)$. Si $x \in \mathcal{C}_V$, luego $[\,Tx, Tx\,] = -\rho_{-}\,[\,Vx, Vx\,] = 0$, y consecuentemente $x \in \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$. Sin embargo, del Lema 3.11 resulta que $\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V = N(T) \cap N(V)$. Si, en cambio, $x \in \mathcal{P}^{+}(V)$, entonces

$$\frac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]} = -\rho_{-} = \sup_{y \in \mathcal{P}^{+}(V)} \frac{[\,Ty, Ty\,]}{[\,Vy, Vy\,]},$$

de donde se desprende que $x \in \mathcal{M}_{+}$. Por último, supongamos que $x \in \mathcal{P}^{-}(V)$. Sea $\rho \in (\rho_{-}, \rho_{+})$, entonces $x \notin N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V) = N(T) \cap N(V)$, y en consecuencia $[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,] = \big\langle\, (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x, x \,\big\rangle > 0$. Luego,

$$\frac{[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]} = \frac{1}{\rho + \dfrac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]}} = \frac{1}{\rho - \rho_{-}} > 0,$$

que es una contradicción ya que $[\,Vx, Vx\,] < 0$. Así, $N(T^{\#}T + \rho_{-}V^{\#}V) \subseteq \mathcal{M}_{+} \cup \big(N(T) \cap N(V)\big)$.

Mediante el mismo procedimiento aplicado a $N(T^{\#}T + \rho_{+}V^{\#}V)$ se completa la demostración.

2. Este resultado se obtiene de forma análoga, haciendo uso del procedimiento anterior. □

A continuación mostramos un ejemplo que ilustra que los conjuntos $\mathcal{M}_{\pm}$ pueden ser el conjunto vacío.

Ejemplo 3.14. Supongamos que $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Z})$, con el producto interno usual, i.e.

$$\big\langle\, (x)_{n\in\mathbb{Z}}, (y)_{n\in\mathbb{Z}} \,\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n^{*}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}).$$

Y consideremos dos operadores $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ tales que

$$T^{\#}T(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{con } y_0 = x_0 \text{ e } y_n = -\Big(1 - \tfrac{1}{|n|}\Big)x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \setminus \{\,0\,\},$$

$$V^{\#}V(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{con } y_0 = -\tfrac{1}{2}x_0 \text{ e } y_n = x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \setminus \{\,0\,\}.$$

Observemos que ambos operadores, $T^{\#}T$ y $V^{\#}V$, son indefinidos. Dado $\rho \in \mathbb{R}$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{H}$, entonces

$$\Big\langle\, (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,\Big\rangle = (1 - \tfrac{1}{2}\rho)|x_0|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{\,0\,\}} \Big(\rho - \big(1 - \tfrac{1}{|n|}\big)\Big)|x_n|^2.$$

Luego, $T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ si y sólo si $1 - \frac{1}{2}\rho \geq 0$ y $\rho - (1 - \frac{1}{|n|}) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\,0\,\}$, y en consecuencia

$$\rho_- = 1 \quad \text{y} \quad \rho_+ = 2.$$

Ahora, es inmediato que $N(T^{\#}T + \rho_- V^{\#}V) = \{\,0\,\}$. En efecto,

$$\Big\langle\, (T^{\#}T + \rho_- V^{\#}V)(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,\Big\rangle = \tfrac{1}{2}|x_0|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{\,0\,\}} \tfrac{1}{|n|}|x_n|^2$$

se anula si y sólo si $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, se sigue que $\mathcal{M}_+ = \varnothing$.

Dado un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ fijo, definamos el producto interno $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho$ en $\mathcal{H}$ como

$$(\,x, y\,)_\rho := \big\langle\, (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x, y \,\big\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H}. \tag{3.11}$$

Dado que $T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$, denotando con $\|\cdot\|_\rho$ la norma

$$\|x\|_\rho := \big\langle\, (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x, x \,\big\rangle^{1/2}, \quad x \in \mathcal{H}, \tag{3.12}$$

resulta que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_\rho)$ es un espacio seminormado. Ahora consideremos el subespacio

$$\mathcal{H}' := N(T)^\perp + N(V)^\perp.$$

Si $\rho_- \neq \rho_+$ y $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$, entonces $(\mathcal{H}', \|\cdot\|_\rho)$ es un espacio normado. En efecto, del Lema 3.11 se tiene que $N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V) = N(T) \cap N(V)$, y consecuentemente

$$\mathcal{H}' \cap N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V) = \big(N(T)^\perp + N(V)^\perp\big) \cap (N(T) \cap N(V)) = \{\,0\,\}\,.$$

El siguiente lema muestra que, en este caso, las normas asociadas a cada valor del parámetro de regularización son equivalentes.

Lema 3.15. *Si $\rho_- \neq \rho_+$, entonces $\|\cdot\|_\rho$ y $\|\cdot\|_{\rho'}$ son normas equivalentes en $\mathcal{H}'$ para todos $\rho, \rho' \in (\rho_-, \rho_+)$.*

Demostración. Sean $\rho, \rho' \in (\rho_-, \rho_+)$ tales que $\rho' > \rho$. Sea $x \in \mathcal{H}'$ tal que $x \neq 0$, luego

$$\begin{aligned}\|x\|_{\rho'}^2 &= [\,Tx, Tx\,] + \rho'\,[\,Vx, Vx\,] = \big(\,[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]\,\big) + (\rho' - \rho)\,[\,Vx, Vx\,] \\ &= \|x\|_\rho^2 + (\rho' - \rho)\,[\,Vx, Vx\,]\,,\end{aligned}$$

y así resulta que

$$\frac{\|x\|_{\rho'}^2}{\|x\|_\rho^2} = 1 + (\rho' - \rho)\frac{[\,Vx, Vx\,]}{\|x\|_\rho^2} = 1 + \frac{(\rho' - \rho)\,[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]}. \tag{3.13}$$

Ahora procedemos a ver que

$$-\frac{1}{\rho_+ - \rho} \leq \frac{[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]} \leq \frac{1}{\rho - \rho_-}. \tag{3.14}$$

Notemos que si $x \in \mathcal{C}_V$, (3.14) se satisface trivialmente. Por otro lado, si $x \in \mathcal{P}^+(V)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]} &\leq \sup_{y \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\,Vy, Vy\,]}{[\,Ty, Ty\,] + \rho\,[\,Vy, Vy\,]} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\inf_{y \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\,Ty, Ty\,]}{[\,Vy, Vy\,]} + \rho} \\ &= \frac{1}{\rho - \rho_-}.\end{aligned}$$

Además, dado que $[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,] > 0$, $[\,Vx, Vx\,] > 0$ y $\rho_+ > \rho$,

$$-\frac{1}{\rho_+ - \rho} \leq 0 \leq \frac{[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]}.$$

Por último, si $x \in \mathcal{P}^-(V)$,

$$\begin{aligned}\frac{[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]} &\geq \inf_{y \in \mathcal{P}^-(V)} \frac{[\,Vy, Vy\,]}{[\,Ty, Ty\,] + \rho\,[\,Vy, Vy\,]} \\ &= \frac{1}{\displaystyle\sup_{y \in \mathcal{P}^-(V)} \frac{[\,Ty, Ty\,]}{[\,Vy, Vy\,]} + \rho} \\ &= -\frac{1}{\rho_+ - \rho},\end{aligned}$$

y dado que $[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,] > 0$, $[\,Vx, Vx\,] < 0$ y $\rho > \rho_-$,

$$\frac{[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]} \leq 0 \leq \frac{1}{\rho - \rho_-}.$$

Entonces, de (3.14) y considerando que $\rho' > \rho$ resulta que

$$\frac{\rho_+ - \rho'}{\rho_+ - \rho} = 1 - \frac{\rho' - \rho}{\rho_+ - \rho} \leq 1 + \frac{(\rho' - \rho)\,[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]} \leq 1 + \frac{\rho' - \rho}{\rho - \rho_-} = \frac{\rho' - \rho_-}{\rho - \rho_-}. \quad (3.15)$$

Luego, de (3.13) y (3.15) se sigue que

$$\left(\frac{\rho_+ - \rho'}{\rho_+ - \rho}\right)^{1/2} \leq \frac{\|x\|_{\rho'}}{\|x\|_{\rho}} \leq \left(\frac{\rho' - \rho_-}{\rho - \rho_-}\right)^{1/2},$$

y consecuentemente las normas $\|\cdot\|_{\rho'}$ y $\|\cdot\|_{\rho}$ son equivalentes. □

Observación 3.16. Con el mismo procedimiento utilizado en la prueba del Lema 3.15, es posible ver que para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ y para todo $x \in \mathcal{H}'$

$$\|x\|_{\rho_-} \leq \left(\frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ - \rho}\right)^{1/2} \|x\|_{\rho} \quad \text{y} \quad \|x\|_{\rho_+} \leq \left(\frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho - \rho_-}\right)^{1/2} \|x\|_{\rho}.$$

Sin embargo, al no tener la otra desigualdad, ya no podemos afirmar la equivalencia.

Antes de pasar a la primer consecuencia de este lema, recordemos que para cada $\rho \neq 0$ la simetría fundamental J_ρ dada por (3.2) induce un espacio de Hilbert $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_\rho)$, donde

$$\langle\,(y,z),(y',z')\,\rangle_\rho = \langle\,y, y'\,\rangle_{\mathcal{K}} + |\rho|\,\langle\,z, z'\,\rangle_{\mathcal{E}}\,, \quad (y,z),(y'z') \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}.$$

Asimismo, consideremos la norma $|||\cdot|||$ inducida por este producto interno,

$$|||(y,z)|||_\rho = \left(\,\langle\,y,y\,\rangle_{\mathcal{K}} + |\rho|\,\langle\,z,z\,\rangle_{\mathcal{E}}\right)^{1/2}, \quad (y,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}.$$

Si $\rho, \rho' \neq 0$ son tales que $\rho \neq \rho'$, entonces, para todo $(y,z) \in \mathcal{K} \times \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} |||(y,z)|||_\rho^2 = \langle\,y,y\,\rangle_{\mathcal{K}} + |\rho|\,\langle\,z,z\,\rangle_{\mathcal{E}} &\geq \text{mín}\left\{1, \tfrac{|\rho|}{|\rho'|}\right\}\left(\,\langle\,y,y\,\rangle_{\mathcal{K}} + |\rho'|\,\langle\,z,z\,\rangle_{\mathcal{E}}\,\right) \\ &= \text{mín}\left\{1, \tfrac{|\rho|}{|\rho'|}\right\}\,|||(y,z)|||_{\rho'}^2. \end{aligned}$$

De esta desigualdad se desprende inmediatamente que las normas $|||\cdot|||_\rho$ y $|||\cdot|||_{\rho'}$ son equivalentes. Haciendo uso de esto y del Lema 3.15 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.17. *Si $\rho_- \neq \rho_+$ y $R(L)$ es un subespacio uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces es un subespacio uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho})$ para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H}$. Dado que $R(L)$ es un subespacio uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$[\, Lx, Lx \,]_{\rho_0} \geq \alpha |||Lx|||^2_{\rho_0}. \tag{3.16}$$

Notemos que $[\, Lx, Lx \,]_{\rho} = \|x\|^2_{\rho}$ para todo $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$. Fijemos ahora un $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$, por el Lema 3.15 y la Observación 3.16 existe $\beta > 0$ tal que

$$[\, Lx, Lx \,]_{\rho} = \|x\|^2_{\rho} \geq \beta \|x\|^2_{\rho_0} = \beta \, [\, Lx, Lx \,]_{\rho_0} \,. \tag{3.17}$$

De (3.16) y (3.17), y del hecho de que $|||\cdot|||_{\rho}$ y $|||\cdot|||_{\rho_0}$ son equivalentes, resulta que existe $\gamma > 0$ tal que

$$[\, Lx, Lx \,]_{\rho} \geq \gamma |||Lx|||^2_{\rho}.$$

Entonces, dado que x es arbitrario, $R(L)$ es un subespacio uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho})$. Finalmente, considerando que $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ también es arbitrario la prueba queda completa. □

A continuación, analizamos la propiedad de pseudo-regularidad del rango de L. Más precisamente, mostramos que si $\rho_- \neq \rho_+$ y $R(L)$ es un subespacio pseudo-regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces es regular en $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho})$ para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. El Corolario 3.12 asegura que, si $\rho_- \neq \rho_+$, entonces $R(L)$ es un subespacio no degenerado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho})$ para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. Consecuentemente, si para algún $\rho_0 \in (\rho_-, \rho_+)$ $R(L)$ es pseudo-regular en $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$, automáticamente también es regular. Nos interesa ahora analizar los casos en que $R(L)$ es pseudo-regular en $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_+})$ o en $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_-})$. Con este fin, analizamos previamente la relación entre $R(L)$ y el subespacio $T(N(V))$. El siguiente lema estudia las relaciones elementales entre estos dos subespacios.

Lema 3.18. *Dado $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\}$, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$R(L)$ es cerrado si y sólo si $T(N(V))$ es cerrado;*
2. *si $R(L)$ es no negativo entonces $T(N(V))$ es no degenerado y positivo;*
3. *si $R(L)$ es uniformemente positivo entonces $T(N(V))$ es uniformemente positivo;*

4. si $R(L)$ es pseudo-regular y no negativo entonces $T(N(V))$ es regular y positivo.

Demostración.

1. La equivalencia se sigue de que, por la Proposición 3.3, $R(L)$ es cerrado si y sólo si $N(T) + N(V)$ es cerrado, y de que $N(T) + N(V)$ es cerrado si y sólo si $T(N(V))$ lo es; ver la Proposición 2.19.

2. En primer lugar, dado que $T(N(V)) \times \{0\} = L(N(V))$ es un subespacio de $R(L)$, $T(N(V))$ es no negativo. Para ver que $T(N(V))$ es, de hecho, un subespacio positivo, basta con probar que es no degenerado. Luego, sea $x \in N(V)$ tal que $Tx \in T(N(V))^{\circ}$. Dado que $x \in N(V)$,

$$0 = [\,Tx, Tx\,]_{\mathcal{K}} = [\,Lx, Lx\,]_{\rho} = \left\langle\, L^{\#}Lx, x \,\right\rangle.$$

En vista de que $L^{\#}L \in L(\mathcal{H})^{+}$ (ver Proposición 3.6) se sigue que $T^{\#}Tx = L^{\#}Lx = 0$. Finalmente, la sobreyectividad de T implica la inyectividad de $T^{\#}$ y, en particular, $Tx = 0$.

3. Es una consecuencia de que $T(N(V)) \times \{0\} = L(N(V))$ es un subespacio de $R(L)$, y de la transitividad de la positividad uniforme. En efecto, si $R(L)$ es uniformemente positivo, entonces existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in T(N(V))$

$$[\,x, x\,]_{\mathcal{K}} = [\,(x,0),(x,0)\,]_{\rho} \geq \alpha\,[\,J_{\rho}(x,0),(x,0)\,]_{\rho} = \alpha\,[\,J_{\mathcal{K}}x, x\,]_{\mathcal{K}} = \alpha\|x\|_{\mathcal{K}}^{2}.$$

4. La idea de la prueba es ver que $T(N(V)) \times \{0\}$ está contenido en un complemento regular de $R(L)^{\circ}$ en $R(L)$. En primer lugar, obsérvese que $R(L)^{\circ}$ es un subespacio neutral, y que $T(N(V)) \times \{0\}$ es un subespacio positivo y cerrado. Entonces, $R(L)^{\circ} \cap (T(N(V)) \times \{0\}) = \{0\}$. Además, $T(N(V)) \times \{0\} = L(N(V))$ es $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho}$-ortogonal a $R(L)^{\circ}$.

Entonces, existe un subespacio cerrado $\mathcal{M}$ contenido en $R(L)$ tal que

$$R(L) = R(L)^{\circ}[\dot{+}]\,\mathcal{M} \quad \text{y} \quad T(N(V)) \times \{0\} \subseteq \mathcal{M}.$$

Dado que $R(L)$ es pseudo-regular y no negativo, el subespacio $\mathcal{M}$ es un subespacio uniformemente positivo de $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$ y $T(N(V)) \times \{0\}$ posee la misma propiedad (por transitividad). En consecuencia, $T(N(V))$ es uniformemente positivo. □

Observación 3.19. Dado un $\rho \neq 0$, la Proposición 3.3 establece que $R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho})$ si y sólo si $R(L^{\#}L) = R(T^{\#}T) + R(V^{\#}V) = N(T)^{\perp} + N(V)^{\perp}$, donde hemos usado el hecho de que $T^{\#}$ y $V^{\#}$ son inyectivos. Pero esto es equivalente a que $N(T)^{\perp} \subseteq R(L^{\#}L)$ (o a que $N(V)^{\perp} \subseteq R(L^{\#}L)$). Efectivamente, si $N(T)^{\perp} = R(T^{\#}T) \subseteq R(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)$, entonces

$$N(V)^{\perp} = R(V^{\#}V) \subseteq R(T^{\#}T + \rho V^{\#}V) + R(T^{\#}T) \subseteq R(T^{\#}T + \rho V^{\#}V).$$

Si consideramos un subespacio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, dado un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, el complemento ortogonal de $\mathcal{S}$ con respecto al producto interno $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho$ puede expresarse como

$$\mathcal{S}^{\perp_\rho} = (L^{\#}L)^{-1}(\mathcal{S}^{\perp}) = L^{\#}L(\mathcal{S})^{\perp}.$$

Proposición 3.20. *Supongamos que $\rho_- \neq \rho_+$ y que $T(N(V))$ es un subespacio regular de $\mathcal{K}$. Entonces, $R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para todo $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.*

Demostración. Dado $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$, procedemos a ver que $N(V)^{\perp} \subseteq R(L^{\#}L)$. Sea $x_0 \in N(V)^{\perp}$. Por el Corolario 3.12 $N(L^{\#}L) = N(T) \cap N(V)$, luego

$$x_0 \in N(V)^{\perp} \subseteq N(T)^{\perp} + N(V)^{\perp} = \overline{R(L^{\#}L)},$$

(notemos que $N(T)^{\perp} + N(V)^{\perp}$ es cerrado porque $T(N(V))$ lo es, ver las Proposiciones 2.19 y 2.20). Entonces, existe $(L^{\#}Lx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R(L^{\#}L)$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{R(L^{\#}L)}$ tal que $L^{\#}Lx_n \to x_0$. Considerando el producto $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho$ definido en (3.11), se sigue que $L^{\#}L(N(V))^{\perp} = N(V)^{\perp_\rho}$. Dado que $T(N(V))$ es un subespacio regular, por el Lema 2.85,

$$\mathcal{H} = N(V) + T^{\#}T(N(V))^{\perp} = N(V) + L^{\#}L(N(V))^{\perp} = N(V) + N(V)^{\perp_\rho}.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos descomponer a x_n como $x_n = y_n + z_n$, con $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(V)$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N(V)^{\perp_\rho}$. Es fácil ver que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente de Cauchy en el espacio de Hilbert $\big(N(V)^{\perp_\rho}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho\big)$. Efectivamente, si $m, n \in \mathbb{N}$ y $x \in N(V)^{\perp_\rho}$, entonces

$$(\, z_n - z_m, x\,)_\rho = (\,(y_n + z_n) - (y_m + z_m), x\,)_\rho = \big\langle\, L^{\#}L(x_n - x_m), x \,\big\rangle \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

En consecuencia, dado que $\big(N(V)^{\perp_\rho}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho\big)$ es reflexivo, existe $z_0 \in N(V)^{\perp_\rho}$ tal que

$z_n \xrightarrow[\rho]{w} z_0$. Mostraremos ahora que $x_0 = L^\# L z_0$. Por un lado, si $x \in N(V)^{\perp_\rho}$,

$$(\, z_n, x \,)_\rho \to (\, z_0, x \,)_\rho = \left\langle\, L^\# L z_0, x \,\right\rangle .$$

Por otro lado,

$$(\, z_n, x \,)_\rho = (\, y_n + z_n, x \,)_\rho = \left\langle\, L^\# L x_n, x \,\right\rangle \to \langle\, x_0, x \,\rangle .$$

Es decir, $\langle\, x_0, x \,\rangle = \left\langle\, L^\# L z_0, x \,\right\rangle$ para todo $x \in N(V)^{\perp_\rho}$. Ahora, consideremos un $x \in \mathcal{H}$ arbitrario y escribamos $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in N(V)$ y $x_2 \in N(V)^{\perp_\rho}$. Entonces, observando que $L^\# L z_0 \in N(V)^\perp$ y $x_0 \in N(V)^\perp$, resulta que

$$\left\langle\, L^\# L z_0, x \,\right\rangle = \left\langle\, L^\# L z_0, x_2 \,\right\rangle = \langle\, x_0, x_2 \,\rangle = \langle\, x_0, x \,\rangle .$$

Consecuentemente, $x_0 = L^\# L z_0 \in R(L^\# L)$, y así podemos afirmar que $N(V)^\perp \subseteq R(L^\# L)$. Mediante la Observación 3.19 y notando que $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ es arbitario, la prueba queda completa. □

Corolario 3.21. *Si $\rho_- \neq \rho_+$, y $R(L)$ es un subespacio pseudo-regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.*

Demostración. Por el Lema 3.18, $T(N(V))$ es un subespacio regular de $\mathcal{K}$. Entonces, el resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.20. □

Estamos en condiciones ahora de enunciar el resultado más importante de este capítulo, mediante la recopilación de los hasta ahora obtenidos. La siguiente proposición establece la invarianza de las propiedades de $R(L)$ como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, ante los diversos valores del parámetro de regularización $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$, para el caso en que $\rho_- \neq \rho_+$.

Proposición 3.22. *Supongamos que $\rho_- \neq \rho_+$. Dado $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, si se satisface alguna de las siguientes condiciones para $R(L)$ como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$,*

i) $R(L)$ *es cerrado;*

ii) $R(L)$ *es no degenerado;*

iii) $R(L)$ *es pseudo-regular;*

iv) $R(L)$ *es regular;*

v) $R(L)$ *es uniformemente positivo;*

entonces $R(L)$ *posee la misma propiedad como subespacio de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ *para cada* $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

Demostración. Para *i)*, *ii)* y *v)*, ver la Proposición 3.5, el Corolario 3.12, y la Proposición 3.17, respectivamente. Para *iii)* y *iv)*, ver el Corolario 3.21. □

3.3 Caracterización del caso en que el rango es regular

Procedemos ahora a analizar más en detalle el caso en que $R(L)$ es un subespacio regular, que será el de mayor interés en los capítulos siguientes. Recordemos que $R(L)$ es regular y positivo si y sólo si es cerrado y uniformemente positivo.

Dado un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, en primer lugar probamos que si $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, entonces $\rho_- \neq \rho_+$ y además ρ debe pertenecer al intervalo abierto (ρ_-, ρ_+). Para esto, previamente desarrollamos algunas herramientas que serán utilizadas en el Capítulo 5.

La siguiente proposición muestra que $\mathcal{H}' = N(T)^\perp + N(V)^\perp$ resulta ser un espacio de Hilbert con el producto interno $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho$ dado por (3.11).

Proposición 3.23. *Si* $\rho_- \neq \rho_+$*, y existe* $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$ *tal que* $R(L)$ *es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$*, entonces* $(\mathcal{H}', (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$*, con* $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho$ *dado por* (3.11)*, es un espacio de Hilbert para cada* $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

Demostración. Observemos, en primer lugar, que por la Proposición 3.22 $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. Ahora consideremos un $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ arbitrario, fijo. De la Proposición 2.66, $R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$. La Proposición 3.3 entonces afirma que

$$R(T^\# T + \rho V^\# V) = R(T^\# T) + R(V^\# V) = N(T)^\perp + N(V)^\perp = \mathcal{H}'$$

es un subespacio cerrado de $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Consecuentemente, $(T^\# T + \rho V^\# V)^\dagger$ es un operador acotado. Si $x \in \mathcal{H}'$, considerando que

$$\|x\|_\rho = \left\langle (T^\# T + \rho V^\# V)x, x \right\rangle^{1/2} = \|(T^\# T + \rho V^\# V)^{1/2} x\|,$$

resulta que

$$\|(T^\# T + \rho V^\# V)^\dagger\|^{-1/2}\|x\| \leq \|x\|_\rho \leq \|T^\# T + \rho V^\# V\|^{1/2}\|x\|.$$

Por lo tanto, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\rho$ son equivalentes en $\mathcal{H}'$, y en consecuencia $(\mathcal{H}', (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$ es un espacio de Hilbert. $\square$

De la prueba de la Proposición 3.23 podemos extraer el siguiente corolario.

Corolario 3.24. *Si $\rho_- \neq \rho_+$, y existe $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$, entonces $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\rho$ son equivalentes en $\mathcal{H}'$ para todo $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.*

Ahora introducimos un operador que será esencial para analizar las soluciones del problema de interpolación indefinido en el Capítulo 5, y que en lo sucesivo sirve como una herramienta. Supongamos que $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ es tal que $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, y consideremos que ρ se encuentra fijo. Considerando que por la Proposición 3.3 $R(V^\# V) \subseteq R(T^\# T + \rho V^\# V)$ y $\mathcal{H}' = R(T^\# T + \rho V^\# V)$, definamos el operador $G : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}'$ como

$$G := (T^\# T + \rho V^\# V)^\dagger V^\# V\big|_{\mathcal{H}'}. \tag{3.18}$$

Observemos que, dado que $R(L)$ es un subespacio pseudo-regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ (ver Proposición 2.66), entonces de la Proposición 3.3 tenemos que $R(L^\# L)$ es cerrado en $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$, y consecuentemente el operador $(T^\# T + \rho V^\# V)^\dagger$ es acotado. La equivalencia de las normas expresada en el Corolario 3.24 implica entonces que G es un operador acotado del espacio de Hilbert $(\mathcal{H}', (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$. Además, es fácil ver que G es un operador autoadjunto en este espacio. Entonces, existen dos subespacios $\mathcal{H}_\pm$ y dos operadores invertibles y semidefinidos positivos $G_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)^+$ tales que $G = G_+ - G_-$ y

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_+ \oplus_\rho \mathcal{H}_- \oplus_\rho N(G),$$

donde

$$N(G) = N(V) \cap \mathcal{H}' = N(V) \cap (N(T) \cap N(V))^\perp = N(V) \ominus N(T). \tag{3.19}$$

Haciendo uso de este operador G, podemos probar el resultado anunciado.

Proposición 3.25. *Si $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ es tal que $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, entonces $\rho_- \neq \rho_+$ y $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathcal{H}'$, escribamos $x_0 = x_0^+ + x_0^- + x_0^0$ con $x_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$, $x_0^0 \in N(G)$, y supongamos que $x_0^+ \neq 0$. Luego,

$$\frac{(\,Gx_0, x_0\,)_\rho}{\|x_0\|_\rho^2} = \frac{\left(\,G_+x_0^+, x_0^+\,\right)_\rho - \left(\,G_-x_0^-, x_0^-\,\right)_\rho}{\|x_0^+\|_\rho^2 + \|x_0^-\|_\rho^2 + \|x_0^0\|_\rho^2} \leq \frac{\left(\,G_+x_0^+, x_0^+\,\right)_\rho}{\|x_0^+\|_\rho^2}.$$

Dado que $\mathcal{H}_+ \setminus \{\,0\,\} \subseteq \mathcal{P}^+(V)$, resulta que

$$\sup_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{(\,Gx, x\,)_\rho}{\|x\|_\rho^2} = \sup_{x \in \mathcal{H}_+ \setminus \{\,0\,\}} \frac{(\,G_+x, x\,)_\rho}{\|x\|_\rho^2} = \|G_+\| < +\infty,$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} \|G_+\| &= \sup_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{(\,Gx, x\,)_\rho}{\|x\|_\rho^2} = \sup_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\,Vx, Vx\,]}{[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx, Vx\,]} \\ &= \frac{1}{\rho + \displaystyle\inf_{x \in \mathcal{P}^+(V)} \frac{[\,Tx, Tx\,]}{[\,Vx, Vx\,]}} = \frac{1}{\rho - \rho_-}. \end{aligned}$$

Entonces, $\rho > \rho_-$. Siguiendo el mismo procedimiento con vectores de $\mathcal{H}_-$, resulta que $\rho < \rho_+$. □

La Proposición 3.25 puede interpretarse de la siguiente manera. Todo subepacio uniformemente positivo de un espacio de Krein es no degenerado. Para el caso que nos incumbe, $R(L)$ es no degenerado (como subespacio de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ con $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$) si y sólo si $N(T^\# T + \rho_0 V^\# V) = N(T) \cap N(V)$. Por otro lado, en el Capítulo 5 demostraremos si $R(L)$ es cerrado y uniformemente positivo los conjuntos $\mathcal{M}_\pm$ son no vacíos, y en consecuencia el Lema 3.13 establece que $N(T^\# T + \rho_\pm V^\# V) \neq N(T) \cap N(V)$. De esta forma, bajo estas condiciones $R(L)$ resulta ser un subespacio no degenerado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ si y sólo si $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

Enunciamos ahora una consecuencia del procedimiento llevado a cabo en la prueba de la Proposición 3.25.

Corolario 3.26. *Si $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ es tal que $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, entonces*

$$\|G_+\| = \frac{1}{\rho - \rho_-} \quad y \quad \|G_-\| = \frac{1}{\rho_+ - \rho}.$$

Para finalizar este capítulo, recopilamos y extendemos las diversas formas de caracterizar el caso en que $R(L)$ es regular.

Proposición 3.27. *Supongamos que $\rho_- \neq \rho_+$ y sea $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$;*
2. *$R(L) + R(L)^{[\perp]}$ es un subespacio cerrado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$;*
3. *$R(T^\# T + \rho V^\# V) = N(T)^\perp + N(V)^\perp$;*
4. *$N(T)^\perp \subseteq R(T^\# T + \rho V^\# V)$;*
5. *$N(V)^\perp \subseteq R(T^\# T + \rho V^\# V)$;*
6. *$T(N(V))$ es un subespacio regular de $\mathcal{K}$;*
7. *$V(N(T))$ es un subespacio regular de $\mathcal{E}$.*

Demostración. La equivalencia entre *1.*, *3.*, *4.* y *5.* fue establecida en la Observación 3.19. La equivalencia entre *1.* y *6.* es una consecuencia del Lema 3.18 y la Proposición 3.20, y aquella entre *1.* y *7.* se prueba de manera análoga.

Para finalizar la prueba, supongamos que $R(L) + R(L)^{[\perp]}$ es un subespacio cerrado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$. Entonces, por el Lema 3.4, $(y, z) \in R(L) + R(L)^{[\perp]}$ si y sólo si $z - VT^\dagger \in V(N(L^\# L))^{[\perp]}$. Pero el Corolario 3.12 asegura que $N(L^\# L) = N(T) \cap N(V)$, y consecuentemente $V(N(L^\# L))^{[\perp]} = \mathcal{E}$. Entonces, $\mathcal{K} \times \mathcal{E} = R(L) + R(L)^{[\perp]}$, i.e. $R(L)$ es regular. □

A modo de resumen, en la siguiente observación presentamos aquellos resultados de esta sección que serán exhaustivamente utilizados en el análisis del conjunto de soluciones del problema de interpolación abstracta indefinida.

Observación 3.28. Si $R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces $\rho_- \neq \rho_+$, y para todo $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $(\mathcal{H}', (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$ es un espacio de Hilbert;
2. las normas $\|\cdot\|_\rho$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes en $\mathcal{H}'$;
3. $T(N(V))$ es un subespacio regular de $\mathcal{K}$;
4. se tiene que

$$G = (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)^{\dagger} V^{\#}V\big|_{\mathcal{H}'} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}') \quad \text{y} \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H}_+ \oplus_\rho \mathcal{H}_- \oplus_\rho N(G),$$

   donde G puede descomponerse como $G = G_+ - G_-$, con $G_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)^+$ dos operadores invertibles y semidefinidos positivos;
5. $\|G_+\| = \frac{1}{\rho-\rho_-}$ y $\|G_-\| = \frac{1}{\rho_+-\rho}$.

4

Problema de suavizado abstracto indefinido

Contenido

4.1 Problema de suavizado abstracto indefinido

El problema de suavizado abstracto indefinido, que se obtiene a partir de la regularización del problema de interpolación abstracta indefinida mediante el procedimiento de Tikhonov, se formula de la siguiente manera. Consideremos un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ (complejo y separable), dos espacios de Krein $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{E}})$ (complejos y separables), y sean $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ dos operadores acotados y sobreyectivos tales que $T^{\#}T$ y $V^{\#}V$ son operadores indefinidos en $\mathcal{H}$.

Problema 1. *Dado $\rho \in \mathbb{R}$ y un punto fijo $z_0 \in \mathcal{E}$, analizar la existencia de*

$$\min_{x \in \mathcal{H}} \quad \big([\,Tx, Tx\,]_{\mathcal{K}} + \rho\, [\,Vx - z_0, Vx - z_0\,]_{\mathcal{E}} \big),$$

y si el mínimo existe, hallar el conjunto de argumentos donde se alcanza.

Definición 4.1. Un vector $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ es un *spline de suavizado abstracto indefinido o* (T, V, ρ)-*suavizante* de $z_0 \in \mathcal{E}$, si es una solución del Problema 1. El conjunto de (T, V, ρ)-suavizantes de z_0 es denotado por $sm(\rho, z_0)$.

Definición 4.2. El conjunto de puntos $z_0 \in \mathcal{E}$ que admiten una solución para el Problema 1 para un dado $\rho \in \mathbb{R}$ es denotado por $\mathcal{A}_{sm}(\rho)$:

$$\mathcal{A}_{sm}(\rho) = \Big\{\, z_0 \in \mathcal{E} \ : \ sm(\rho, z_0) \neq \varnothing \,\Big\}.$$

Si suponemos que $\rho = 0$, el Problema 1 se reduce a analizar el mínimo $\min_{x\in\mathcal{H}}\ [\,Tx, Tx\,]$. De la Proposición 2.72, una condición necesaria de la existencia de este mínimo es que $R(T) = \mathcal{K}$ sea no negativo. Sin embargo, $T^{\#}T$ es un operador indefinido por lo que podemos de antemano afirmar que $\rho = 0$ no es un valor admisible para que el Problema 1 tenga solución. Por lo tanto, para lo sucesivo supondremos que el parámetro de regularización es distinto de cero: $\rho \neq 0$.

El Problema 1 puede expresarse como un problema de cuadrados mínimos indefinidos mediante el operador de regularización de Tikhonov dado por la Definición 3.1 y el producto interno sobre $\mathcal{K} \times \mathcal{E}$ definido en (3.1): si fijamos $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$ y $z_0 \in \mathcal{E}$, dado un

$x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}[\,Tx, Tx\,] + \rho\,[\,Vx - z_0, Vx - z_0\,] &= [\,(Tx, Vx - z_0), (Tx, Vx - z_0)\,]_\rho \\ &= [\,Lx - (0, z_0), Lx - (0, z_0)\,]_\rho\,.\end{aligned}$$

Luego, obtenemos la siguiente formulación equivalente para el problema de splines de suavizado indefinido:

Problema 1'. *Dado $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$ y un punto fijo $z_0 \in \mathcal{E}$, analizar la existencia de*

$$\min_{x \in \mathcal{H}} [\,Lx - (0, z_0), Lx - (0, z_0)\,]_\rho\,, \tag{4.1}$$

y si el mínimo existe, hallar el conjunto de argumentos donde se alcanza.

Por la Proposición 2.72, existe una solución de (4.1) si y sólo si $R(L)$ es un subespacio no negativo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ y $(0, z_0) \in R(L) + R(L)^{[\perp]}$. En este caso,

$$\tilde{x} \in \mathcal{H} \text{ es una solución del Problema 1'} \quad \Longleftrightarrow \quad L\tilde{x} - (0, z_0) \in R(L)^{[\perp]}.$$

Además, si $\tilde{x}$ es una solución particular, el conjunto de soluciones es la variedad afín

$$\tilde{x} + N(L^{\#}L).$$

Expresamos estos resultados en la siguiente proposición, y el subsiguiente corolario.

Proposición 4.3. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, el Problema 1 admite solución si y sólo si $T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ y $V^{\#}z_0 \in R(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)$.*

Demostración. Como se ha mencionado, de la Proposición 2.72 se tiene que el Problema 1 admite solución si y sólo si $R(L)$ es no negativo y $(0, z_0) \in R(L) + R(L)^{[\perp]}$. La Proposición 3.3 muestra que $R(L)$ es no negativo si y sólo si $L^{\#}L = T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$.

Además, $(0, z_0) \in R(L) + R(L)^{[\perp]}$ si y sólo si existe $\tilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que

$$[\,L\tilde{x} - (0, z_0), Lx\,]_\rho = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

o equivalentemente, $L^{\#}(L\tilde{x}) = L^{\#}(0, z_0) = \rho V^{\#}z_0$. Luego,

$$(0, z_0) \in R(L) + R(L)^{[\perp]} \quad \text{si y sólo si} \quad V^{\#}z_0 \in R(T^{\#}T + \rho V^{\#}V).$$

□

Considerando el Corolario 2.74, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado, donde se caracterizan las soluciones del Problema 1 mediante una ecuación normal, y a través de ésta se establece una solución particular.

Corolario 4.4. *Si $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ para un vector $z_0 \in \mathcal{E}$, entonces $\tilde{x} \in sm(\rho, z_0)$ si y sólo si $\tilde{x}$ es una solución de la ecuación:*

$$(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x = \rho V^{\#} z_0. \tag{4.2}$$

En este caso,

$$sm(\rho, z_0) = \rho(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)^{\dagger} V^{\#} z_0 + N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V).$$

4.2 Análisis del conjunto de puntos admisibles

Procedemos ahora a caracterizar el conjunto de puntos admisibles $\mathcal{A}(\rho)$, para cada $\rho \in \mathbb{R}$. De acuerdo a la Proposición 3.6, la existencia de un $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $T^{\#}T + \rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^{+}$ es equivalente a que $T(\mathcal{C}_V)$ sea un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$. Dado que ésta es una condición necesaria para la existencia de soluciones del Problema 1, de aquí en más la supondremos como hipótesis.

Hipótesis 4.5. *$T^{\#}T$ y $V^{\#}V$ son operadores indefinidos en $\mathcal{H}$ y*

$$T(\mathcal{C}_V) \text{ es un conjunto no negativo de } \mathcal{K}.$$

Consecuentemente, los parámetros $\rho_{\pm}$ dados por (3.4) se encuentran bien definidos. El siguiente resultado, expresado con el carácter de proposición, es una consecuencia inmediata de la Proposición 4.3 y el Corolario 3.7.

Proposición 4.6. *Se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{A}_{sm}(\rho) = \varnothing$ para todo $\rho \notin [\rho_-, \rho_+]$;*
2. *$\mathcal{A}_{sm}(\rho) = (V^{\#})^{-1}\left(R(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)\right)$ para cada $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.*

Hemos mencionado en la Introducción que en [63] se probó que, dado un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, existe un spline de suavizado indefinido para todo $z_0 \in \mathcal{E}$ (equivalentemente, $\mathcal{A}_{sm}(\rho) = \mathcal{E}$) si y sólo si $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ (o equivalentemente, regular y positivo). Nos proponemos ahora relajar esa hipótesis sobre $R(L)$ para luego obtener este citado resultado como una consecuencia inmediata.

Proposición 4.7. *Sea $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{A}_{sm}(\rho) = V\big(N(T^\# T + \rho V^\# V)\big)^{[\perp]}$;
2. $R(L) + R(L)^{[\perp]}$ *es un subespacio cerrado de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}_{sm}(\rho) = V(N(L^\# L))^{[\perp]}$. Dado un punto $(y, z) \in \overline{R(L) + R(L)^{[\perp]}}$, el Lema 3.4 implica que $z - VT^\dagger y \in \mathcal{A}_{sm}(\rho)$. Si $x \in \mathcal{H}$, considerando que $TT^\dagger = I$, $Lx - (0, z - VT^\dagger y) = L(x + T^\dagger y) - (y, z)$. Entonces, el problema de cuadrados mínimos indefinidos que consiste en minimizar $\big[\, Lx - (y, z), Lx - (y, z) \,\big]_\rho$ sobre $x \in \mathcal{H}$ admite solución. En este caso $(y, z) \in R(L) + R(L)^{[\perp]}$ (ver la Proposición 2.72). Entonces, $R(L) + R(L)^{[\perp]}$ es cerrado.

Recíprocamente, supongamos que $R(L) + R(L)^{[\perp]}$ es cerrado. En primer lugar, la inclusión $\mathcal{A}_{sm}(\rho) \subseteq V(N(L^\# L))^{[\perp]}$ siempre se cumple. Para ver la otra inclusión, si $z_0 \in V(N(L^\# L))^{[\perp]}$ entonces, por el Lema 3.4, se sigue que $(0, z_0) \in R(L) + R(L)^{[\perp]}$, i.e. $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$. Luego, $z_0 \in \mathcal{A}_{sm}(\rho)$. $\square$

A partir de la proposición anterior, podemos describir más en detalle el conjunto de puntos admisibles para el caso en que $R(L)+R(L)^{[\perp]}$ es un subespacio cerrado. Recordando la definición de los conjuntos $\mathcal{M}_\pm$ dada por (3.10), consideremos los conjuntos

$$\mathcal{N}_\pm := \mathcal{M}_\pm \cup \{\, 0 \,\} = \left\{ x \in \mathcal{P}(V)^\pm \;:\; \frac{[\, Tx, Tx \,]}{[\, Vx, Vx \,]} = -\rho_\pm \right\} \cup \{\, 0 \,\}. \tag{4.3}$$

Proposición 4.8. *Dado $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, supongamos que $R(L) + R(L)^{[\perp]}$ es un subespacio cerrado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *si $\rho_- \neq \rho_+$:*
   - *i) si $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$, entonces $\mathcal{A}_{sm}(\rho) = \mathcal{E}$;*
   - *ii) si $\rho = \rho_+$, entonces $\mathcal{A}_{sm}(\rho) = V(\mathcal{N}_-)^{[\perp]}$;*
   - *iii) si $\rho = \rho_-$, entonces $\mathcal{A}_{sm}(\rho) = V(\mathcal{N}_+)^{[\perp]}$;*

2. *si* $\rho_- = \rho_+$, *entonces*

$$\mathcal{A}_{sm}(\rho) = V(\mathcal{N}_+)^{[\perp]} \cap V(\mathcal{N}_-)^{[\perp]}.$$

Demostración. Los resultados se obtienen como una consecuencia inmediata de la Proposició 4.7, y los Lemas 3.11 y 3.13. $\square$

Ahora caracterizamos el caso en que, para un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ fijo, existe solución para todo punto para el problema de suavizado indefinido mediante la siguiente proposición.

Proposición 4.9. *Sea* $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$*;*
2. $R(L)$ *es un subespacio regular de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$*;*

En este caso,

$$sm(\rho, z_0) = \rho(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)^{\dagger} V^{\#} z_0 + N(T) \cap N(V).$$

Demostración. Si $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$, entonces por la Proposición 4.6 $(V^{\#})^{-1}(R(L^{\#}L)) = \mathcal{A}_{sm}(\rho) = \mathcal{E}$. Esto implica que $N(V)^{\perp} \subseteq R(L^{\#}L)$. De la Proposición 3.27 se tiene luego que $R(L)$ es un subespacio regular.

Para el recíproco, supongamos que $R(L)$ es regular. Dado que entonces es cerrado y uniformemente positivo (ver Proposición 2.66), la Proposición 3.25 asegura que $\rho_- \neq \rho_+$ y $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. Considerando que $R(L) + R(L)^{[\perp]}$ es cerrado, porque $R(L)$ es pseudo-regular, por la Proposición 4.8 $\mathcal{A}_{sm}(\rho) = \mathcal{E}$. $\square$

Observación 4.10. Observemos que por las Proposiciones 4.9 y 3.25, y la invarianza establecida en la Proposición 3.22, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $sm(\rho_0, z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$, para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$;
2. $\rho_- \neq \rho_+$, y $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$, para todo $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

4.3 Relación con los splines con restricción lineal

En esta sección procedemos a estudiar la relación entre el problema de suavizado indefinido, y el problema de interpolación indefinida con restricción lineal que fue expuesto en la subsección 2.2.8. Recordemos esta formulación: dado un vector $z_0 \in \mathcal{E}$, se desea hallar los puntos de $\mathcal{H}$ que alcancen el mínimo

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathcal{H}} \quad & [\,Tx, Tx\,]\,, \\ \text{sujeto a} \quad & Vx = z_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Denotamos al conjunto de soluciones de (4.4) como $spl(z_0)$. Recordemos también que el problema de interpolación abstracta indefinida se reduce a (4.4) si $V^{\#}V$ no es un operador indefinido. En esta sección, sin embargo, seguiremos suponiendo las Hipótesis 4.5.

Por lo expuesto en la Subsección 2.2.8, son las características del subespacio $T(N(V))$ las que permiten analizar el problema (4.4). Luego, para lo que sigue es fundamental el análisis de las relaciones entre $R(L)$ y $T(N(V))$ desarrollado en el Lema 3.18.

En la Proposición 2.86 se mostró que existe solución para (4.4) si y sólo si $T(N(V))$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $\mathcal{K}$ (o equivalentemente, regular y positivo). Mediante lo desarrollado en el Capítulo 3 estamos en condiciones de enunciar una equivalencia análoga en términos de $R(L)$:

Proposición 4.11. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $spl(z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$ *y* $\rho_- \neq \rho_+$*;*
2. $R(L)$ *es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ *para algún* $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.

Demostración. En primer lugar, observemos que si $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces la Proposición 3.25 afirma que $\rho_- \neq \rho_+$. Luego, la equivalencia es una consecuencia de que, por la Proposición 3.27, si $\rho_- \neq \rho_+$ entonces $T(N(V))$ es regular si y sólo si $R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, con $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. □

Asimismo, mediante las Proposiciones 4.9 y 4.11, y la Observación 4.10 obtenemos el siguiente corolario, al que le damos carácter de proposición.

Proposición 4.12. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $spl(z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$ *y* $\rho_- \neq \rho_+$*;*
2. $sm(\rho_0, z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$*, para algún* $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$*;*
3. $\rho_- \neq \rho_+$ *y* $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$*, para todo* $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$*.*

Ahora concentramos nuestra atención en las situaciones en que un conjunto de splines interpolantes con restricción lineal es también un subconjunto de las soluciones de algún determinado problema de suavizado indefinido; o, aún más, cuando un problema de interpolación indefinida con restricción lineal puede traducirse en un problema de suavizado indefinido, y viceversa.

En primer lugar, mostramos un resultado expuesto en [64, Thm. 4.7].

Proposición 4.13. *Supongamos que* $R(L)$ *es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$*. Entonces, para cada* $z_0 \in \mathcal{E}$ *existe* $w_0 \in \mathcal{E}$ *tal que*

$$sp(w_0) = sm(\rho, z_0).$$

A pesar de que este resultado es interesante (indica que, fijando un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, cada (T, V)-interpolante con restricción lineal es un (T, V, ρ)-suavizante y viceversa), las hipótesis consideradas son un tanto excesivas. Nos proponemos ahora estudiar algunos resultados intermedios, relajando las hipótesis impuestas sobre $R(L)$.

Proposición 4.14. *Dado* $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{\,0\,\}$*, si* $R(L)$ *es un subespacio no negativo de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$*, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *para cada* $z_0 \in \mathcal{E}$ *tal que* $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ *existe* $w_0 \in \mathcal{E}$ *tal que*
$$\varnothing \neq spl(w_0) \subseteq sm(\rho, z_0);$$
2. *para cada* $w_0 \in \mathcal{E}$ *tal que* $spl(w_0) \neq \varnothing$ *existe* $z_0 \in \mathcal{E}$ *tal que*
$$spl(w_0) \subseteq sm(\rho, z_0).$$

Demostración. En primer lugar, observemos que el Lema 3.18 implica que $T(N(V))$ es un subespacio positivo y no degenerado de $\mathcal{K}$. Además, en este caso $N(V) \cap T^{\#}T(N(V))^{\perp} = N(V) \cap N(T)$ (ver el Lema 2.85).

1. Sea $x_0 \in sm(\rho, z_0)$. Del Corolario 4.4 se tiene que $(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x_0 = \rho V^{\#}z_0$. Dado que $T^{\#}Tx_0 = V^{\#}(\rho z_0 - Vx_0) \in N(V)^{\perp}$, se cumple que $x_0 \in T^{\#}T(N(V))^{\perp}$. Fijando $w_0 := Vx_0$, del Corolario 2.83 resulta que $x_0 \in spl(w_0)$, y consecuentemente

$$spl(w_0) = x_0 + N(T) \cap N(V).$$

Finalmente, $spl(w_0) = x_0 + N(T) \cap N(V) \subseteq x_0 + N(L^{\#}L) = sm(\rho, z_0)$.

2. Supongamos que $spl(w_0) \neq \varnothing$ para algún $w_0 \in \mathcal{E}$. Por el Corolario 2.83 existe $x_0 \in T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ tal que $Vx_0 = w_0$. Dado que $T^{\#}Tx_0 \in N(V)^{\perp} = R(V^{\#})$, se sigue que $T^{\#}Tx_0 = V^{\#}(V^{\#})^{\dagger}T^{\#}Tx_0$. Entonces,

$$(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x_0 = \rho V^{\#}\left(\frac{1}{\rho}(V^{\#})^{\dagger}T^{\#}T + V\right)x_0.$$

Luego, denotando $z_0 := \left(\frac{1}{\rho}(V^{\#})^{\dagger}T^{\#}T + V\right)x_0$, el Corolario 4.4 asegura que $x_0 \in sm(\rho, z_0)$. Dado que $N(T) \cap N(V) \subseteq N(L^{\#}L)$, la prueba queda completa. $\square$

Observemos que dado $z_0 \in \mathcal{E}$ tal que $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$, si fijamos $w_0 := \rho V(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)^{\dagger}V^{\#}z_0$ entonces $\varnothing \neq spl(w_0) \subseteq sm(\rho, z_0)$. Análogamente, dado $w_0 \in \mathcal{E}$ tal que $spl(w_0) \neq \varnothing$, si $x_0 \in T^{\#}T(N(V))^{\perp}$ es tal que $w_0 = Vx_0$, entonces definiendo $z_0 := \left(\frac{1}{\rho}(V^{\#})^{\dagger}T^{\#}T + V\right)x_0$ se sigue que $spl(w_0) \subseteq sm(\rho, z_0)$.

Considerando ahora que por el Corolario 3.7 $R(L)$ es un subespacio no negativo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho})$ si y sólo si $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.15. *Se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *para cada $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ y cada $z_0 \in \mathcal{A}_{sm}(\rho)$ existe $w_0 \in \mathcal{A}_{spl}$ tal que*

$$spl(w_0) \subseteq sm(\rho, z_0);$$

2. *para cada $w_0 \in \mathcal{A}_{spl}$ y cada $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$ existe $z_0 \in \mathcal{A}_{sm}(\rho)$ tal que*

$$spl(w_0) \subseteq sm(\rho, z_0).$$

Finalmente, también como consecuencia de la Proposición 4.14, obtenemos la proposición a continuación, y el subsiguiente corolario.

Proposición 4.16. *Dado $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, supóngase que $R(L)$ es un subespacio positivo y no degenerado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *para cada $z_0 \in \mathcal{E}$ tal que $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ existe $w_0 \in \mathcal{E}$ tal que*

$$\varnothing \neq spl(w_0) = sm(\rho, z_0);$$

2. *para cada $w_0 \in \mathcal{E}$ tal que $sp(w_0) \neq \varnothing$ existe $z_0 \in \mathcal{E}$ tal que*

$$spl(w_0) = sm(\rho, z_0).$$

Demostración. De la Proposición 3.3 se tiene que $N(L^\# L) = N(T) \cap N(V)$, entonces la afirmación sigue como consecuencia de la Proposición 4.14. □

Corolario 4.17. *Si $\rho_- \neq \rho_+$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *para cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ y cada $z_0 \in \mathcal{A}_{sm}(\rho)$ existe $w_0 \in \mathcal{A}_{spl}$ tal que*

$$spl(w_0) = sm(\rho, z_0);$$

2. *para cada $w_0 \in \mathcal{A}_{spl}$ y cada $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ existe $z_0 \in \mathcal{A}_{sm}(\rho)$ tal que*

$$spl(w_0) = sm(\rho, z_0).$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 4.16, y del hecho de que, del Corolario 3.12, $R(L)$ es un subespacio no degenerado de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para todo $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. □

5

Splines interpolantes abstractos indefinidos

Contenido

5.1 Problema de interpolación abstracta indefinida

Procedemos a formular el problema de interpolación abstracta indefinida. Sea $(\mathcal{H}, \langle\, \cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espacio de Hilbert (complejo y separable), $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{K}})$ y $(\mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\mathcal{E}})$ dos espacios de Krein (complejos y separables), y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ dos operadores acotados y sobreyectivos tales que $T^{\#}T$ y $V^{\#}V$ son operadores indefinidos en $\mathcal{H}$.

Problema 2. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, analizar la existencia de*

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathcal{H}} & [\,Tx, Tx\,]\,, \\ \textit{sujeto a} & [\,Vx - z_0, Vx - z_0\,] = 0, \end{array}$$

y si el mínimo existe, hallar el conjunto de argumentos donde se alcanza.

Definición 5.1. Un vector $\tilde{x} \in \mathcal{H}$ es un *interpolador abstracto indefinido o* (T, V)-*interpolante* de $z_0 \in \mathcal{E}$, si es una solución del Problema 2. El conjunto de los (T, V)-interpolantes de z_0 es denotado con $sp(z_0)$.

Fijando $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$, entonces $x \in \mathcal{H}$ satisface $[\,Vx - z_0, Vx - z_0\,] = 0$ si y sólo si $x \in x_0 + \mathcal{C}_V$, y consecuentemente $sp(z_0)$ es un subconjunto de $x_0 + \mathcal{C}_V$. Entonces, el Problema 2 puede expresarse equivalentemente de la siguiente forma:

Problema 2'. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$; analizar la existencia de*

$$\min_{y \in \mathcal{C}_V} [\,T(x_0 + y), T(x_0 + y)\,]\,, \tag{5.1}$$

y si el mínimo existe, hallar el conjunto de argumentos donde se alcanza.

5.2 Existencia de splines interpolantes indefinidos

En esta sección, nos disponemos a estudiar diversas caracterizaciones de la existencia de soluciones del Problema 2. En primer lugar, analizamos la existencia del ínfimo en (5.1).

Proposición 5.2. *Dado $x_0 \in \mathcal{H}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\displaystyle\inf_{y \in \mathcal{C}_V} [\, T(x_0 + y), T(x_0 + y)\,] > -\infty$*;*
2. *existe una constante $c \geq 0$ tal que*

$$|\,[\, Tx_0, Ty\,]\,|^2 \leq c\,[\, Ty, Ty\,] \qquad \textit{para todo } y \in \mathcal{C}_V. \tag{5.2}$$

Demostración. Supongamos que $\inf_{y \in \mathcal{C}_V} [\, T(x_0 + y), T(x_0 + y)\,] = k > -\infty$. Entonces, para todo $y \in \mathcal{C}_V$,

$$[\, Ty, Ty\,] + 2\,\mathrm{Re}\,[\, Tx_0, Ty\,] + [\, Tx_0, Tx_0\,] - k \geq 0. \tag{5.3}$$

Para un dado $y \in \mathcal{C}_V$, $ty \in \mathcal{C}_V$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego, reemplazando y por ty en (5.3) se sigue que

$$at^2 + bt + c \geq 0 \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

donde $a = [\, Ty, Ty\,]$, $b = 2\,\mathrm{Re}\,[\, Tx_0, Ty\,]$ y $c = [\, Tx_0, Tx_0\,] - k \geq 0$. Pero (5.4) se satisface si y sólo si $a \geq 0$ y $b^2 - 4ac \leq 0$, i.e.

$$\big(\mathrm{Re}\,[\, Tx_0, Ty\,]\big)^2 \leq c\,[\, Ty, Ty\,]\,, \qquad \text{para todo } y \in \mathcal{C}_V.$$

Ahora, sea $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $[\, Tx_0, Ty\,] = e^{i\theta}\,|\,[\, Tx_0, Ty\,]\,|$, y sea $v := e^{i\theta} y \in \mathcal{C}_V$. Entonces, $[\, Tv, Tv\,] = [\, Ty, Ty\,]$ y $\mathrm{Re}\,[\, Tx_0, Tv\,] = |\,[\, Tx_0, Ty\,]\,|$. En consecuencia,

$$|\,[\, Tx_0, Ty\,]\,|^2 \leq c\,[\, Ty, Ty\,]\,, \qquad \text{para todo } y \in \mathcal{C}_V.$$

Recíprocamente, sea $c \geq 0$ tal que (5.2) se cumple. Luego $[\, Ty, Ty\,] \geq 0$ para todo $y \in \mathcal{C}_V$ y

$$\big(\mathrm{Re}\,[\, Tx_0, Ty\,]\big)^2 \leq |\,[\, Tx_0, Ty\,]\,|^2 \leq c\,[\, Ty, Ty\,]\,.$$

Dado un vector arbitrario (fijo) $y \in \mathcal{C}_V$ definamos a y b como previamente. Entonces, $a \geq 0$, $b^2 - 4ac \leq 0$, y (5.4) se sigue. O equivalentemente,

$$[\, T(x_0 + ty), T(x_0 + ty)\,] \geq [\, Tx_0, Tx_0\,] - c,$$

donde $y \in \mathcal{C}_V$ y $t \in \mathbb{R}$. Dado que $y \in \mathcal{C}_V$ es arbitrario, $\inf_{y \in \mathcal{C}_V} [\, T(x_0 + y), T(x_0 + y)\,] > -\infty$. □

De la Proposición 5.2 se obtiene el siguiente corolario, que establece condiciones necesarias de la existencia del ínfimo en (5.1). Denotemos con $\mathcal{C}_T$ al conjunto de vectores neutros de la forma cuadrática $x \mapsto [\,Tx, Tx\,]$.

Corolario 5.3. *Dado $x_0 \in \mathcal{H}$, si* $\operatorname{\acute{i}nf}_{y\in\mathcal{C}_V} [\,T(x_0+y), T(x_0+y)\,] > -\infty$*, entonces $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$ y $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$.*

Demostración. Supongamos que $\operatorname{\acute{i}nf}_{y\in\mathcal{C}_V} [\,T(x_0+y), T(x_0+y)\,] > -\infty$. Luego, la primer aserción es una consecuencia inmediata de (5.2). Por oro lado, si $y \in \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$, reemplazándolo en (5.2) implica que $|\,[\,Tx_0, Ty\,]\,| = 0$. En consecuencia, $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$. □

Dado que, como establece el Corolario 5.3, el que $T(\mathcal{C}_V)$ sea un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$ es una condición necesaria para la existencia del ínfimo en (5.2), de aquí en más suponemos que esta condición se satisface.

Hipótesis 5.4. *$T^{\#}T$ y $V^{\#}V$ son operadores indefinidos en $\mathcal{H}$ y*

$T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$.

Procedemos a mostrar la primera caracterización de la existencia de soluciones del Problema 2. La existencia de éstas es equivalente a la existencia de un vector $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que $c := [\,Ty_0, Ty_0\,]$ satisfaga (5.2). Luego, la siguiente proposición establece condiciones necesarias y suficientes para la existencia de splines interpolantes indefinidos.

Proposición 5.5. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $z_0 = Vx_0$. Entonces, $sp(z_0) \neq \varnothing$ si sólo si existe $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que para todo $y \in \mathcal{C}_V$,*

$$|\,[\,Tx_0, Ty\,]\,|^2 \leq [\,Ty_0, Ty_0\,]\,[\,Ty, Ty\,]\,, \tag{5.5}$$

con igualdad cuando $y = y_0$.

En este caso, $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$ si y sólo si $y_0 \in \mathcal{C}_V$ satisface (5.5) *y*

$$[\,T(x_0+y_0), Ty_0\,] = 0. \tag{5.6}$$

Demostración. Supongamos que $sp(z_0) \neq \varnothing$; i.e. existe $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que

$$[\,T(x_0+y_0), T(x_0+y_0)\,] \leq [\,T(x_0+y), T(x_0+y)\,]\,, \qquad \text{para todo } y \in \mathcal{C}_V.$$

Entonces, de la prueba de la Proposición 5.2

$$\Big(\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty\,]\Big)^2 \leq |\,[\,Tx_0,Ty\,]\,|^2 \leq c\,[\,Ty,Ty\,]\,, \qquad \text{para todo } y\in\mathcal{C}_V,$$

donde $c=-\Big(2\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty_0\,]+[\,Ty_0,Ty_0\,]\Big)$. Luego,

$$\Big(\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty\,]\Big)^2 \leq -\Big(2\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty_0\,]+[\,Ty_0,Ty_0\,]\Big)\,[\,Ty,Ty\,]\,, \qquad \text{para todo } y\in\mathcal{C}_V.$$

En particular, para $y=y_0$,

$$([\,Ty_0,Ty_0\,]+\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty_0\,])^2\leq 0.$$

Entonces, $\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty_0\,]=-[\,Ty_0,Ty_0\,]$, y se sigue que

$$\big(\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty\,]\big)^2 \leq [\,Ty_0,Ty_0\,]\,[\,Ty,Ty\,]\,, \qquad \text{para todo } y\in\mathcal{C}_V.$$

Ahora, para un $y\in\mathcal{C}_V$ fijo, sea $\theta\in[0,2\pi)$ tal que $[\,Tx_0,Ty\,]=e^{i\theta}\,|\,[\,Tx_0,Ty\,]\,|$, y denotemos $v:=e^{i\theta}y\in\mathcal{C}_V$. Luego, $[\,Tv,Tv\,]=[\,Ty,Ty\,]$ y $\operatorname{Re}[\,Tx_0,Tv\,]=|\,[\,Tx_0,Ty\,]\,|$. Por lo tanto,

$$|\,[\,Tx_0,Ty\,]\,|^2 \leq [\,Ty_0,Ty_0\,]\,[\,Ty,Ty\,]\,, \qquad \text{para todo } y\in\mathcal{C}_V. \tag{5.7}$$

Aún más, dado que $\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty_0\,]=-[\,Ty_0,Ty_0\,]$, escogiendo $y=y_0$ en (5.7) implica que

$$\big(\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty_0\,]\big)^2 \leq |\,[\,Tx_0,Ty_0\,]\,|^2 \leq [\,Ty_0,Ty_0\,]^2\,.$$

Consecuentemente, la igualdad en (5.7) es alcanzada en $y=y_0$, en cuyo caso se cumple que $[\,T(x_0+y_0),Ty_0\,]=0$.

Recíprocamente, supongamos que (5.5) se satisface con igualdad cuando $y=y_0$. Luego,

$$\big(\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty\,]\big)^2 \leq |\,[\,Tx_0,Ty\,]\,|^2 \leq [\,Ty_0,Ty_0\,]\,[\,Ty,Ty\,]\,.$$

Sea $\theta\in[0,2\pi)$ tal que $[\,Tx_0,Ty_0\,]=e^{i\theta}\,|\,[\,Tx_0,Ty_0\,]\,|$, y fijemos $v_0:=-e^{i\theta}y_0\in\mathcal{C}_V$. Entonces, $[\,Tv_0,Tv_0\,]=[\,Ty_0,Ty_0\,]$ y $[\,Tx_0,Tv_0\,]=-|\,[\,Tx_0,Ty_0\,]\,|$. Dado que $|\,[\,Tx_0,Ty_0\,]\,|=[\,Ty_0,Ty_0\,]$, se sigue que $[\,T(x_0+v_0),Tv_0\,]=0$. Para un vector arbitrario (fijo) $y\in\mathcal{C}_V$ definamos $a=[\,Ty,Ty\,]$, $b=2\operatorname{Re}[\,Tx_0,Ty\,]$ y $c=-[\,Tv_0,Tv_0\,]-2\operatorname{Re}[\,Tx_0,Tv_0\,]$. Luego, $a\geq 0$, $b^2-4ac\leq 0$, y consecuentemente (5.4) se cumple.

Equivalentemente,

$$[\,T(x_0+v_0), T(x_0+v_0)\,] \leq [\,T(x_0+ty), T(x_0+ty)\,],$$

donde $y \in \mathcal{C}_V$ y $t \in \mathbb{R}$. Dado que $y \in \mathcal{C}_V$ es arbitrario, $x_0+v_0 \in sp(z_0)$. $\square$

Observación 5.6. Si $x_0 \in \mathcal{H}$ y $z_0 := Vx_0$ son tales que $sp(z_0) \neq \varnothing$, del Corolario 5.3 resulta que $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$.

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de (T,V)-interpolantes establecidas en la Proposición 5.5 pueden ser alternativamente expresadas mediante una transformación del problema de minimización en un probema dual de maximización. Con este fin, denotemos el conjunto

$$\mathcal{D} := \Big\{\, y \in \mathcal{C}_V : \; [\,Ty, Ty\,] = 1 \,\Big\}. \tag{5.8}$$

Dado $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$, definamos la función

$$\psi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{dada por} \quad \psi(y) = |\,[\,Tx_0, Ty\,]\,|\,.$$

Proposición 5.7. *Dado un vector $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$, sea $z_0 = Vx_0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$sp(z_0) \neq \varnothing$;*
2. *$\max\limits_{y \in \mathcal{D}} \psi(y)$ se alcanza.*

Demostración. Si $x_0 \in N(T)$, entonces $[\,T(x_0+y), T(x_0+y)\,] = [\,Ty, Ty\,] \geq 0$. Luego, es inmediato que $\min_{y\in\mathcal{C}_V} [\,T(x_0+y), T(x_0+y)\,] = 0$ y $sp(z_0) = x_0 + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$. Dado que $|\,[\,Tx_0, Ty\,]\,| = 0$ para todo $y \in \mathcal{C}_V$, se sigue el resultado deseado.

Ahora supongamos que $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp} \setminus N(T)$. Sea $sp(z_0) \neq \varnothing$, y sea $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$. Para todo $y \in \mathcal{C}_V \setminus \mathcal{C}_T$, (5.5) implica que

$$\left|\left[\,Tx_0, T\left(\frac{y}{[\,Ty, Ty\,]^{1/2}}\right)\right]\right|^2 \leq [\,Ty_0, Ty_0\,]\,.$$

Por (5.6), $[\,Ty_0, Ty_0\,] = -\,[\,Tx_0, Ty_0\,]$. Luego, para todo $y \in \mathcal{C}_V \setminus \mathcal{C}_T$

$$\left|\left[\,Tx_0, T\left(\frac{y}{[\,Ty, Ty\,]^{1/2}}\right)\right]\right|^2 \leq \left|\left[\,Tx_0, T\left(\frac{y_0}{[\,Ty_0, Ty_0\,]^{1/2}}\right)\right]\right|^2.$$

Es decir, el máximo es alcanzado en $y_0/\,[\,Ty_0, Ty_0\,]^{1/2}$.

Recíprocamente, supongamos que el máximo es alcanzado en $v_0 \in \mathcal{C}_V$. Entonces, para todo $y \in \mathcal{C}_V \setminus \mathcal{C}_T$,

$$\left| \left[Tx_0, T\left(\frac{y}{[\,Ty, Ty\,]^{1/2}} \right) \right] \right|^2 \leq |\,[\,Tx_0, Tv_0\,]\,|^2 . \tag{5.9}$$

Definamos $y_0 := -\,[\,Tx_0, Tv_0\,]\,v_0 \in \mathcal{C}_V$. Luego, $[\,Ty_0, Ty_0\,] = |\,[\,Tx_0, Tv_0\,]\,|^2$, y (5.9) asegura que para todo $y \in \mathcal{C}_V \setminus \mathcal{C}_T$,

$$|\,[\,Tx_0, Ty\,]\,|^2 \leq [\,Ty_0, Ty_0\,]\,[\,Ty, Ty\,] .$$

Dado que $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$, esta desigualdad es también válida para cada $y \in \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$. Por otro lado, en vista de que $[\,Tx_0, Ty_0\,] = -\,|\,[\,Tx_0, Tv_0\,]\,|^2 = -\,[\,Ty_0, Ty_0\,]$, la aserción se sigue de la Proposición 5.5. $\square$

Como consecuencia de la prueba de la Proposición 5.7, el siguiente corolario establece la relación entre las soluciones del problema de minimización y el problema dual de maximización para el caso en que $x_0 \notin N(T)$ (de la mencionada prueba, si $x_0 \in N(T)$ y $z_0 = Vx_0$, entonces $\psi \equiv 0$ y $sp(z_0) = x_0 + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$).

Corolario 5.8. *Dado $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp} \setminus N(T)$, sea $z_0 = Vx_0$. Si $sp(z_0) \neq \varnothing$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *si $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$, entonces $v_0 := \frac{y_0}{[\,Ty_0, Ty_0\,]^{1/2}} \in \mathcal{D}$ y $\psi(v_0) = \max_{y \in \mathcal{D}} \psi(y)$;*
2. *si $v_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\psi(v_0) = \max_{y \in \mathcal{D}} \psi(y)$, entonces $x_0 - [\,Tx_0, Tv_0\,]\,v_0 \in sp(z_0)$.*

Ahora procedemos a proveer otra caracterización de las soluciones del Problema 2 a través de una ecuación normal. Antes de expresar el resultado principal, analizamos el caso particular en que existen soluciones $\widetilde{x}$ que no solamente satisfacen que $[\,V\widetilde{x} - z_0, V\widetilde{x} - z_0\,] = 0$, sino que también pertenecen a la preimagen $V^{-1}(\{\, z_0 \,\})$. El siguiente lema trata con este caso.

Lema 5.9. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que $V\widetilde{x} = z_0$. Entonces,*

$$\widetilde{x} \in sp(z_0) \quad \textit{si y sólo si} \quad \widetilde{x} \in N(T).$$

En este caso, $sp(z_0) = \widetilde{x} + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$.

Demostración. Supongamos que $\widetilde{x} \in sp(z_0)$, y sea $y \in \mathcal{C}_V$. Dado que $\widetilde{x} \in sp(z_0)$,

$$[\,T\widetilde{x}, T\widetilde{x}\,] \leq [\,T(\widetilde{x}+y), T(\widetilde{x}+y)\,]\,. \tag{5.10}$$

Entonces, de la Proposición 5.5,

$$|\,[\,T\widetilde{x}, Ty\,]\,|^2 \leq [\,T\widetilde{y}_0, T\widetilde{y}_0\,]\,[\,Ty, Ty\,]\,, \qquad \text{para todo } y \in \mathcal{C}_V, \tag{5.11}$$

donde $\widetilde{y}_0 \in \mathcal{C}_V$ es el punto donde el mínimo

$$\min_{y \in \mathcal{C}_V}\ [\,T(\widetilde{x}+y), T(\widetilde{x}+y)\,]$$

es alcanzado. De (5.10), estableciendo $\widetilde{y}_0 = 0$ se satisface (5.11), y consecuentemente $[\,T\widetilde{x}, Ty\,] = 0$ para todo $y \in \mathcal{C}_V$. Luego, $T^{\#}T\widetilde{x} \in \mathcal{C}_V^{\perp} = \{\,0\,\}$, y, dado que $T^{\#}$ es inyectivo, $\widetilde{x} \in N(T)$.

Recíprocamente, supongamos que $\widetilde{x} \in N(T)$. Si $y \in \mathcal{C}_V$, y considerando que $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo,

$$[\,T(\widetilde{x}+y), T(\widetilde{x}+y)\,] = [\,Ty, Ty\,] \geq 0. \tag{5.12}$$

Estableciendo $y = 0$ en (5.12), el mínimo es entonces alcanzado, y consecuentemente $\widetilde{x} \in sp(z_0)$. Más aún, el mínimo es alcanzado si y sólo si $y \in \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$. □

El siguiente teorema establece la ecuación normal que caracteriza las soluciones del Problema 2 en el caso general. Observemos que, dado que estamos suponiendo que $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$, los parámetros $\rho_{\pm}$ introducidos en el Corolario 3.7 están bien definidos.

Teorema 5.10. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que $[\,V\widetilde{x} - z_0, V\widetilde{x} - z_0\,] = 0$. Entonces, $\widetilde{x} \in sp(z_0)$ si y sólo si existe $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que*

$$(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)\widetilde{x} = \lambda V^{\#}z_0. \tag{5.13}$$

Demostración. Consideremos la función $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [\,Tx, Tx\,]$, $x \in \mathcal{H}$. Esta función es diferenciable fréchet para todo $x \in \mathcal{H}$ y su derivada de Fréchet en x está dada por:

$$Df(x)\,\Delta x = 2\,\mathrm{Re}([\,Tx, T\Delta x\,]), \qquad \Delta x \in \mathcal{H}.$$

En efecto, dado $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(x+\Delta x) - f(x) - Df(x)\Delta x|}{\|\Delta x\|} = \\
&= \frac{|2\operatorname{Re}([\,Tx, T\Delta x\,]) + [\,T\Delta x, T\Delta x\,] - 2\operatorname{Re}([\,Tx, T\Delta x\,])|}{\|\Delta x\|} \\
&= \frac{|[\,T\Delta x, T\Delta x\,]_{\mathcal{K}}|}{\|\Delta x\|} \leq \|T\|^2 \|\Delta x\| \xrightarrow[\|\Delta x\| \to 0]{} 0.
\end{aligned}$$

Análogamente, la función $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = [\,Vx - z_0, Vx - z_0\,]$, $x \in \mathcal{H}$, es diferenciable Fréchet para todo $x \in \mathcal{H}$ y su derivada de Fréchet en x está dada por:

$$Dg(x)\,\Delta x = 2\operatorname{Re}([\,Vx - z_0, V\Delta x\,]), \quad \Delta x \in \mathcal{H}.$$

De la misma forma, las derivadas de Fréchet de segundo orden en $x \in \mathcal{H}$ están dadas por:

$$D^2 f(x)(\Delta x_1, \Delta x_2) = 2\operatorname{Re}([\,T\Delta x_1, T\Delta x_2\,]), \quad \Delta x_1, \Delta x_2 \in \mathcal{H},$$

$$D^2 g(x)(\Delta x_1, \Delta x_2) = 2\operatorname{Re}([\,V\Delta x_1, V\Delta x_2\,]), \quad \Delta x_1, \Delta x_2 \in \mathcal{H}.$$

Ahora, supongamos que $\widetilde{x} \in sp(z_0)$. Si $V\widetilde{x} = z_0$, entonces el resultado se sigue del Lema 5.9, escogiendo un $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ arbitrario. Por el otro lado, si $V\widetilde{x} \neq z_0$, considerando que

$$Dg(\widetilde{x})\Delta x = 2\operatorname{Re}([\,V\widetilde{x} - z_0, V\Delta x\,]), \quad \Delta x \in \mathcal{H},$$

$Dg(\widetilde{x}) \neq 0$. Luego, por el Teorema 2.8 existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Df(\widetilde{x}) + \lambda Dg(\widetilde{x}) = 0$, i.e.

$$\operatorname{Re}([\,T\widetilde{x}, T\Delta x\,] + \lambda\,[\,V\widetilde{x} - z_0, V\Delta x\,]) = 0, \quad \text{para todo } \Delta x \in \mathcal{H}.$$

Reemplazando Δx por $-i\Delta x$, la parte imaginaria también se anula. Entonces,

$$[\,T\widetilde{x}, T\Delta x\,] + \lambda\,[\,V\widetilde{x} - z_0, V\Delta x\,] = 0, \quad \text{para todo } \Delta x \in \mathcal{H}.$$

En consecuencia,

$$(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)\widetilde{x} = \lambda V^{\#} z_0.$$

Además, por la Proposición 2.7, para todo $\Delta x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
0 \leq D^2\,(f + \lambda g)\,(\widetilde{x}) \cdot (\Delta x, \Delta x) &= 2\operatorname{Re}[\,T\Delta x, T\Delta x\,]_{\mathcal{K}} + \lambda 2\operatorname{Re}[\,V\Delta x, V\Delta x\,]_{\mathcal{E}} \\
&= 2\left\langle\, (T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)\Delta x, \Delta x \,\right\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces $T^\# T + \lambda V^\# V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$, o equivalentemente, por el Corolario 3.7, $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$.

Recíprocamente, supongamos que existe $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que $(T^\# T + \lambda V^\# V)\widetilde{x} = \lambda V^\# z_0$. Dado que $[\, V\widetilde{x} - z_0, V\widetilde{x} - z_0 \,] = 0$, fijando $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$, existe $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que $\widetilde{x} = x_0 + y_0$. Luego, $(T^\# T + \lambda V^\# V)y_0 = -T^\# T x_0$. Sea $y \in \mathcal{C}_V$, entonces $\left\langle\, (T^\# T + \lambda V^\# V)y, y \,\right\rangle = [\, Ty, Ty \,]$, y consecuentemente

$$\begin{aligned} |\, [\, Tx_0, Ty \,] \,|^2 &= \left|\, \left\langle\, -(T^\# T + \lambda V^\# V)y_0, y \,\right\rangle \,\right|^2 \\ &\leq \left\langle\, (T^\# T + \lambda V^\# V)y_0, y_0 \,\right\rangle \left\langle\, (T^\# T + \lambda V^\# V)y, y \,\right\rangle \\ &= [\, Ty_0, Ty_0 \,]\, [\, Ty, Ty \,]\, . \end{aligned}$$

Además, $[\, Tx_0, Ty_0 \,] = -\left\langle\, (T^\# T + \lambda V^\# V)y_0, y_0 \,\right\rangle = -\, [\, Ty_0, Ty_0 \,]$. Entonces, el resultado se sigue de la Proposición 5.5. $\square$

Si $z_0 \in V(N(T))$, entonces, por el Lema 5.9, la ecuación normal (5.13) se reduce a

$$T^\# T \widetilde{x} = 0, \tag{5.14}$$

para todo $\widetilde{x} \in sp(z_0)$, y por ende se satisface para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, si $\widetilde{x}$ es tal que $V\widetilde{x} = z_0$ y $\widetilde{x}$ satisface (5.14),

$$sp(z_0) = \widetilde{x} + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V .$$

Por otro lado, si $z_0 \in \mathcal{E} \setminus V(N(T))$, para cada $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ sea x_λ una solución particular de la ecuación normal (5.13) correspondiente a este λ. Entonces, el conjunto $sp(z_0)$ se encuentra a priori contenido en una unión de variedades afines; más precisamente,

$$sp(z_0) \subseteq \bigcup_{\lambda \in [\rho_-, \rho_+]} \big(x_\lambda + N(T^\# T + \lambda V^\# V) \big) .$$

Sin embargo, la siguiente proposición muestra que en este caso el λ que aparece en (5.13) es único, y si $\widetilde{x}$ es una solución particular de (5.13) entonces

$$\widetilde{x} + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V \subseteq sp(z_0) \subseteq \widetilde{x} + N(T^\# T + \lambda V^\# V). \tag{5.15}$$

Proposición 5.11. *Dado $z_0 \in \mathcal{E} \setminus V(N(T))$, supongamos que $sp(z_0) \neq \varnothing$. Entonces,* *existe un único* $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ *tal que*

$$(T^\# T + \lambda V^\# V)\widetilde{x} = \lambda V^\# z_0,$$

para todo $\widetilde{x} \in sp(z_0)$.

Demostración. Si $\rho_- = \rho_+$, entonces el resultado es trivial. Supongamos ahora que $\rho_- \neq \rho_+$. Dados $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in sp(z_0)$, $\widetilde{x}_1 \neq \widetilde{x}_2$, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in [\rho_-, \rho_+]$ tales que

$$(T^\# T + \lambda_1 V^\# V)\widetilde{x}_1 = \lambda_1 V^\# z_0,$$

$$(T^\# T + \lambda_2 V^\# V)\widetilde{x}_2 = \lambda_2 V^\# z_0.$$

Dado $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$, sean $y_1, y_2 \in \mathcal{C}_V$ tales que $\widetilde{x}_1 = x_0 + y_1$ y $\widetilde{x}_2 = x_0 + y_2$. Entonces,

$$(T^\# T + \lambda_1 V^\# V)y_1 = -T^\# T x_0 = (T^\# T + \lambda_2 V^\# V)y_2. \tag{5.16}$$

Dado que $T^\# T x_0 \neq 0$, es claro que $y_1, y_2 \notin N(T) \cap N(V)$. Más aún, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y_1, y_2 \in (N(T) \cap N(V))^\perp$ porque $\mathcal{C}_V + N(V) = \mathcal{C}_V$.

De la Proposición 5.5, para $i = 1, 2$, $[\, Tx_0, Ty_i \,] = -\, [\, Ty_i, Ty_i \,]$ y

$$[\, T\widetilde{x}_i, T\widetilde{x}_i \,] = [\, Tx_0, Tx_0 \,] - [\, Ty_i, Ty_i \,].$$

Consecuentemente, $[\, Ty_1, Ty_1 \,] = [\, Ty_2, Ty_2 \,]$ y

$$-\, [\, Tx_0, Ty_1 \,] = [\, Ty_1, Ty_1 \,] = [\, Ty_2, Ty_2 \,] = -\, [\, Tx_0, Ty_2 \,]. \tag{5.17}$$

Además, de (5.16),

$$[\, Ty_1, Ty_2 \,] + \lambda_1 \, [\, Vy_1, Vy_2 \,] = -\, [\, Tx_0, Ty_2 \,],$$

$$[\, Ty_2, Ty_1 \,] + \lambda_2 \, [\, Vy_2, Vy_1 \,] = -\, [\, Tx_0, Ty_1 \,].$$

Supongamos que $[\, Vy_1, Vy_2 \,] \neq 0$. Dado que $[\, Tx_0, Ty_1 \,] = [\, Tx_0, Ty_2 \,] \in \mathbb{R}$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$. Por el otro lado, si $[\, Vy_1, Vy_2 \,] = 0$ entonces, de (5.17),

$$[\, Ty_1, Ty_2 \,] = -\, [\, Tx_0, Ty_1 \,] = [\, Ty_1, Ty_1 \,]^{1/2} \, [\, Ty_2, Ty_2 \,]^{1/2}. \tag{5.18}$$

Dado $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$, si consideramos el producto interno inducido por el operador $T^\# T +$

$\rho V^{\#}V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$, entonces (5.18) puede reescribirse como

$$\left| \left\langle (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)y_1, y_2 \right\rangle \right| = \left\langle (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)y_1, y_1 \right\rangle^{1/2} \left\langle (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)y_2, y_2 \right\rangle^{1/2}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V) = N(T) \cap N(V),$$

donde la igualdad entre los subespacios es una consecuencia del Lema 3.11. Dado que $y_1, y_2 \in (N(T) \cap N(V))^{\perp}$, y_1 e y_2 son linealmente dependientes. Luego, haciendo uso de las igualdades $[\,Ty_1, Ty_2\,] = [\,Ty_1, Ty_1\,] = [\,Ty_2, Ty_2\,]$ es fácil ver que $y_1 = y_2$, llegando a una contradicción. □

Si $z_0 \in \mathcal{E} \setminus V(N(T))$, (5.15) podría inducirnos a pensar que $sp(z_0)$ es una variedad afín. Sin embargo, éste no es el caso en general. En efecto, el conjunto $sp(z_0)$ puede ser interpretado como una unión de variedades afines paralelas al subespacio $N(T) \cap N(V)$. Considerando un vector $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$, luego

$$sp(z_0) = \bigcup_{y \in \Theta} \left(\, x_0 + y + N(T) \cap N(V) \, \right),$$

donde Θ es el conjunto de puntos $y_0 \in \mathcal{C}_V$ que satisfacen que $(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)(x_0 + y_0) = \lambda V^{\#}z_0$, con $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$. El ejemplo a continuación muestra que $sp(z_0)$ no necesariamente es una única variedad afín paralela a $N(T) \cap N(V)$.

Ejemplo 5.12. Consideremos un operador sobreyectivo $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ tal que $V^{\#}V = J$ es una simetría. Notemos que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, donde $\mathcal{H}_\pm = N(I \mp J)$. Además, supongamos que el operador sobreyectivo $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ puede representarse como

$$T^{\#}T = \begin{bmatrix} 2I_+ & 0 \\ 0 & -I_- \end{bmatrix},$$

de acuerdo a esta descomposición. Luego, para todo $x = x_+ + x_-$ con $x_\pm \in \mathcal{H}_\pm$ resulta que $[\,Vx, Vx\,] = \|x_+\|^2 - \|x_-\|^2$. Entonces,

$$\mathcal{C}_V = \Big\{ \, y = y_+ + y_- : \; y_\pm \in \mathcal{H}_\pm \text{ with } \|y_+\| = \|y_-\| \, \Big\}. \tag{5.19}$$

Es inmediato que $sp(z_0) = \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V = \{\,0\,\}$ si $z_0 = 0$. Supongamos ahora que $z_0 \neq 0$, y sea $x_0 = x_0^+ + x_0^- \in \mathcal{H}$ con $x_{0\pm} \in \mathcal{H}_\pm$ tal que $Vx_0 = z_0$. Procedemos a realizar dos análisis diferentes: primero mediante el problema dual de maximización, y luego mediante la ecuación normal.

1. Mediante el problema dual de maximización:

Dados $x, y \in \mathcal{H}$, escribiendo $x = x_+ + x_-$, $y = y_+ + y_-$ con $x_\pm, y_\pm \in \mathcal{H}_\pm$, se tiene que $[\,Tx, Ty\,] = 2\,\langle\, x_+, y_+\,\rangle - \langle\, x_-, y_-\,\rangle$. Luego,

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{x_+}{\|x_+\|} + \frac{x_-}{\|x_-\|} \;:\; x_\pm \in \mathcal{H}_\pm,\; x_\pm \neq 0 \right\}.$$

Supongamos que $x_0 = x_0^+ + x_0^-$ con $x_{0\pm} \in \mathcal{H}_\pm$, y sea $y \in \mathcal{D}$. Entonces, existe $x_\pm \in \mathcal{H}_\pm$, $x_\pm \neq 0$ tal que

$$|\,[\,Tx_0, Ty\,]\,| = \left| 2\frac{\left\langle\, x_0^+, x_+ \,\right\rangle}{\|x_+\|} - \frac{\left\langle\, x_0^-, x_- \,\right\rangle}{\|x_-\|} \right| \leq 2\|x_0^+\| + \|x_0^-\|. \tag{5.20}$$

Del Corolario 5.8, dado $y_0 \in \mathcal{C}_V$, $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$ si y sólo si $y_0 = -\,[\,Tx_0, Tv_0\,]\,v_0$, donde $v_0 \in \mathcal{D}$ satisface que

$$\max_{y\in\mathcal{D}} |\,[\,Tx_0, Ty\,]\,| = |\,[\,Tx_0, Tv_0\,]\,|\,. \tag{5.21}$$

Supongamos primero que $x_0^+ \neq 0$ y $x_0^- \neq 0$. Luego, de (5.20) es inmediato que v_0 alcanza el máximo en (5.21) si y sólo si $v_0 = e^{i\theta}\Big(\frac{x_0^+}{\|x_0^+\|} - \frac{x_0^-}{\|x_0^-\|}\Big)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. En este caso, $sp(z_0)$ es un conjunto de un solo elemento; más precisamente,

$$sp(z_0) = \left\{ -\left(1 + \frac{\|x_0^-\|}{\|x_0^+\|}\right) x_0^+ + 2\left(1 + \frac{\|x_0^+\|}{\|x_0^-\|}\right) x_0^- \right\}. \tag{5.22}$$

Ahora consideremos el caso $x_0^- = 0$. Entonces, v_0 alcanza el máximo en (5.21) si y sólo si $v_0 = e^{i\theta}\Big(\frac{x_0^+}{\|x_0^+\|} + x_-\Big)$ donde $\theta \in [0, 2\pi)$ y $x_- \in \mathcal{H}_-$ es un vector arbitrario con $\|x_-\| = 1$. Consecuentemente,

$$sp(z_0) = \Big\{ -x_0^+ + 2\|x_0^+\|x_- \;:\; x_- \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_-} \Big\}, \tag{5.23}$$

donde $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_-}$ es la esfera unitaria en $\mathcal{H}_-$.

Análogamente, si $x_0^+ = 0$ y $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_+}$ es la esfera unitaria en $\mathcal{H}_+$, entonces

$$sp(z_0) = \Big\{ 2x_0^- + \|x_0^-\|x_+ \;:\; x_+ \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_+} \Big\}. \tag{5.24}$$

2. Mediante la ecuación normal:

En primer lugar, si descomponemos a $x \in \mathcal{H}$ como $x = x_+ + x_-$ con $x_\pm \in \mathcal{H}_\pm$, entonces, dado un $\rho \neq 0$,

$$\left\langle\, (T^\# T + \rho V^\# V)x, x \,\right\rangle = (2+\rho)\|x_+\|^2 - (1+\rho)\|x_-\|^2.$$

Luego, $T^\# T + \rho V^\# V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$ si y sólo si $2+\rho \geq 0$ y $-(1+\rho) \geq 0$. En consecuencia,

$$\rho_- = -2 \quad \text{y} \quad \rho_+ = -1.$$

Sea $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$, por la Proposición 5.11 existe un único $\lambda \in [-2,-1]$ tal que

$$(T^\# T + \lambda V^\# V)(x_0 + y_0) = \lambda V^\# z_0 = \lambda V^\# V x_0.$$

o equivalentemente

$$(T^\# T + \lambda V^\# V)y_0 = -T^\# T x_0.$$

Para el caso particular en consideración, si descomponemos a y_0 como $y_0 = y_0^+ + y_0^-$ con $y_{0\pm} \in \mathcal{H}_\pm$ tales que $\|y_0^+\| = \|y_0^-\|$ (de acuerdo a (5.19)), esta expresión se traduce en

$$(2+\lambda)y_0^+ - (1+\lambda)y_0^- = -2x_0^+ + x_0^-.$$

Equivalentemente, obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} (2+\lambda)y_0^+ &= -2x_0^+, \\ -(1+\lambda)y_0^- &= x_0^-. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Observemos que si $y_0^+ = 0$, entonces $y_0^- = 0$ y consecuentemente $x_{0\pm} = 0$, que es una contradicción ya que $Vx_0 = z_0 \neq 0$. Lo mismo sucede si suponemos que $y_0^- = 0$. Supongamos, en primer lugar, que $x_{0_+} \neq 0$ y $x_0^- \neq 0$. Luego, del sistema de ecuaciones (5.25), $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq -1$, por lo que $\lambda \in (-2,-1)$. Considerando que $\|y_0^+\| = \|y_0^-\|$, se sigue que

$$\frac{-2\|x_0^+\|}{(2+\lambda)} = \frac{-\|x_0^-\|}{(1+\lambda)},$$

o equivalentemente

$$\lambda = -2\,\frac{\|x_0^+\| + \|x_0^-\|}{2\|x_0^+\| + \|x_0^-\|} \in (-2,-1).$$

Reemplazando esta expresión en (5.25),

$$
\begin{aligned}
y_0^+ &= \frac{-2}{2+\lambda}x_0^+ = -\left(2+\frac{\|x_0^+\|}{\|x_0^-\|}\right)x_0^+,\\
y_0^- &= \frac{-1}{1+\lambda}x_0^- = \left(1+2\frac{\|x_0^+\|}{\|x_0^-\|}\right)x_0^-.
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
x_0+y_0 = -\left(1+\frac{\|x_0^-\|}{\|x_0^+\|}\right)x_0^+ + 2\left(1+\frac{\|x_0^+\|}{\|x_0^-\|}\right)x_0^-,
$$

recuperando así el resultado obtenido en (5.22).

Supongamos ahora que $x_0^- = 0$. Dado que $y_0^- \neq 0$, de (5.25) resulta que $\lambda = -1$ e $y_0^+ = -2x_0^+$. Además, y_0^- debe satisfacer que $\|y_0^-\| = \|y_0^+\| = 2\|x_0^+\|$, de donde se obtiene inmediatamente (5.23).

Análogamente, si $x_0^+ = 0$, (5.25) implica que $\lambda = -2$, $y_0^- = x_0^-$, e y_0^+ debe satisfacer que $\|y_0^+\| = \|x_0^-\|$, de donde obtenemos (5.24).

5.3 Existencia de splines interpolantes para todo punto

En esta sección obtenemos condiciones necesarias y suficientes para que el problema de interpolación abstracta indefinida admita solución para todo punto, i.e. $sp(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$.

Consideremos
Capítulo 3, recordemos el producto interno y la seminorma en $\mathcal{H}$ dados por (3.11) y (3.12), respectivamente:

$$
(\, x, y\,)_\rho := \left\langle\, L^\# Lx, y \,\right\rangle, \quad x, y \in \mathcal{H};
$$

$$
\|x\|_\rho = (\, x, x\,)_\rho^{1/2} = \left\langle\, L^\# Lx, x \,\right\rangle^{1/2}, \quad x \in \mathcal{H}.
$$

Dado $x \in \mathcal{H}$ y un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$, $\mathrm{d}(x, \mathcal{M})$ denota la pseudo-distancia entre x y $\mathcal{M}$

con respecto a la seminorma $\|\cdot\|_\rho$:

$$\mathrm{d}(x,\mathcal{M}) = \text{ínf}\left\{ \|x-m\|_\rho : \; m \in M \right\}.$$

A continuación, bajo la hipótesis adicional de que $T^\# T x_0 \in R(L^\# L)$, mostramos cómo las Proposiciones 5.5 y 5.7 pueden ser reinterpretadas en este contexto. Observemos que si denotamos por $\mathcal{S}_\rho$ a la esfera unitaria en $\mathcal{H}$ con respecto a la seminorma $\|\cdot\|_\rho$:

$$\mathcal{S}_\rho = \left\{ x \in \mathcal{H} : \; \|x\|_\rho = 1 \right\},$$

entonces el conjunto $\mathcal{D}$ definido en (5.8) se traduce en

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_V \cap \mathcal{S}_\rho.$$

Proposición 5.13. *Dado $x_0 \in \mathcal{H}$, supongamos que existe un vector $u_0 \in R(L^\# L)$ tal que $T^\# T x_0 = L^\# L u_0$. Si $z_0 = V x_0 \in \mathcal{E}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $sp(z_0) \neq \varnothing$*;*
2. $\mathrm{d}(u_0, \mathcal{C}_V)$ *es alcanzada;*
3. $\mathrm{d}(u_0, \mathcal{D})$ *es alcanzada.*

Demostración.

1.↔2. Dado que $[\,Tx_0, Ty\,] = \left\langle\, L^\# L u_0, y \,\right\rangle = (\, u_0, y\,)_\rho$ y $[\,Ty, Ty\,] = \|y\|_\rho^2$ para todo $y \in \mathcal{C}_V$, (5.5) es equivalente a

$$|\,(\, u_0, y\,)_\rho\,|^2 \leq \|y_0\|_\rho^2 \, \|y\|_\rho^2. \tag{5.26}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la prueba de la Proposición 5.5, (5.26) se satisface para todo $y \in \mathcal{C}_V$ para algún $y_0 \in \mathcal{C}_V$, y con igualdad cuando $y = y_0$, si y sólo si

$$\mathrm{d}(u_0, \mathcal{C}_V) = \inf_{y \in \mathcal{C}_V} \|u_0 + y\|_\rho$$

es alcanzada.

1.↔3. En primer lugar, notemos que

$$R(L^\# L) \subseteq N(L^\# L)^\perp \subseteq (\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^\perp$$

porque $\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V \subseteq N(L^{\#}L)$. Si $T^{\#}Tx_0 \in R(L^{\#}L)$, entonces $T^{\#}Tx_0 \in (\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$, y consecuentemente, por (2.6), $x_0 \in T^{\#}T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^{\perp}$. Luego, de la Proposición 5.7 $sp(z_0) \neq \varnothing$ si y sólo si el máximo

$$\max_{y \in \mathcal{D}} \psi(y) = \max_{y \in \mathcal{D}} |\,[\,Tx_0, Ty\,]\,|$$

es alcanzado. Además, si $y \in \mathcal{D}$ entonces

$$[\,Tx_0, Ty\,] = \left\langle\, L^{\#}Lu_0, y \,\right\rangle = (\,u_0, y\,)_\rho \quad \text{y} \quad \|y\|_\rho = 1.$$

Luego,

$$\|u_0 - y\|_\rho^2 = \|u_0\|_\rho^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\,u_0, y\,)_\rho + \|y\|_\rho^2 = \big(\|u_0\|_\rho^2 + 1\big) - 2\,\mathrm{Re}\,[\,Tx_0, Ty\,]\,,$$

y la aserción se sigue inmediatamente. □

Recordemos la definición de proximinalidad expuesta en los Preliminares: sea $\mathcal{M}$ un subconjunto no vacío de un espacio normado $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. El subconjunto $\mathcal{M}$ es denominado *proximinal* (resp. *de Chebyshev*) si para cada $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{M}$, el conjunto de mejores aproximantes de x en $\mathcal{M}$,

$$A_{\mathcal{M}}(x) = \Big\{\, y \in \mathcal{M} \;:\; \|y - x\| = \mathrm{d}(x, \mathcal{M}) \,\Big\},$$

es no vacío (resp. contiene un solo elemento).

Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach reflexivo (por ejemplo, un espacio de Hilbert), entonces todo subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{X}$ débilmente cerrado es proximinal [71, Teorema 4.28]. Éste es uno de los argumentos principales en la prueba del siguiente teorema.

Previamente, observemos que si bien $\mathcal{C}_V$ no es un conjunto débilmente compacto, sí es débilmente cerrado.

Lema 5.14. *El conjunto $\mathcal{C}_V$ es débilmente cerrado en $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$.*

Demostración. Dado que $F := V^{\#}V$ es un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$, existen (únicos) subespacios cerrados $\mathcal{H}_\pm$ de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus N(V)$, y (únicos) operadores invertibles $F_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)^+$ tales que $F = F_+ - F_-$.

Dado $y \in \mathcal{H}$ descompuesto como $y = y_+ + y_- + y_0$ con $y_\pm \in \mathcal{H}_\pm$ y $y_0 \in N(V)$, notemos que

$$[Vy, Vy] = \langle Fy, y \rangle = \langle F_+ y_+, y_+ \rangle - \langle F_- y_-, y_- \rangle = \|F_+^{1/2} y_+\|^2 - \|F_-^{1/2} y_-\|^2.$$

Luego, $y \in \mathcal{C}_V$ si y sólo si $\|F_+^{1/2} y_+\| = \|F_-^{1/2} y_-\|$.

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_V$ tal que $y_n \xrightarrow{w} y \in \mathcal{H}$, donde $y_n = y_n^+ + y_n^- + y_n^0$, $y = y_+ + y_- + y_0$, $y_n^\pm, y_\pm \in \mathcal{H}_\pm$, $y_n^0, y_0 \in N(V)$, y $\|F_+^{1/2} y_n^+\| = \|F_-^{1/2} y_n^-\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es inmediato que $y_n^\pm \xrightarrow{w} y_\pm$ y $y_n^0 \xrightarrow{w} y_0$. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n^+ = 0$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\|F_-^{1/2} y_n^-\| = \|F_+^{1/2} y_n^+\| = 0$ para $n \geq n_0$ y, dado que $F_-^{1/2}$ es invertible en $\mathcal{H}_-$, se sigue que $y_n^- = 0$ para todo $n \geq n_0$. Luego, $y_\pm = 0$ y $y = y_0 \in N(V) \subseteq \mathcal{C}_V$. Lo mismo se cumple si suponemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n^- = 0$ para todo $n \geq n_0$.

Por otro lado, si para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \geq n_0$ tal que $y_n^\pm \neq 0$, existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_{n_k}^\pm \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $y_n^\pm \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $F_\pm^{1/2}$ es invertible en $\mathcal{H}_\pm$ resulta que $\|F_\pm^{1/2} y_n^\pm\| \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad débil de la esfera unitaria en $\mathcal{H}_+$, existe una subsucesión $(F_+^{1/2} y_{n_k}^+ / \|F_+^{1/2} y_{n_k}^+\|)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (F_+^{1/2} y_n^+ / \|F_+^{1/2} y_n^+\|)_{n\in\mathbb{N}}$ y $x_+ \in \mathcal{H}_+$ tales que $F_+^{1/2} y_{n_k}^+ / \|F_+^{1/2} y_{n_k}^+\| \xrightarrow[k\to\infty]{w} F_+^{1/2} x_+ / \|F_+^{1/2} x_+\|$.

Para todo $x \in \mathcal{H}_+$,

$$\|F_+^{1/2} y_{n_k}^+\| \left\langle F_+^{-1/2} x, \frac{F_+^{1/2} y_{n_k}^+}{\|F_+^{1/2} y_{n_k}^+\|} \right\rangle = \langle x, y_{n_k}^+ \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \langle x, y_+ \rangle,$$

y además

$$\left\langle F_+^{-1/2} x, \frac{F_+^{1/2} y_{n_k}^+}{\|F_+^{1/2} y_{n_k}^+\|} \right\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \left\langle F_+^{-1/2} x, \frac{F_+^{1/2} x_+}{\|F_+^{1/2} x_+\|} \right\rangle = \left\langle x, \frac{x_+}{\|F_+^{1/2} x_+\|} \right\rangle.$$

Luego, existe $A_+ \geq 0$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|F_+^{1/2} y_{n_k}^+\| = A_+$, y $y_+ = A_+(x_+ / \|F_+^{1/2} x_+\|)$. En consecuencia, $A_+ = \|F_+^{1/2} y_+\|$.

Aplicando el mismo procedimiento a $(y_{n_k}^-)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}_-$ resulta en que existe una subsucesión $(y_{n_{k_l}}^-)_{l\in\mathbb{N}}$ de $(y_{n_k}^-)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{l\to\infty} \|F_-^{1/2} y_{n_{k_l}}^-\| = \|F_-^{1/2} y_-\|$. En vista de que $\|F_+^{1/2} y_{n_{k_l}}^+\| = \|F_-^{1/2} y_{n_{k_l}}^-\|$ para todo $l \in \mathbb{N}$, se cumple que $\|F_+^{1/2} y_+\| = \|F_-^{1/2} y_-\|$. Entonces $y \in \mathcal{C}_V$, completando la demostración. $\square$

A continuación, presentamos una condición suficiente para la existencia de splines interpolantes indefinidos para todo punto $z_0 \in \mathcal{E}$.

Teorema 5.15. *Si $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para algún $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$, enonces $sp(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Observemos, en primer lugar, que la Proposición 3.25 establece que $\rho_- \neq \rho_+$, y $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

Para probar el teorema, hacemos uso de la Proposición 5.13. Con este fin, mostramos primero que $T^\# Tx \in R(L^\# L)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. De la Proposición 2.66, $R(L)$ es un subespacio regular. Luego, por la Proposición 3.3, $R(L^\# L) = R(T^\# T) + R(V^\# V)$, y consecuentemente $R(T^\# T) \subseteq R(L^\# L)$.

Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sean $x_0, u_0 \in \mathcal{H}$ tales que $Vx_0 = z_0$ y $T^\# Tx_0 = L^\# Lu_0$. Entonces la distancia $\mathrm{d}(u_0, \mathcal{C}_V)$ es alcanzada.

Para probar esta aserción, primero notemos que $\mathrm{d}(u_0, \mathcal{C}_V) = \mathrm{d}(u_0, \mathcal{C}_V \cap \mathcal{H}')$, donde $\mathcal{H}' = N(T)^\perp + N(V)^\perp = R(L^\# L)$. En efecto, $R(L)$ es no degenerado y pseudo-regular (ver la Proposición 2.68), entonces $R(L^\# L)$ es cerrado y $N(L^\# L) = N(T) \cap N(V)$, por la Proposición 3.3. Luego, dado que $\mathcal{C}_V + N(V) = \mathcal{C}_V$, resulta que

$$\mathcal{C}_V = \mathcal{C}_V \cap \mathcal{H}' + N(T) \cap N(V),$$

y en consecuencia

$$\operatorname*{ínf}_{y \in \mathcal{C}_V} \|u_0 - y\|_\rho^2 = \operatorname*{ínf}_{y \in \mathcal{C}_V} \left\langle L^\# L(u_0 - y), u_0 - y \right\rangle = \operatorname*{ínf}_{y \in \mathcal{C}_V \cap \mathcal{H}'} \|u_0 - y\|_\rho^2.$$

La Proposición 3.23 asegura que $(\mathcal{H}', (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$ es un espacio de Hilbert. Además, por el Corolario 3.24, las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\rho$ son equivalentes en $\mathcal{H}'$. Por el Lema 5.14, $\mathcal{C}_V$ es débilmente cerrado en $(\mathcal{H}, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$, pero por la equivalencia de las normas $\mathcal{C}_V \cap \mathcal{H}'$ también es débilmente cerrado en $(\mathcal{H}', (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$. En consecuencia, $\mathcal{C}_V \cap \mathcal{H}'$ es un conjunto proximinal.

Dado que $\mathrm{d}(u_0, \mathcal{C}_V)$ es alcanzada, la Proposición 5.13 asegura que $sp(z_0) \neq \varnothing$. □

En 1961, Victor Klee [88] se preguntó si un conjunto de Chebyshev en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ debe ser convexo. Si $\mathcal{H}$ es finito dimensional, entonces la respuesta es sí. Por otro lado, si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert infinito dimensional, es sabido que si $\mathcal{M}$ es un conjunto de Chebyshev débilmente cerrado entonces $\mathcal{M}$ es convexo [6], sin embargo aún no existe una respuesta definitiva a la pregunta de Klee. De acuerdo a F. Deutsch [48], éste es tal vez el problema más importante sin resolver en la teoría de aproximación abstracta.

Del Ejemplo 5.12, $\mathcal{C}_V \cap \mathcal{H}'$ no es un conjunto de Chebyshev en el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}', (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$.

Procedemos ahora a mostrar que la condición del Teorema 5.15 no sólo es necesaria, sino también suficiente. Con este fin, desarrollamos previamente algunos resultados.

Proposición 5.16. *Supongamos que $sp(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\rho_- \neq \rho_+$;
2. $N(T) + N(V)$ *es un subespacio cerrado.*

Demostración.

1. Supongamos que $\rho_- = \rho_+$ y denotemos $\rho = \rho_\pm$. Dado $z \in \mathcal{E}$, el Teorema 5.10 asegura la existencia de $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que

$$(T^\# T + \rho V^\# V)\widetilde{x} = \rho V^\# z.$$

Dado que z es arbitrario, $N(V)^\perp = R(V^\#) \subseteq R(T^\# T + \rho V^\# V)$, y entonces por la Observación 3.19 $R(L)$ es un subespacio regular de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$, o equivalentemente, es cerrado y uniformemente positivo. En consecuencia, de la Proposición 3.25, $\rho \neq \rho_-$ y $\rho \neq \rho_+$, que es una contradicción.

2. Para ver que $N(T) + N(V)$ es cerrado, procedemos a probar que $T(N(V))$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$ (ver la Proposición 2.19). Sean $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(N(V))$ con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $x_0 \in \mathcal{H}$ tales que $Tx_n \to Tx_0$ (recordemos que T es sobreyectivo). Dado que $sp(Vx_0) \neq \varnothing$, por el Teorema 5.10, existen $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ e $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tales que $(T^\# T + \lambda V^\# V)(x_0 + y_0) = \lambda V^\# V x_0$, o equivalentemente $(T^\# T + \lambda V^\# V)y_0 = -T^\# T x_0$. Por otro lado,

$$(T^\# T + \lambda V^\# V)(-x_n) = -T^\# T x_n \to -T^\# T x_0.$$

Entonces $(T^\# T + \lambda V^\# V)(y_0 + x_n) \to 0$. Ahora, consideremos un $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$ tal que $\rho \neq \lambda$. A continuación, mostramos que $\|y_0 + x_n\|_\rho \to 0$. Dado que $\mathcal{C}_V + N(V) = \mathcal{C}_V$, $\left\langle V^\# V(y_0 + x_n), y_0 + x_n \right\rangle = [\, V(y_0 + x_n), V(y_0 + x_n)\,] = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\begin{aligned}\|y_0 + x_n\|_\rho^2 &= \left\langle (T^\# T + \rho V^\# V)(y_0 + x_n), y_0 + x_n \right\rangle \\ &= \left\langle (T^\# T + \lambda V^\# V)(y_0 + x_n), y_0 + x_n \right\rangle.\end{aligned}$$

En primer lugar, $\left\langle (T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)(y_0 + x_n), y_0 \right\rangle \to 0$. Además, considerando que $x_n \in N(V)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle (T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)(y_0 + x_n), x_n \right\rangle = [\, T(y_0 + x_n), Tx_n \,] \to [\, T(y_0 + x_0), Tx_0 \,] \,.$$

Pero $[\, T(y_0 + x_0), Tx_0 \,] = 0$ por (5.6), y consecuentemente, $\|y_0 + x_n\|_\rho \to 0$. Entonces, dado que

$$\begin{aligned} \|(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)(y_0 + x_n)\| &\le \|T^{\#}T + \rho V^{\#}V\|^{1/2} \|(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)^{1/2}(y_0 + x_n)\| \\ &= \|T^{\#}T + \rho V^{\#}V\|^{1/2} \, \|y_0 + x_n\|_\rho \to 0, \end{aligned}$$

tenemos que $(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)(y_0 + x_n) \to 0$. Luego,

$$T^{\#}T(-x_n) = (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)(-x_n) \to (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)y_0.$$

Pero por otro lado, $T^{\#}T(-x_n) \to -T^{\#}Tx_0 = (T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)y_0$. Esto implica que $(T^{\#}T + \rho V^{\#}V)y_0 = (T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)y_0$, y consecuentemente $(\rho - \lambda)V^{\#}Vy_0 = 0$. Dado que $\rho \neq \lambda$, $y_0 \in N(V)$, y entonces

$$T^{\#}Ty_0 = (T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)y_0 = -T^{\#}Tx_0.$$

Considerando que $T^{\#}$ es inyectivo, resulta que $Tx_0 = -Ty_0 \in T(N(V))$, completando la demostración. $\square$

Lema 5.17. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$. Si $y_0 \in \mathcal{C}_V$ es tal que $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$, entonces $y_0 \in N(T)^{\perp_\rho}$, para todo $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.*

Demostración. Supongamos que $y_0 \in \mathcal{C}_V$ es tal que $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$, y fijemos un $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$. Por el Teorema 5.10 existe $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que $(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)(x_0 + y_0) = \lambda V^{\#}Vx_0$, o equivalentemente, $(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)y_0 = -T^{\#}Tx_0$. Luego, $\lambda V^{\#}Vy_0 = -T^{\#}T(x_0 + y_0) \in N(T)^{\perp}$. Dado que $\lambda \neq 0$ porque $0 \notin [\rho_-, \rho_+]$, y haciendo uso de (2.6),

$$y_0 \in (V^{\#}V)^{-1}(N(T)^{\perp}) = V^{\#}V(N(T))^{\perp} = L^{\#}L(N(T))^{\perp} = N(T)^{\perp_\rho}.$$

$\square$

Haciendo uso de los resultados anteriores, podemos enunciar el teorema a continuación.

Teorema 5.18. *Si $sp(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$, entonces $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ para algún $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$.*

Demostración. En primer lugar, por la Proposición 5.16, $\rho_- \neq \rho_+$. Sea ahora $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$, procedemos a demostrar que $N(T)^\perp \subseteq R(T^\# T + \rho V^\# V) = R(L^\# L)$. Con este fin, sea $T^\# T x_0 \in R(T^\# T) = N(T)^\perp$, con $x_0 \in \mathcal{H} \setminus N(T)$. El Corolario 3.12 asegura que $N(L^\# L) = N(T) \cap N(V)$, y en consecuencia $(\overline{R(L^\# L)}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$ es un espacio pre-Hilbert. Consideremos ahora la completación de este espacio, y denotémosla $\mathcal{H}_\rho$. Definamos el subespacio

$$\mathcal{S} := N(T)^{\perp_\rho} \cap \mathcal{H}_\rho,$$

y consideremos su complemento ortogonal $\mathcal{S}^{\perp_\rho}$, con respecto a $\mathcal{H}_\rho$. Notemos que $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado en $(\mathcal{H}_\rho, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$. Mediante un procedimiento similar al de la prueba de la Proposición 3.20, es fácil ver que existen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^{\perp_\rho}$ tales que $L^\# L(u_n + z_n) \to T^\# T x_0$, y $u_0 \in \mathcal{S}$ tal que $u_n \underset{\rho}{\overset{w}{\to}} u_0$. Además, dado que $L^\# L(\mathcal{S}) \subseteq N(T)^\perp$, existe $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{H}$ tal que $L^\# L u_0 = T^\# T \widetilde{x}_0$.

Buscamos ahora probar que $T^\# T x_0 = T^\# T \widetilde{x}_0 = L^\# L u_0$. Sea $x \in \mathcal{S}$, entonces

$$(\, u_n, x \,)_\rho \to (\, u_0, x \,)_\rho = \left\langle\, L^\# L u_0, x \,\right\rangle = \left\langle\, T^\# T \widetilde{x}_0, x \,\right\rangle.$$

Pero por otro lado,

$$(\, u_n, x \,)_\rho = (\, u_n + z_n, x \,)_\rho = \left\langle\, L^\# L(u_n + z_n), x \,\right\rangle \to \left\langle\, T^\# T x_0, x \,\right\rangle.$$

Luego, $[\, Tx_0, Tx \,] = [\, T\widetilde{x}_0, Tx \,]$ para todo $x \in \mathcal{S}$. Notemos que esto implica que $\widetilde{x}_0 \notin N(T)$. Además, dado que $\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V \subseteq N(L^\# L) = N(T) \cap N(V)$, tenemos que $T^\# T(\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V)^\perp = \mathcal{H}$. Entonces, dado que $sp(Vx_0) \neq \varnothing$ y $sp(V\widetilde{x}_0) \neq \varnothing$, por la Proposición 5.7 existen $v_0, \widetilde{v}_0 \in \mathcal{D} \cap (N(T) \cap N(V))^\perp = \mathcal{D} \cap \overline{R(L^\# L)}$ tales que $[\, Tx_0, Tv_0 \,] = \text{máx}_{v\in\mathcal{D}} |\, [\, Tx_0, Tv \,] \,|$ y $[\, T\widetilde{x}_0, T\widetilde{v}_0 \,] = \text{máx}_{v\in\mathcal{D}} |\, [\, T\widetilde{x}_0, Tv \,] \,|$. Considerando el Corolario 5.8 y el Lema 5.17, se sigue que $v_0, \widetilde{v}_0 \in N(T)^{\perp_\rho} \cap \overline{R(L^\# L)} \subseteq \mathcal{S}$. Consecuentemente,

$$\max_{v\in\mathcal{D}} |\, [\, Tx_0, Tv \,] \,| = [\, Tx_0, Tv_0 \,] = [\, T\widetilde{x}_0, Tv_0 \,] \leq \max_{v\in\mathcal{D}} |\, [\, T\widetilde{x}_0, Tv \,] \,|,$$

$$\max_{v\in\mathcal{D}} |\, [\, Tx_0, Tv \,] \,| \geq [\, Tx_0, T\widetilde{v}_0 \,] = [\, T\widetilde{x}_0, T\widetilde{v}_0 \,] = \max_{v\in\mathcal{D}} |\, [\, T\widetilde{x}_0, Tv \,] \,|.$$

Esto implica que $[\, T\widetilde{x}_0, Tv_0 \,] = \text{máx}_{v\in\mathcal{D}} |\, [\, T\widetilde{x}_0, Tv \,] \,|$. Entonces, por el Corolario 5.8, denotando $y_0 := -[\, Tx_0, Tv_0 \,]\, v_0$ resulta que $x_0 + y_0 \in sp(Vx_0)$ y $\widetilde{x}_0 + y_0 \in sp(V\widetilde{x}_0)$. Luego, el Teorema 5.10 establece que existen $\lambda, \widetilde{\lambda} \in [\rho_-, \rho_+]$ tales que

$$(T^\# T + \lambda V^\# V)(x_0 + y_0) = \lambda V^\# V x_0 \quad \text{y} \quad (T^\# T + \widetilde{\lambda} V^\# V)(\widetilde{x}_0 + y_0) = \widetilde{\lambda} V^\# V \widetilde{x}_0,$$

o equivalentemente,

$$(T^\# T + \lambda V^\# V)y_0 = -T^\# T x_0 \quad \text{y} \quad (T^\# T + \widetilde{\lambda} V^\# V)y_0 = -T^\# T \widetilde{x}_0. \tag{5.27}$$

Si $\lambda = \widetilde{\lambda}$, entonces $T^\# T x_0 = T^\# T \widetilde{x}_0 = L^\# L u_0 \in R(L^\# L)$, obteniendo el resultado deseado. Supongamos ahora que $\lambda \neq \widetilde{\lambda}$. Dado $x \in \mathcal{S}$,

$$\left\langle (T^\# T + \lambda V^\# V)y_0, x \right\rangle = -\left[T x_0, T x \right] = -\left[T \widetilde{x}_0, T x \right] = \left\langle (T^\# T + \widetilde{\lambda} V^\# V)y_0, x \right\rangle,$$

de donde se desprende que $(\lambda - \widetilde{\lambda}) \left\langle V^\# V y_0, x \right\rangle = 0$, y por lo tanto $y_0 \perp V^\# V(\mathcal{S})$. Observando que

$$(L^\# L)^{-1}(N(T)^\perp) = L^\# L(N(T))^\perp = V^\# V(N(T))^\perp = (V^\# V)^{-1}(N(T)^\perp),$$

resulta que $\mathcal{S} = (V^\# V)^{-1}(N(T)^\perp) \cap \overline{R(L^\# L)}$, y consecuentemente $V^\# V(\mathcal{S}) = N(T)^\perp \cap N(V)^\perp$. Luego, dado que $N(T) + N(V)$ es cerrado por la Proposición 5.16, $y_0 \in (N(T)^\perp \cap N(V)^\perp)^\perp = N(T) + N(V)$. Expresemos ahora $y_0 = y_1 + y_2$ con $y_1 \in N(T)$ e $y_2 \in N(V)$. Entonces, considerando que $\mathcal{C}_V + N(V) = \mathcal{C}_V$,

$$y_1 = y_0 - y_1 \in N(T) \cap (\mathcal{C}_V + N(V)) = N(T) \cap \mathcal{C}_V \subseteq \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V = N(T) \cap N(V),$$

y en consecuencia $y_0 \in N(V)$. Finalmente, de (5.27) resulta que

$$T^\# T x_0 = -T^\# T y_0 = T^\# T \widetilde{x}_0 = L^\# L u_0 \in R(L^\# L),$$

completando así la demostración. □

Finalmente, considerando los Teoremas 5.15 y 5.18, y la Proposición 3.22 (que establece la invarianza de las propiedades de $R(L)$), podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 5.19. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $sp(z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$*;*
2. $R(L)$ *es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$ *para algún* $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$*;*
3. $\rho_- \neq \rho_+$ *y* $R(L)$ *es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de* $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\rho)$ *para todo* $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

Retomemos la discusión sobre la descripción del conjunto de soluciones del Problema 2. Supongamos que la hipótesis del Teorema 5.15 se satisface. Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, si $\widetilde{x} \in sp(z_0)$ y $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ satisfacen (5.13), entonces la estructura del conjunto $sp(z_0)$ queda determinada por si $\lambda = \rho_\pm$ o $\lambda \in (\rho_-, \rho_+)$. Más precisamente, si $\lambda \in (\rho_-, \rho_+)$, entonces

$$sp(z_0) = \widetilde{x} + N(T) \cap N(V).$$

Por el otro lado, si $\lambda = \rho_-$ o $\lambda = \rho_+$, entonces $sp(z_0)$ puede contener estrictamente a la variedad afín $\widetilde{x} + N(T) \cap N(V)$. La siguiente sección se dedica a desarrollar estos resultados.

5.4 Descripción de los splines interpolantes indefinidos

A lo largo de esta sección exponemos una descripción más detallada del conjunto de soluciones del Problema 2, desarrollando los casos antes mencionados dependiendo del valor del parámetro λ. En efecto, mostramos que este conjunto resulta ser una sola variedad afín en un caso genérico (en el sentido en que es el caso cuando el dato inicial z_0 pertenece a un conjunto abierto y denso de $\mathcal{E}$). Con este objetivo, suponemos que se satisfacen las siguientes hipótesis:

Hipótesis 5.20. *$T^\# T$ y $V^\# V$ son operadores indefinidos en $\mathcal{H}$, y se satisface que*

1. *$T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$;*
2. *$\rho_- \neq \rho_+$ y existe $\rho_0 \in (\rho_-, \rho_+)$ tal que $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$;*
3. *$N(T) \cap N(V) = \{\,0\,\}$.*

Como ya se ha mencionado, la primer hipótesis es una condición necesaria, y la segunda asegura la existencia de soluciones del Problema 2 para todo $z_0 \in \mathcal{E}$. La suposición de que $N(T) \cap N(V) = \{\,0\,\}$ no conlleva una pérdida de generalidad, y simplifica la notación considerablemente. Más adelante, expresamos los resultados para el caso general.

Bajo las mencionadas hipótesis, fijemos un el valor $\rho := \frac{\rho_- + \rho_+}{2}$, i.e. escogemos un valor particular para $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$. Este parámetro servirá como una herramienta para analizar en detalle el conjunto de soluciones del Problema 2 para todo $z_0 \in \mathcal{E}$.

Además, notemos que $\mathcal{H} = R(L^\# L) = N(T)^\perp + N(V)^\perp$, y que por la Proposición 3.23 $(\mathcal{H}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$ es un espacio de Hilbert.

Por el Teorema 5.10, dado $z_0 \in \mathcal{E}$ el conjunto de soluciones del Problema 2 es

$$sp(z_0) = x_0 + \Theta,$$

donde $x_0 \in \mathcal{H}$ es cualquier vector tal que $Vx_0 = z_0$ y

$$\Theta := \Big\{\, y \in \mathcal{C}_V \,:\, (T^\# T + \lambda V^\# V)(x_0 + y) = \lambda V^\# z_0 \text{ para algún } \lambda \in [\rho_-, \rho_+] \,\Big\}.$$

Obervemos que el conjunto Θ depende de x_0.

A continuación, dado un punto $z_0 \in \mathcal{E}$ escogemos un vector conveniente $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$, que es útil para la descripción del conjunto $sp(z_0)$. Más precisamente, escogemos x_0 tal que el correspondiente Θ se encuentre contenido en $N(V)^{\perp_\rho}$.

Con este fin, primero hacemos la siguiente observación. El Lema 3.18 afirma que $T(N(V))$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\mathcal{K})$, y por lo tanto es un subespacio regular. Considerando que $N(T) \cap N(V) = \{\,0\,\}$, el Lema 2.85 establece entonces que

$$\mathcal{H} = N(V) \dotplus T^\# T(N(V))^\perp,$$

Considerando esta descomposición, se sigue que la proyección oblicua $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dada por

$$Q := P_{N(V)//T^\# T(N(V))^\perp}, \tag{5.28}$$

es acotada.

Lema 5.21. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, existe $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Vx_0 = z_0$ y*

$$u_0 := (L^\# L)^{-1} T^\# T x_0 \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}.$$

Demostración. Consideremos la proyección $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sobre $N(V)$ dada por (5.28). Si definimos $x_0 \in \mathcal{H}$ como

$$x_0 := (I - Q)V^\dagger z_0, \tag{5.29}$$

entonces $Vx_0 = z_0$ y $T^\# T x_0 \in N(T)^\perp \cap N(V)^\perp$. Luego, si

$$u_0 := (L^\# L)^{-1} T^\# T x_0, \tag{5.30}$$

entonces $u_0 \in (L^\# L)^{-1}(N(T)^\perp \cap N(V)^\perp) = L^\# L(N(T)+N(V))^\perp$. Equivalentemente, $u_0 \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$. $\square$

Observemos que, por la Proposición 5.5, el conjunto Θ puede ser alternativamente descripto como el conjunto de vectores $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tales que

$$\begin{cases} [\,T(x_0+y_0), Ty_0\,] &= 0, & \text{y} \\ |\,[\,Tx_0, Ty\,]\,|^2 &\leq [\,Ty_0, Ty_0\,]\,[\,Ty, Ty\,] & \text{para todo } y \in \mathcal{C}_V. \end{cases}$$

En términos del producto interno $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho$, $[\,Tx_0, Tx\,] = (\,u_0, x\,)_\rho$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Además, $[\,Ty, Ty\,] = (\,y, y\,)_\rho$ para todo $y \in \mathcal{C}_V$. Entonces,

$$\Theta = \left\{ y_0 \in \mathcal{C}_V \,:\, (\,u_0, y_0\,)_\rho = -\|y_0\|_\rho^2 \ \text{ y } \ |\,(\,u_0, y\,)_\rho\,| \leq \|y_0\|_\rho \|y\|_\rho, \ \text{para todo } y \in \mathcal{C}_V \right\},$$

o equivalentemente, considerando el procedimiento seguido en la prueba de la Proposición 5.5,

$$\Theta = \left\{ y_0 \in \mathcal{C}_V \,:\, \mathrm{d}(u_0, -y_0) = \mathrm{d}(u_0, \mathcal{C}_V) \right\}.$$

Considerando que u_0 está definido por (5.30), el conjunto Θ depende del vector x_0 definido por (5.29). A continuación, analizamos cómo las características del vector u_0 determinan si el parámetro λ que satisface (5.13) pertenece al intervalo abierto (ρ_-, ρ_+) o si toma los valores ρ_- o ρ_+.

Es fácil ver que para cada $u \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$ existe $x \in \mathcal{H}$ tal que

$$T^\# Tx = L^\# Lu.$$

En efecto, dado que T es sobreyectivo (en particular, de rango cerrado) $N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \subseteq N(T)^{\perp_\rho} = (L^\# L)^{-1}(R(T^\#))$. Luego, para lograr describir el conjunto $sp(z)$ para cada $z \in \mathcal{E}$, tenemos que describir el conjunto Θ para cada $u \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$.

Recordemos el operador G definido por (3.18), i.e.

$$G := (L^\# L)^{-1} V^\# V,$$

y los subespacios $\mathcal{H}_\pm$ y operadores invertibles y semidefinidos positivos $G_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)^+$ tales que $G = G_+ - G_-$ y

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus_\rho \mathcal{H}_- \oplus_\rho N(V). \tag{5.31}$$

Notemos que, bajo las hipótesis mencionadas $L^{\#}L$ es invertible porque $\mathcal{H} = R(L^{\#}L)$, además de que, dado que $N(T) \cap N(V) = \{ 0 \}$, $N(G) = N(V)$ por (3.19).

Habiendo fijado el valor de $\rho = \frac{\rho_- + \rho_+}{2}$, reescribimos el Corolario 3.26 en este nuevo contexto, como el siguiente lema.

Lema 5.22. *Bajo las mencionadas hipótesis, definamos* $\kappa := \frac{\rho_+ - \rho_-}{2}$*. Entonces,*

$$\|G_+\| = \frac{1}{\rho - \rho_-} = \frac{1}{\kappa} \quad y \quad \|G_-\| = \frac{1}{\rho_+ - \rho} = \frac{1}{\kappa}.$$

Además, si $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$ *entonces ambos operadores* $I_\pm \pm \gamma G_\pm$ *son invertibles.*

Observación 5.23. Si $\rho > 0$ entonces el subespacio $N(T)$ está contenido en $\mathcal{H}_+$, más precisamente, $N(T) = N(I_+ - \rho G_+)$. Pero si $\rho < 0$ entonces $N(T) = N(I_- + \rho G_-)$ está contenido en $\mathcal{H}_-$.

Efectivamente, supongamos que $\rho > 0$. Dado que $T^{\#}$ es inyectivo, $N(T) = N(T^{\#}T)$. Si $x \in \mathcal{H}$, entonces $T^{\#}Tx = 0$ si y sólo si $L^{\#}Lx = (T^{\#}T + \rho V^{\#}V)x = \rho V^{\#}Vx$, o equivalentemente, $x = \rho(L^{\#}L)^{-1}V^{\#}Vx = \rho Gx$. Descompongamos x de acuerdo a (5.31) como $x = x_+ + x_- + x_0$, con $x_\pm \in \mathcal{H}_\pm$ y $x_0 \in N(V)$. Luego,

$$x_+ = \rho G_+ x_+, \quad x_- = -\rho G_- x_-, \quad \text{y} \quad x_0 = \rho \cdot 0.$$

La última ecuación implica que $x_0 = 0$, y la segunda que $G_- x_- = -\frac{1}{\rho} x_-$. Dado que $\rho > 0$ y $G_- \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^+$, resulta que $x_- = 0$. En consecuencia, $x = x_+$ y $(I - \rho G)x = (I_+ - \rho G_+)x_+ = 0$.

Un argumento similar prueba que $N(T) = N(I_- + \rho G_-)$ si $\rho < 0$.

A través del operador G y de la estructura de espacio de Hilbert de $(\mathcal{H}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$, la ecuación normal (5.13) puede ser reexpresada, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 5.24. *Dado* $z_0 \in \mathcal{E}$*, sea* u_0 *el vector definido por* (5.30)*. Para* $y_0 \in \mathcal{C}_V$*,* $y_0 \in \Theta$ *si y sólo si existe* $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$ *tal que*

$$(I + \gamma G)y_0 = -u_0. \tag{5.32}$$

Demostración. Supongamos que $y_0 \in \Theta$, i.e. $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$ donde x_0 está dado por (5.29). Entonces, el Teorema 5.10 establece que existe $\lambda \in [-\kappa, \kappa]$ tal que

$$(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)(x_0 + y_0) = \lambda V^{\#}z_0 = \lambda V^{\#}Vx_0,$$

o equivalentemente

$$(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)y_0 = -T^{\#}Tx_0 = -L^{\#}Lu_0.$$

Dado que $T^{\#}T + \lambda V^{\#}V = L^{\#}L + (\lambda - \rho)V^{\#}V$,

$$(I + (\lambda - \rho)G)\, y_0 = (L^{\#}L)^{-1}(L^{\#}L + (\lambda - \rho)V^{\#}V)y_0 = -u_0.$$

Denotando $\gamma = \lambda - \rho$, obtenemos que $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ e y_0 satisface (5.13), como se buscaba.

Recíprocamente, supongamos que existe $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ tal que $(I + \gamma G)y_0 = -u_0$. Denotando $\lambda = \gamma + \rho$, resulta que $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ y

$$L^{\#}L(I + \gamma G) = T^{\#}T + \rho V^{\#}V + (\lambda - \rho)V^{\#}V = T^{\#}T + \lambda V^{\#}V.$$

Entonces, $(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)y_0 = -L^{\#}Lu_0 = -T^{\#}Tx_0$, i.e.

$$(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)(x_0 + y_0) = \lambda V^{\#}z_0.$$

Por el Teorema 5.10 $x_0 + y_0 \in sp(z_0)$, y en consecuencia $y_0 \in \Theta$. $\square$

Además, es fácil ver que $z_0 \in V(N(T))$ si y sólo si $u_0 = 0$. Luego, como consecuencia de la Proposición 5.11 tenemos que:

Corolario 5.25. *Si $u_0 \neq 0$ entonces existe un único $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ tal que $(I + \kappa G)y_0 = -u_0$, para todo $y_0 \in \Theta$.*

El siguiente lema establece que podemos acotarnos a estudiar la situación restringiéndonos al subespacio $N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$.

Lema 5.26. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea u_0 el vector definido por* (5.30)*. Entonces, el conjunto Θ está contenido en $N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$.*

Demostración. El hecho de que $\Theta \subseteq N(T)^{\perp_\rho}$ fue establecido en el Lema 5.17. Ahora, si $y_0 \in \Theta$, por la Proposición 5.24 existe $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ tal que $(I + \gamma G)y_0 = -u_0$. Entonces, dado que $R(G) \subseteq N(V)^{\perp_\rho}$, $y_0 = -\gamma G y_0 - u_0 \in N(V)^{\perp_\rho}$. $\square$

Nuestro objetivo ahora es describir el conjunto Θ. Con este fin, recordemos el conjunto

$\mathcal{N}_\pm$ definido en (4.3):

$$\mathcal{N}_\pm = \mathcal{M}_\pm \cup \{\, 0 \,\} = \left\{ x \in \mathcal{P}(V)^\pm \ : \ \frac{[\, Tx, Tx \,]}{[\, Vx, Vx \,]} = -\rho_\pm \right\} \cup \{\, 0 \,\} .$$

A continuación mostramos que $\mathcal{N}_\pm$ es un subespacio no trivial de $\mathcal{H}_\pm$. Recordemos que por el Lema 5.22 $\|G_+\| = \|G_-\| = \frac{1}{\kappa}$.

Proposición 5.27. *Bajo las mencionadas hipótesis, se satisface que*

$$\mathcal{N}_\pm = N(I_\pm - \kappa G_\pm).$$

Demostración. Dado que $T^\# T + \rho_\mp V^\# V$ es un operador semidefinido positivo, para un $x \in \mathcal{H}$ arbitrario tenemos que $[\, Tx, Tx \,] = -\rho_\mp \, [\, Vx, Vx \,]$ si y sólo si

$$(L^\# L \mp \kappa V^\# V)x = (T^\# T + \rho_\mp V^\# V)x = 0.$$

Pero esto es equivalente a $(I \mp \kappa G)x = 0$. Descomponiendo x de acuerdo a (5.31) como $x = x_+ + x_- + x_0$ con $x_\pm \in \mathcal{H}_\pm$ y $x_0 \in N(V)$, es inmediato que $(I - \kappa G)x = 0$ si y sólo si $x = x_+ \in \mathcal{H}_+$ y $(I_+ - \kappa G_+)x_+ = (I - \kappa G)x = 0$ (ver el argumento utilizado en la Observación 5.23). Análogamente, $(I + \kappa G)x = 0$ si y sólo si $x = x_- \in \mathcal{H}_-$ y $(I_- - \kappa G_-)x_- = (I + \kappa G)x = 0$, completando la prueba. □

Corolario 5.28. *Bajo las mencionadas hipótesis,*

$$\mathcal{N}_+ \cap N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \neq \{\, 0 \,\} \quad y \quad \mathcal{N}_- \cap N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \neq \{\, 0 \,\} .$$

Además, $\mathcal{N}_\pm$ es el autoespacio de $G_\pm$ asociado al autovalor $\frac{1}{\kappa}$.

Demostración. Supongamos que $\rho > 0$. Por un lado, por la Observación 5.23, $N(T)$ está contenido en $\mathcal{H}_+$. Entonces,

$$\mathcal{H}_- \oplus_\rho N(V) \subseteq N(T^\# T)^{\perp_\rho} \subseteq N(T)^{\perp}_{\rho},$$

y $\mathcal{N}_- \subseteq \mathcal{H}_- \subseteq N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$.

Por el otro lado, para ver que la intersección entre $\mathcal{N}_+$ y $N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$ es no trivial, consideremos un vector $u_0 \in \mathcal{H}_- \setminus \{\, 0 \,\}$. Entonces, por la Proposición 5.24, existe $y_0 \in \Theta$ tal que $(I + \gamma G)y_0 = -u_0$ para algún $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$. Descompongamos y_0 como

$y_0 = y_0^+ + y_0^-$, con $y_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$. Dado que $u_0 \in \mathcal{H}_-$, resulta que

$$(I_+ + \gamma G_+)y_0^+ = 0 \quad \text{y} \quad (I_- - G_-)y_0^- = -u_0.$$

Luego, $\gamma = -\kappa$ e $y_0^+ \in \mathcal{N}_+$. Observemos que $y_0^+ \neq 0$, de otra forma $y_0 = 0$ y $(I+\gamma G)y_0 = -u_0 \neq 0$, que es una contradicción. Aún más, $y_0^+ = y_0 - y_0^- \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$ porque $y_0 \in \Theta$ e $y_0^- \in \mathcal{H}_-$. Consecuentemente $\mathcal{N}_+ \cap N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \neq \{\, 0 \,\}$. Si ahora denotamos $u_0' = y_0^+ \in \mathcal{H}_+ \cap N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \setminus \{\, 0 \,\}$, siguiendo el mismo procedimiento con $y_0' \in \Theta$ y $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ tales que $(I + \gamma G)y_0' = -u_0'$, se prueba que $\mathcal{N}_- \cap N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \neq \{\, 0 \,\}$, completando la demostración (para $\rho > 0$).

Si $\rho < 0$ un argumento análogo muestra que $\mathcal{N}_+ \subseteq \mathcal{H}_+ \subseteq N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$, y que $\mathcal{N}_\pm \cap N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \neq \{\, 0 \,\}$. □

La siguiente proposición establece la estructura del conjunto Θ, dependiendo de si γ es un punto interior del intervalo o $\gamma = \pm\kappa$. Con este fin, denotemos por $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\pm}$ a la esfera unitaria en el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}_\pm, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$, i.e.

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_\pm} = \left\{\, x \in \mathcal{H}_\pm \;:\; \|x\|_\rho = 1 \,\right\}.$$

Proposición 5.29. *Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea u_0 el vector definido por* (5.30). *Sean $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ e $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tales que $(I + \gamma G)y_0 = -u_0$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *si $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$, entonces*

$$\Theta = \left\{\, -(I + \gamma G)^{-1}u_0 \,\right\};$$

2. *si $\gamma = \kappa$, entonces existe $\alpha_- \geq 0$ tal que*

$$\Theta = -(I + \kappa G)^\dagger u_0 + \alpha_- \cdot \mathcal{N}_- \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_-};$$

3. *si $\gamma = -\kappa$, entonces existe $\alpha_+ \geq 0$ tal que*

$$\Theta = -(I - \kappa G)^\dagger u_0 + \alpha_+ \cdot \mathcal{N}_+ \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_+}.$$

Demostración. Supongamos que $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$. En este caso $I + \gamma G$ es invertible porque ambos $I_+ + \gamma G_+$ y $I - \gamma G_-$ son invertibles en $\mathcal{H}_+$ y $\mathcal{H}_-$, respectivamente. Entonces, $y_0 = -(I + \gamma G)^{-1}u_0$ y $\Theta = \{\, -(I + \gamma G)^{-1}u_0 \,\}$.

Ahora supongamos que $\gamma = \kappa$. En primer lugar, describimos el conjunto $\mathcal{C}_V \cap N(V)^{\perp_\rho}$ en términos de $G_\pm$. Sea $y \in N(V)^{\perp_\rho}$ y escribamos $y = y_+ + y_-$ con $y_\pm \in \mathcal{H}_\pm$, entonces

$$[\,Vy, Vy\,] = (\,Gy, y\,)_\rho = (\,G_+y_+, y_+\,)_\rho - (\,G_-y_-, y_-\,)_\rho = \|G_+^{1/2}y_+\|_\rho^2 - \|G_-^{1/2}y_-\|_\rho^2.$$

Luego,

$$\mathcal{C}_V \cap N(V)^{\perp_\rho} = \Big\{\, y = y_+ + y_- \;:\; \|G_+^{1/2}y_+\|_\rho = \|G_-^{1/2}y_-\|_\rho\,,\, y_\pm \in \mathcal{H}_\pm \,\Big\}.$$

Dado que $\Theta \subseteq \mathcal{C}_V \cap N(V)^{\perp_\rho}$, cada $y_0 \in \Theta$ puede ser escrito como $y_0 = y_0^+ + y_0^-$ con $y_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$ satisfaciendo $\|G_+^{1/2}y_0^+\|_\rho = \|G_-^{1/2}y_0^-\|_\rho$. Además, escribiendo $u_0 = u_0^+ + u_0^-$ con $u_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$, la condición $(I + \kappa G)y_0 = -u_0$ implica que

$$(I_+ + \kappa G_+)\, y_0^+ = -u_0 \quad \text{y} \quad (I_- - \kappa G_-)\, y_0^- = -u_0^-.$$

Entonces,

$$y_0^+ = -\,(I_+ + \kappa G_+)^{-1}\, u_0^+ \quad \text{e} \quad y_0^- = -\,(I_- - \kappa G_-)^\dagger\, u_0^- + v,$$

donde $v \in \mathcal{N}_-$. Si $v = 0$, establecemos $\alpha_- = 0$. De otra forma, si $v \neq 0$, estableciendo $\alpha_- := \|v\|_\rho > 0$ e $y_- := \frac{v}{\|v\|_\rho} \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_-}$, tenemos que

$$\begin{aligned} y_0 = y_0^+ + y_0^- &= -\,(I_+ + \kappa G_+)^{-1}\, u_0^- - (I_- - \kappa G_-)^\dagger\, u_0^- + \alpha_- y_- \\ &= -\,(I + \kappa G)^\dagger\, u_0 + \alpha_- y_-. \end{aligned}$$

Sólo resta probar que α_- es el mismo para cada $y_0 \in \Theta$. Con este fin, hacemos uso de que $\|G_+^{1/2}y_0^+\|_\rho = \|G_-^{1/2}y_0^-\|_\rho$. Dado que $G_-y_- = \frac{1}{\kappa}y_-$ y $(I_- - \kappa G_-)^\dagger\, u_0^- \perp_\rho y_-$,

$$\|G_-^{1/2}y_0^-\|_\rho^2 = \|G_-^{1/2}\,(I_- - \kappa G_-)^\dagger\, u_0^-\|_\rho^2 + \frac{\alpha_-^2}{\kappa}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|G_+^{1/2}\,(I_+ + \kappa G_+)^{-1}\, u_0^+\|_\rho^2 = \|G_+^{1/2}y_0^+\|_\rho^2 &= \|G_-^{1/2}y_0^-\|_\rho^2 \\ &= \|G_-^{1/2}\,(I_- - \kappa G_-)^\dagger\, u_0^-\|_\rho^2 + \frac{\alpha_-^2}{\kappa}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\alpha_- = \Big(\kappa\,\Big(\|G_+^{1/2}\,(I_+ + \kappa G_+)^{-1}\, u_0^+\|_\rho^2 - \|G_-^{1/2}\,(I_- - \kappa G_-)^\dagger\, u_0^-\|_\rho^2\Big)\Big)^{1/2},$$

y α_- no depende de y_0 sino sólo de u_0. Además, escogiendo cualquier $\widetilde{y} \in \mathcal{N}_- \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_-}$ y estableciendo $\widetilde{y}_0 = (I + \kappa G)^\dagger u_0 + \alpha_- \widetilde{y}$, es inmediato que $(I + \kappa G)\, \widetilde{y}_0 = -u_0$. En consecuencia,

$$\Theta = -\,(I + \kappa G)^\dagger u_0 + \alpha_- \cdot \mathcal{N}_- \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_-}.$$

Mediante un procedimiento análogo para el caso $\gamma = -\kappa$ se completa la demostración.

□

Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sea u_0 el vector definido por (5.30). Si $u_0 = 0$, entonces $T^{\#}Tx_0 = L^{\#}Lu_0 = 0$, y $x_0 \in N(T)$. Luego, por el Lema 5.9, $sp(z_0) = x_0 + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$. Pero, bajo las Hipótesis 5.20, $\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V \subseteq N(T^{\#}T + \rho V^{\#}V) = N(T) \cap N(V) = \{\, 0 \,\}$. Por consiguiente,

$$sp(z_0) = \{\, x_0 \,\}\,.$$

De aquí en más, nos restringimos a analizar el caso en que $u_0 \neq 0$. A continuación, procedemos a estudiar cómo el vector u_0 determina si $\gamma = \pm\kappa$ o $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$. Estamos particularmente interesados en el último caso, dado que allí el conjunto de soluciones contiene a un solo elemento.

Supongamos que $u_0 \neq 0$ y escribamos $u_0 = u_0^+ + u_0^-$ con $u_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$. Si $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$, entonces el único $y_0 \in \mathcal{C}_V$ que satisface $(I + \gamma G)y_0 = -u_0$ está dado por

$$y_0 = -(I + \gamma G)^{-1} u_0 = -(I_+ + \gamma G_+)^{-1} u_0^+ - (I_- - \gamma G_-)^{-1} u_0^-\,.$$

En particular, $\|G_+^{1/2}(I_+ + \gamma G_+)^{-1} u_0^+\|_\rho = \|G_-^{1/2}(I_- - \gamma G_-)^{-1} u_0^-\|_\rho$. Esto implica inmediatamente que $u_0^+ \neq 0$ y $u_0^- \neq 0$.

Antes de enunciar el resultado principal, exponemos un lema de carácter técnico. Es necesario descomponer $\mathcal{H}_\pm$ en $\mathcal{N}_\pm$ y su complemento ortogonal con respecto al producto interno $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho$; este último es denominado el *subespacio defecto positivo (negativo)* de $\mathcal{N}_\pm$, y es denotado por

$$\mathcal{D}_\pm = \mathcal{H}_\pm \ominus_\rho \mathcal{N}_\pm = \mathcal{H}_\pm \cap \mathcal{N}_\pm^{\perp_\rho}.$$

Lema 5.30. *Dado $v \in \mathcal{H}_\pm$, consideremos la descomposición $u = v + w$ con $v \in \mathcal{N}_\pm$ y $w \in \mathcal{D}_\pm$. Entonces, para todo $\tau \in (-\kappa, \kappa)$,*

$$\|G_\pm^{1/2}(I_\pm \pm \tau G_\pm)^{-1} u\|_\rho^2 = \frac{\kappa}{(\kappa \pm \tau)^2}\|v\|_\rho^2 + \left\|G_\pm^{1/2}(I_\pm \pm \tau G_\pm)^{-1} w\right\|_\rho^2.$$

Demostración. Sea $\tau \in (-\kappa, \kappa)$, entonces, dado que $\|\tau G_-\| < 1$,

$$\begin{aligned}\left\|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1}u\right\|_\rho^2 &= \left\|G_-^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(\tau G_-)^k u\right\|_\rho^2 \\ &= \left(G_-^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(\tau G_-)^k u, G_-^{1/2}\sum_{m=0}^{\infty}(\tau G_-)^m u\right)_\rho.\end{aligned}$$

Observando que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\left(G_-^{1/2}\sum_{k=0}^{n}(\tau G_-)^k u, G_-^{1/2}\sum_{m=0}^{n}(\tau G_-)^m u\right)_\rho = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\tau^{k+m}\left\|G_-^{(k+m+1)/2}u\right\|_\rho^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\tau^k\left\|G_-^{(k+1)/2}u\right\|_\rho^2 + \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\tau^{n+k+1}\left\|G_-^{(n+k+2)/2}u\right\|_\rho^2 \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\tau^k\left\|G_-^{(k+1)/2}u\right\|_\rho^2,\end{aligned}$$

entonces es fácil ver que

$$\left\|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1}u\right\|_\rho^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\tau^k\left\|G_-^{(k+1)/2}u\right\|_\rho^2.$$

Dado que $G_-^m v = \kappa^{-m}v$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, y $v \perp_\rho w$,

$$\begin{aligned}\left\|G_-^{(k+1)/2}v\right\|_\rho^2 &= \left(G_-^{k+1}v, v\right)_\rho + \left(G_-^{k+1}w, w\right)_\rho + 2\operatorname{Re}\left(G^{k+1}v, w\right)_\rho \\ &= \kappa^{-(k+1)}\|v\|_\rho^2 + \left\|G^{(k+1)/2}w\right\|_\rho^2.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left\|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1}u\right\|_\rho^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\tau^k\kappa^{-(k+1)}\|v\|_\rho^2 + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\tau^k\left\|G_-^{(k+1)/2}w\right\|_\rho^2 \\ &= \frac{\kappa}{(\kappa-\tau)^2}\|v\|_\rho^2 + \left\|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1}w\right\|_\rho^2.\end{aligned}$$

La prueba para la otra norma es similar. □

A continuación exponemos el teorema que enuncia el resultado principal de esta sección. Éste establece que el conjunto de soluciones del Problema 2, el conjunto de splines interpolantes, es un conjunto de un solo elemento para todo punto de dato inicial z_0

perteneciente a un subconjunto denso y abierto del espacio $\mathcal{E}$.

Teorema 5.31. *Existe un subconjunto abierto y denso $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ tal que $sp(z)$ es un conjunto de un solo elemento para todo $z \in \mathcal{M}$.*

Demostración. En primer lugar, notemos que $\mathcal{E} = V(N(T))$ si y sólo si $\mathcal{H} = N(T) + N(V)$. Pero esto no es posible porque $T^{\#}T$ es indefinido y $T(\mathcal{C}_V)$ es un conjunto no negativo de $\mathcal{K}$ (ver la Observación 3.9). Entonces, $\mathcal{E} \setminus V(N(T)) \neq \varnothing$.

Dado $z_0 \in \mathcal{E} \setminus V(N(T))$, sea u_0 el vector definido por (5.30). Descompongamos u_0 como $u_0 = v_+ + w_+ + v_- + w_-$, con $v_\pm \in \mathcal{N}_\pm$ y $w_\pm \in \mathcal{D}_\pm$. Supongamos que $v_+ \neq 0$ y $v_- \neq 0$.

Procedemos ahora a mostrar que existe $\tau_0 \in (-\kappa, \kappa)$ tal que

$$\left\|G_+^{1/2}(I_+ + \tau_0 G_+)^{-1}(v_+ + w_+)\right\|_\rho = \left\|G_-^{1/2}(I_- - \tau_0 G_-)^{-1}(v_- + w_-)\right\|_\rho,$$

que implica que el vector $y_0 := -(I + \tau_0 G)^{-1}u_0$ pertenece al conjunto Θ (porque $y_0 \in \mathcal{C}_V$ y $(I + \tau_0 G)y_0 = -u_0$).

Consideremos las funciones reales $f_\pm$ definidas por

$$f_\pm(\tau) = \left\|G_\pm^{1/2}(I_\pm \pm \tau G_\pm)^{-1}(v_\pm + w_\pm)\right\|_\rho^2, \qquad \tau \in (-\kappa, \kappa).$$

Por el Lema 5.30

$$f_\pm(\tau) = \frac{\kappa}{(\kappa \pm \tau)^2}\|v_\pm\|_\rho^2 + \left\|G_\pm^{1/2}(I_\pm \pm \tau G_\pm)^{-1}w_\pm\right\|_\rho^2, \qquad \text{para todo } \tau \in (-\kappa, \kappa).$$

Dado que el operador $I_- + \kappa G_-$ es invertible, f_- es una función acotada sobre $(-\kappa, 0)$. Análogamente, f_+ es acotada sobre $(0, \kappa)$. Por el otro lado, dado que $v_\pm \neq 0$, es inmediato que

$$\lim_{\tau \to \mp\kappa} f_\pm(\tau) = +\infty.$$

Entonces, es fácil ver que existe $\tau_0 \in (-\kappa, \kappa)$ tal que $f_-(\tau_0) = f_+(\tau_0)$, o equivalentemente,

$$\left\|G_+^{1/2}(I_+ + \tau_0 G_+)^{-1}(v_+ + w_+)\right\|_\rho = \left\|G_-^{1/2}(I_- - \tau_0 G_-)^{-1}(v_- + w_-)\right\|_\rho.$$

Luego, estableciendo $\gamma = \tau_0$ se sigue que $\Theta = \{\, -(I + \gamma G)^{-1}u_0 \,\}$. Además, el conjunto

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \left\{ u = v_+ + w_- + v_+ + w_- \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \;:\; v_\pm \in \mathcal{N}_\pm \setminus \{\, 0 \,\}\;,\; w_\pm \in \mathcal{D}_\pm \right\}$$

es un subconjunto no vacío, denso y abierto de $N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$, y Θ es un conjunto de un solo elemento para todo $u \in \widetilde{\mathcal{M}}$. En efecto, $\widetilde{M}$ es no vacío por el Corolario 5.28, y las demás condiciones son inmediatas.

Finalmente, considerando (5.29) y (5.30), definamos el operador $A : \mathcal{E} \to \mathcal{H}$ dado por

$$Az = (L^\# L)^{-1} T^\# T (I - Q) V^\dagger z, \quad z \in \mathcal{E}. \tag{5.33}$$

De la equivalencia de las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\rho$ establecida por el Corolario 3.24, es inmediato que A es un operador acotado con respecto al espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\rho)$. Es fácil ver que $R(A) = N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$, en particular es un subespacio cerrado, y consecuentemente $A^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})$ es un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{E}$. Entonces, $sp(z)$ es un conjunto de un solo elemento para todo $z \in A^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})$. $\square$

La prueba del Teorema 5.31 muestra que, si al descomponer u_0 de acuerdo a $\mathcal{H} = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{D}_+ \oplus_\rho \mathcal{N}_- \oplus_\rho \mathcal{D}_- \oplus_\rho N(V)$, los componentes pertenecientes a $\mathcal{N}_+$ y $\mathcal{N}_-$ son no nulos, entonces $sp(z_0)$ contiene un solo elemento. El ejemplo a continuación ilustra esto, además de lo que sucede en los demás casos.

Ejemplo 5.32. Supongamos que $\mathcal{H}$ puede ser descompuesto como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ y consideremos operadores $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{E})$ tales que $T^\# T$ y $V^\# V$ pueden representarse como

$$T^\# T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 3I \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad V^\# V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & -2I \end{bmatrix},$$

de acuerdo a esta descomposición.

Si $x \in \mathcal{H}$ es descompuesto como $x = x_1 + x_2 + x_3$ con $x_i \in \mathcal{H}_i$, para $i = 1, 2, 3$, dado $\rho \neq 0$,

$$\left\langle (T^\# T + \rho V^\# V)x, x \right\rangle = \frac{1+\rho}{2}\,\|x_1\|^2 + (2\rho - 1)\,\|x_2\|^2 + (3 - 2\rho)\,\|x_-\|^2.$$

Luego, $T^\# T + \rho V^\# V$ es semidefinido positivo si y sólo si $1 + \rho \geq 0$, $2\rho - 1 \geq 0$ y $3 - 2\rho \geq 0$. Entonces, es inmediato que

$$\rho_- = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \rho_+ = \frac{3}{2}.$$

Si fijamos el valor de $\rho := \frac{\rho_- + \rho_+}{2} = 1$, entonces $L^\# L = T^\# T + \rho V^\# V = I$. Es decir, para este caso particular,

$$(x, y)_\rho = \left\langle L^\# L x, y \right\rangle = \langle x, y \rangle \,, \quad \text{para todos } x, y \in \mathcal{H}.$$

De esta forma, es inmediato que se satisfacen las Hipótesis 5.20. Además, el operador G definido en (3.18) resulta $G = (L^\# L)^{-1} V^\# V = V^\# V$, e inmediatamente

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_- = \mathcal{H}_3.$$

Asimismo, tenemos que

$$\mathcal{N}_+ = \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{D}_+ = \mathcal{H}_1 \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_- = \mathcal{H}_3, \quad \mathcal{D}_- = \{ 0 \} \,,$$

y $\kappa = \frac{\rho_+ - \rho_-}{2} = \frac{1}{2}$.

Mediante el Teorema 5.15 podemos afirmar a priori que $sp(z_0) \neq \varnothing$ para todo $z_0 \in \mathcal{E}$. A continuación, describimos el conjunto $sp(z_0)$ para cada uno de los casos posibles. Dado que $[\, Vx, Vx \,] = \frac{1}{2}\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - 2\|x_3\|^2$, el conjunto $\mathcal{C}_V$ puede ser descripto como

$$\mathcal{C}_V = \left\{ y_1 + y_2 + \left(\tfrac{1}{4}\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\right)^{1/2} y_3 \;:\; y_1 \in \mathcal{H}_1,\ y_2 \in \mathcal{H}_2,\ y_3 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} \right\},$$

donde $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3}$ denota la esfera unitaria en $\mathcal{H}_3$.

Dado $z_0 \in \mathcal{E}$, consideremos el vector u_0 definido en (5.30) (de hecho, observemos que en este caso x_0 dado por (5.29) resulta $x_0 = V^{-1} z_0$ y u_0 se reduce a $u_0 = T^\# T V^{-1} z_0$). Si $y \in \mathcal{C}_V$, la Proposición 5.24 asegura que $y \in \Theta$ (o equivalentemente, $x_0 + y \in sp(z_0)$) si y sólo si existe $\gamma \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que

$$(I + \gamma V^\# V) = (I + \gamma G) y = -u_0. \tag{5.34}$$

Escribiendo el vector u_0 como $u_0 = u_1 + u_2 + u_3$, con $u_i \in \mathcal{H}_i$ para $i = 1, 2, 3$ (recordemos que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}_+$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{N}_+$ y $\mathcal{H}_3 = \mathcal{N}_-$), y descomponiendo $y \in \mathcal{C}_V$ como

$$y = y_1 + y_2 + \left(\tfrac{1}{4}\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\right)^{1/2} y_3,$$

con $y_1 \in \mathcal{H}_1$, $y_2 \in \mathcal{H}_2$ y $y_3 \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_3}$, (5.34) se traduce en

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}\gamma\right) y_1 = -u_1, \tag{5.35}$$

$$(1 + 2\gamma)y_2 = -u_2, \tag{5.36}$$

$$(1 - 2\gamma)\left(\tfrac{1}{4}\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\right)^{1/2} y_3 = -u_3. \tag{5.37}$$

Dado que $\gamma \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, (5.35) implica que $y_1 = \frac{-2}{2+\gamma}u_1$. Si $u_0 = u_1 + u_2 + u_3 = 0$, es inmediato que $sp(z_0) = \{\, x_0 \,\}$. A continuación, estudiamos las situaciones donde éste no es el caso.

- **Caso 1**: $u_3 = 0$.

  Dado que $y_3 \neq 0$, (5.37) implica que $\gamma = \frac{1}{2}$. Además,

  $$sp(z_0) = x_0 - \tfrac{4}{5}u_1 - \tfrac{1}{2}u_2 + \left(\tfrac{4}{25}\|u_1\|^2 + \tfrac{1}{4}\|u_2\|^2\right)^{1/2} \mathcal{S}_{\mathcal{H}_3}.$$

- **Caso 2**: $u_3 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$.

  En este caso, (5.36) y (5.37) implican que $\gamma \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En consecuencia,

  $$sp(z_0) = \left\{\, x_0 - \tfrac{2}{2+\gamma}u_1 - \tfrac{1}{1+2\gamma}u_2 - \tfrac{1}{1-2\gamma}u_3 \,\right\},$$

  donde $\gamma \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el único que satisface la ecuación

  $$\frac{\|u_1\|^2}{(2+\gamma)^2} + \frac{\|u_2\|^2}{(1+2\gamma)^2} = \frac{\|u_3\|^2}{(1-2\gamma)^2}.$$

- **Caso 3**: $u_3 \neq 0$ y $u_2 = 0$.

  En este caso, dos situaciones diferentes deben ser tenidas en cuenta. Efectivamente, (5.36) implica que $y_2 = 0$ ó $\gamma = -\frac{1}{2}$. De (5.37) resulta que

  $$\frac{\|u_1\|^2}{(2+\gamma)^2} + \|y_2\|^2 = \frac{\|u_3\|^2}{(1-2\gamma)^2}.$$

  Si denotamos $\beta = \frac{\|u_1\|}{\|u_3\|}$, podemos distinguir entre dos casos:

  i) si $\beta > \frac{3}{4}$, entonces $\gamma = \frac{\beta-2}{2\beta+1}$ está contenido en el intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; luego $y_2 = 0$ y

  $$sp(z_0) = \left\{\, x_0 - \tfrac{2}{2+\gamma}u_1 - \tfrac{1}{1-2\gamma}u_3 \,\right\};$$

ii) si $\beta \leq \frac{3}{4}$, entonces $\gamma = -\frac{1}{2}$ y

$$sp(z_0) = x_0 - \tfrac{4}{3}u_1 - \tfrac{1}{2}\|u_3\| \left(1 - \tfrac{16}{9}\beta^2\right)^{1/2} \mathcal{S}_{\mathcal{H}_2} - \tfrac{1}{2}u_3.$$

El Ejemplo 5.32 muestra que no siempre es posible determinar si $sp(z_0)$ es un conjunto de un sólo elemento o no mediante el analizar cuáles de los componentes de u_0 son nulos, ver e.g. el Caso 3 en el Ejemplo 5.32.

La siguiente proposición describe los casos donde sí podemos afirmar, con sólo mirar cuáles de los componentes de u_0 son nulos, el que γ pertenezca al intervalo abierto $(-\kappa, \kappa)$ o $\gamma = \pm\kappa$, y consecuentemente, que $sp(z_0)$ contenga un solo elemento o no.

Proposición 5.33. *Dado $z_0 \in \mathcal{E} \setminus V(N(T))$, sea u_0 el vector definido por* (5.30). *Consideremos la descomposición $u_0 = v_+ + w_+ + v_- + w_-$, con $v_\pm \in \mathcal{N}_\pm$ y $w_\pm \in \mathcal{D}_\pm$. Si $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ es tal que satisface* (5.32) *para algún $y_0 \in \mathcal{C}_V$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. si $u_0 \in \mathcal{H}_\pm$, entonces $\lambda = \pm\kappa$;

2. si $v_+ \neq 0$, $v_- \neq 0$, y $w_+ = w_- = 0$, entonces

$$\gamma = \kappa\, \frac{\|v_+\|_\rho - \|v_-\|_\rho}{\|v_+\|_\rho + \|v_-\|_\rho} \in (-\kappa, \kappa).$$

3. si $v_+ \neq 0$, $v_- \neq 0$, $w^\mp \neq 0$ y $w_\pm = 0$, entonces $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$.

Demostración.

1. Supongamos que $u_0 \in \mathcal{H}_+$ y consideremos $y_0 = y_0^+ + y_0^- \in \Theta$ con $y_0^\pm \in \mathcal{H}_\pm$. De (5.32),

$$(I_+ + \gamma G_+)y_0^+ + (I_- - \gamma G_-)y_0^- = -u_0 = -(v_+ + w_+).$$

Dado que $(I_- - \gamma G_-)y_0^- = 0$ e $y_0^- \neq 0$ (porque $u_0 \neq 0$), se sigue que $\gamma = \kappa$.

2. Supongamos que $v_+ \neq 0$, $v_- \neq 0$ y $w_+ = w_- = 0$. Denotemos $\tau = \kappa\, \frac{\|v_+\|_\rho - \|v_-\|_\rho}{\|v_+\|_\rho + \|v_-\|_\rho}$, que pertenece a $(-\kappa, \kappa)$. Entonces,

$$\frac{\kappa}{(\kappa + \tau)^2}\|v_+\|_\rho^2 = \frac{\kappa}{\kappa - \tau}\|v_-\|_\rho^2.$$

Por el Lema 5.30, esto es equivalente a que

$$\left\|G_+^{1/2}(I_+ + \tau G_+)^{-1}v_+\right\|_\rho = \left\|G_-^{1/2}(I_- - \tau G_-)^{-1}v_-\right\|_\rho,$$

que implica que el vector $y_0 := (I + \tau G)^{-1} u_0$ pertenece a Θ (porque $y_0 \in \mathcal{C}_V$ y $(I + \tau G) y_0 = -u_0$). Luego, por la unicidad establecida en el Corolario 5.25, $\gamma = \tau$.

3. Esto es una consecuencia del procedimiento aplicado en la prueba del Teorema 5.31. $\square$

Debemos notar que el que γ pertenezca al intervalo abierto $(-\kappa, \kappa)$ es una condición suficiente para que $sp(z_0)$ contenga un solo elemento, pero no necesaria. Si $\gamma = \pm\kappa$, el parámetro $\alpha_\mp$ en la Proposición 5.29 puede tomar el valor nulo, que es lo que sucede en el Caso 3 del Ejemplo 5.32 cuando $\beta = \frac{3}{4}$.

Observación 5.34. Si la última suposición de las Hipótesis 5.20 es dejada de lado (es decir, si no suponemos que $N(T) \cap N(V)$ es el conjunto trivial) es fácil ver que existe un subconjunto $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$, abierto y denso, tal que, en lugar de contener un solo elemento, el conjunto de soluciones del Problema 2 es una variedad afín paralela al subespacio $N(T) \cap N(V)$, i.e. para todo $z \in \mathcal{M}$,

$$sp(z) = \widetilde{x}_z + N(T) \cap N(V),$$

donde $\widetilde{x}_z$ es una solución particular del Problema 2 con dato inicial z.

Asimismo, considerando la Proposición 5.29 podemos reformular la caracterización de la estructura del conjunto de splines interpolantes de la siguiente manera: dado $z_0 \in \mathcal{E}$, sean x_0 y u_0 los vectores definidos por (5.29) y (5.30), respectivamente (considerando la proyección $Q = P_{N(V)//T^{\#}T(N(V))^{\perp} \ominus N(V)}$ en (5.29)). Sean $\gamma \in [-\kappa, \kappa]$ e $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tales que $(I + \gamma G) y_0 = -u_0$. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. si $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$, entonces

$$sp(z_0) = x_0 - (I + \gamma G)^{-1} u_0 + N(T) \cap N(V);$$

2. si $\gamma = \kappa$, entonces existe $\alpha_- \geq 0$ tal que

$$sp(z_0) = x_0 - (I + \kappa G)^{\dagger} u_0 + \alpha_- \cdot \mathcal{N}_- \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_-} + N(T) \cap N(V);$$

3. si $\gamma = -\kappa$, entonces existe $\alpha_+ \geq 0$ tal que

$$sp(z_0) = x_0 - (I - \kappa G)^{\dagger} u_0 + \alpha_+ \cdot \mathcal{N}_+ \cap \mathcal{S}_{\mathcal{H}_+} + N(T) \cap N(V).$$

5.5 Relación con el problema de suavizado indefinido

En esta sección nos disponemos a analizar la relación entre el conjunto de soluciones del problema de interpolación indefinida y el del problema de suavizado indefinido.

Una primera consecuencia inmediata se obtiene a partir de relacionar las ecuaciones normales, (5.13) y (4.2), de ambos problemas. Este resultado establece que todo conjunto de splines interpolantes indefinidos es también un subconjunto de las soluciones de algún determinado problema de suavizado indefinido.

Proposición 5.35. *Para todo $z_0 \in \mathcal{E}$ tal que $sp(z_0) \neq \varnothing$, existe $\rho' \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que*

$$sp(z_0) \subseteq sm(\rho', z_0).$$

Demostración. Sea $z_0 \in \mathcal{E}$ tal que $sp(z_0) \neq \varnothing$. Supongamos primero que $z_0 \in V(N(T))$, luego por el Lema 5.9 $sp(z_0) = \widetilde{x} + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V$, donde $\widetilde{x} \in N(T)$ satisface que $V\widetilde{x} = z_0$. Fijemos un $\rho' \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces

$$(T^{\#}T + \rho' V^{\#}V)\widetilde{x} = \rho' V^{\#} z_0.$$

El Corolario 4.4 establece entonces que $\widetilde{x} \in sm(\rho', z_0)$. Considerando que $\mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V \subseteq N(T^{\#}T + \rho' V^{\#}V)$,

$$sp(z_0) = \widetilde{x} + \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}_V \subseteq \widetilde{x} + N(T^{\#}T + \rho' V^{\#}V) = sm(\rho', z_0).$$

Ahora supongamos que $z_0 \notin V(N(T))$. Por la Proposición 5.11 existe un único $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que

$$(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)\widetilde{x} = \lambda V^{\#} z_0, \quad \text{para todo } \widetilde{x} \in sp(z_0).$$

Escogiendo entonces $\rho' = \lambda$, por el Corolario 4.4 $sp(z_0) \subseteq sm(\rho', z_0)$. □

Revisemos la relación entre λ en la ecuación normal (5.13) y γ en (5.32), bajo las Hipótesis 5.20. Tal y como en la Sección 5.4, fijemos $\rho = \frac{\rho_- + \rho_+}{2}$. Dado $z_0 \in \mathcal{E} \setminus V(N(T))$, sea $\lambda \in [\rho_-, \rho_+]$ (el único) que satisface que $(T^{\#}T + \lambda V^{\#}V)\widetilde{x} = \lambda V^{\#} z_0$ para todo $\widetilde{x} \in sp(z_0)$. Luego, si $u_0 \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$ está definido por (5.30) (o equivalentemente, $u_0 = Az_0$

con el operador A definido en (5.33)), entonces $(I+\gamma G)y_0 = -u_0$ para todo $y_0 \in \Theta$, donde

$$\gamma = \lambda - \rho = \lambda - \frac{\rho_- + \rho_+}{2}. \tag{5.38}$$

Luego, $\lambda \in (\rho_-, \rho_+)$ si y sólo si $\gamma \in (-\kappa, \kappa) = (-\frac{\rho_+ - \rho_-}{2}, \frac{\rho_+ - \rho_-}{2})$.

Podemos también realizar el procedimiento inverso: si $u_0 \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$, $\gamma \in (-\kappa, \kappa)$ e $y_0 \in \mathcal{C}_V$ satisfacen que $(I+\gamma G)y_0 = -u_0$, entonces

$$(T^\# T + \lambda V^\# V)y_0 = \lambda V^\# z_0,$$

con $\lambda = \gamma + \frac{\rho_- + \rho_+}{2}$, para cualquier $z_0 \in A^{-1}(\{ u_0 \})$.

Para lo que sigue, no supondremos como cierta la última suposición de las Hipótesis 5.20, i.e. no supondremos que $N(T) \cap N(V)$ es el subespacio trivial.

La proposición a continuación establece que para todo dato inicial z_0 perteneciente a un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{E}$, el problema de interpolación indefinida puede traducirse en un problema de suavizado indefinido.

Proposición 5.36. *Si $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\cdot, \cdot]_{\rho_0})$, para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces existe un conjunto abierto y denso $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ tal que para todo $z_0 \in \mathcal{M}$, existe $\rho' \in [\rho_-, \rho_+]$ tal que*

$$sp(z_0) = sm(\rho', z_0).$$

Demostración. Por el Teorema 5.31 y la Observación 5.34, existe un subconjunto abierto y denso $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \setminus V(N(T))$ tal que, si $z_0 \in \mathcal{M}$, existe $\widetilde{x} \in \mathcal{H}$ tal que

$$sp(z_0) = \widetilde{x} + N(T) \cap N(V).$$

Además, considerando que $\rho_- \neq \rho_+$, de la prueba del Teorema 5.10 existe $\lambda \in (\rho_-, \rho_+)$ tal que $(T^\# T + \lambda V^\# V)\widetilde{x} = \lambda V^\# z_0$. Luego, denotando $\rho' = \lambda$, y considerando que por el Lema 3.11 $N(T^\# T + \rho' V^\# V) = N(T) \cap N(V)$, por el Corolario (4.4)

$$sm(\rho, z_0) = \widetilde{x} + N(T) \cap N(V) = sp(z_0).$$

□

La siguiente proposición muestra cómo podemos relacionar los problemas de interpolación y suavizado indefinidos cuando el parámetro de regularización se considera fijo.

Proposición 5.37. *Si $R(L)$ es un subespacio cerrado y uniformemente positivo de $(\mathcal{K} \times \mathcal{E}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{\rho_0})$, para algún $\rho_0 \in [\rho_-, \rho_+]$, entonces:*

1. *para cada $\rho' \in (\rho_-, \rho_+)$ existe $z_0 \in \mathcal{E}$ tal que*
$$sp(z_0) = sm(\rho', z_0);$$

2. *existe $z_0^\pm \in \mathcal{E}$ tal que*
$$sp(z_0^\pm) \subset sm(\rho_\pm, z_0^\pm).$$

Demostración.

1. Denotemos el conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ u = v_+ + v_- \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho} \,:\, v_\pm \in \mathcal{N}_\pm \setminus \{ 0 \} \right\},$$

(por el Corolario 5.28, $\mathcal{B} \neq \varnothing$) y consideremos el funcional $\varphi : \mathcal{B} \to (-\kappa, \kappa)$ dado por

$$\varphi(u) = \kappa \frac{\|v_+\|_\rho - \|v_-\|_\rho}{\|v_+\|_\rho + \|v_-\|_\rho}, \quad u = v_+ + v_- \in N(T)^{\perp_\rho} \cap N(T)^{\perp_\rho}, v_\pm \in \mathcal{N}_\pm \setminus \{ 0 \}.$$

Por la Proposición 5.33, si $u_0 \in \mathcal{B}$, $\gamma = \varphi(u_0)$ satisface que $(I + \gamma G)y_0 = -u_0$ para todo $y_0 \in \Theta$. Equivalentemente, considerando (5.38), $(T^\# T + \lambda V^\# V)y_0 = \lambda V^\# z_0$, con $\lambda = \gamma + \frac{\rho_- + \rho_+}{2}$ y $z_0 \in A^{-1}(\{ u_0 \})$. El funcional φ cumple que $R(\varphi) = (-\kappa, \kappa)$. Entonces, dado $\rho' \in (\rho_-, \rho_+)$, existe $u \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma = \varphi(u) = \rho' - \frac{\rho_- + \rho_+}{2}$ satisface que $(I + \gamma G)y = -u$, para algún $y \in \mathcal{C}_V$. Si fijamos un $z_0 \in A^{-1}(\{ u \})$, entonces $(T^\# T + \rho' V^\# V)\widetilde{x} = \rho' V^\# z_0$, con $\widetilde{x} \in sp(z_0)$. Siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba de la Proposición 5.36, resulta entonces que $sp(z_0) = sm(\rho', z_0)$.

2. Por el Corolario 5.28 podemos escoger $u_0 \in \mathcal{H}_+ \cap N(T)^{\perp_\rho} \cap N(V)^{\perp_\rho}$. Luego, por la Proposición 5.33 existe $y_0 \in \mathcal{C}_V$ tal que $(I + \kappa G)y_0 = -u_0$. Considerando que $\lambda = \kappa + \frac{\rho_- + \rho_+}{2} = \rho_+$, si $z_0 \in A^{-1}(\{ u_0 \})$ entonces $(T^\# T + \rho_+ V^\# V)\widetilde{x} = \rho_+ V^\# z_0$, con $\widetilde{x} \in sp(z_0)$. Esto implica que $sp(z_0) \subseteq sm(\rho_+, z_0)$. Para ver que esta inclusión es estricta, observemos que por el Lema 3.13 $sm(\rho_+, z_0)$ es una variedad afín paralela a

$$N(T^\# T + \rho_+ V^\# V) = \mathcal{M}_- \cup \big(N(T) \cap N(V)\big) = \mathcal{N}_- + N(T) \cap N(V).$$

De la Observación 5.34 queda claro entonces que $sp(z_0)$ es un subconjunto propio de $sm(\rho_+, z_0)$. $\square$

Como resultado final, podemos relacionar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución para todo punto del problema de interpolación indefinida con las del de suavizado indefinido, y también con las del problema de interpolación indefinida con restricción lineal desarrollado en la Subsección 2.2.8.

Proposición 5.38. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $sp(z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$*;*
2. $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$*, para algún* $\rho \in [\rho_-, \rho_+]$*;*
3. $spl(z_0) \neq \varnothing$ *para todo* $z_0 \in \mathcal{E}$ *y* $\rho_- \neq \rho_+$.

Además, en este caso, $sm(\rho, z_0) \neq \varnothing$ *para todos* $z_0 \in \mathcal{E}$ *y* $\rho \in (\rho_-, \rho_+)$.

Demostración. Este resultado es una consecuencia del Teorema 5.19 y la Proposición 4.12. □

Bibliografía

[1] R. Abraham, J. Marsden & T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis & Applications*, Addison Wesley, London (1983).

[2] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson & J. L. Walsh, *The Theory of Splines & Their Applications*, Academic Press (1967).

[3] T. Ando, *Linear operators on Krein spaces*, Hokkaido University, Sapporo, Japan (1979).

[4] P. M. Anselone & P. J. Laurent, *A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-functions*, Numer. Math. 12 (1968), 66–82.

[5] G. Aronsson, *Perfect splines & nonlinear optimal control theory*, Journal of Approximation Theory, Volume 25, Issue 2 (1979), 142–152.

[6] E. Asplund, *Cebysev sets in Hilbert spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), 235–240.

[7] M. Atteia, *Géneralization de la définition et des propietés des "splines fonctions"*, C.R. Sc. Paris 260 (1965), 3550–3553.

[8] M. Atteia, *Etude de certains noyaux et théorie des fonctions "spline" en analyse numérique*, These, PInstit. Math. Appl., Grenoble (1966).

[9] M. Atteia, *Hilbertian kernels & spline functions*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1992).

[10] A. Z. Averbuch, P. Neittaanmäki & V. A. Zheludev, *Spline & Spline Wavelet Methods with Applications to Signal & Image Processing Volume I: Periodic Splines*, Springer (2014).

[11] A. Z. Averbuch, P. Neittaanmäki & V. A. Zheludev, *Spline & Spline Wavelet Methods with Applications to Signal & Image Processing Volume II: Non-Periodic Splines*, Springer (2016).

[12] A. Z. Averbuch, P. Neittaanmäki & V. A. Zheludev, *Spline & Spline Wavelet Methods with Applications to Signal & Image Processing Volume III: Selected Topics*, Springer (2019).

[13] D. Axehill, *Applications of Integer Quadratic Programming in Control & Communication*, Dissertation No. 1158, Linkping University (2008).

[14] T. Y. Azizov & I. S. Iokhvidov, *Linear Operators in spaces with an indefinite metric*, John Wiley & Sons (1989).

[15] J. A. Ball & J. W. Helton, *A Beurling-Lax theorem for the Lie group* $U(m,n)$ *which contains most classical interpolation theory*, J. Operator Theory 7 (1982), 179–189.

[16] J. R. Bar-On & K. A. Grasse, *Global Optimization of a Quadratic Functional with Quadratic Equality Constraints*, Journal of Optimization Theory & Applications 82 (1994), 379–386.

[17] J. R. Bar-On & K. A. Grasse, *Global Optimization of a Quadratic Functional with Quadratic Equality Constraints, Part 2*, Journal of Optimization Theory & Applications 93 (1997), 547–556.

[18] R. H. Bartels, J. C. Beatty & B. A. Barsky, *Introduction to splines in computer graphics and geometric modeling*, Morgan Kaufmann (1995).

[19] A. Bemporad, *Simple & Certifiable Quadratic Programming Algorithms for Embedded Linear Model Predictive Control*, IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline) 4 (2012), 14–20.

[20] A. Ben-Israel & T. N. E. Greville, *Generalized inverses. Theory & applications*, Springer-Verlag, New York (2003).

[21] A. Ben-Tal & M. Teboulle, *Hidden convexity in some nonconvex quadratically constrained quadratic programming*, Mathematical Programming volume 72 (1996), 51–63.

[22] M. Best, *Quadratic Programming with Computer Programs*, Chapman & Hall/CRC (2017).

[23] A. Yu. Bezhaev & V. A. Vasilenko, *Variational theory of splines*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2001).

[24] S. Biswas & B. C. Lovell, *Bézier & Splines in Image Processing & Machine Vision*, Springer (2008).

[25] J. Bognar, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer-Verlag (1974).

[26] A. Bojanczyk, N. Higham & H. Patel, *Solving the indefinite least squares problem by hyperbolic QR factorisations*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 24 (2003), 914–931.

[27] V. Boltyanski, H. Martini & V. Soltan, *Geometric methods & optimization problems*, Kluwer, Dordrecht (1999).

[28] S. Boyd & V. Lieven, *Convex Optimization*, Cambridge: Cambridge University Press (2004).

[29] S. Canu, C. S. Ong & X. Mary, *Splines with non positive kernels*, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress (2005), 1–10.

[30] S. Canu, C. S. Ong, X. Mary & A. Smola, *Learning with non-positive kernels*, Proc. of the 21st International Conference on Machine Learning (2004), 639–646.

[31] C. Cartis, N. I. M. Gould & P. L. Toint, *Trust-region & other regularisations of linear least-squares problems*, BIT Numerical Mathematics 49 (2009), 21–53.

[32] R. Champion, C. T. Lenard & T. M. Mills, *An introduction to abstract splines*, Math. Scientist 21 (1996), 8–26.

[33] R. Champion, C. T. Lenard & T. M. Mills, *A variational approach to splines*, Anziam Journal 42 (2000), 119–135.

[34] S. Chandrasekaran, M. Gu & A. H. Sayed, *A stable & efficient algorithm for the indefinite linear least-squares problem*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 20 (1998), 354–362.

[35] Z. Chen, Y. Dai & J. Liu, *A penalty-free method with superlinear convergence for equality constrained optimization*, Computational Optimization & Applications 76 (2019), 801–833.

[36] D. J. Clements & B. D. O. Anderson, *Singular Optimal Control: The Linear-Quadratic Problem*, Springer (1978).

[37] E. Cohen, R. F. Riesenfeld & G. Elber, *Geometric Modeling with Splines: An Introduction*, A K Peters/CRC Press (2001).

[38] M. Colton, L. Sun, D. Carlson & R. Beard, *Multi-vehicle dynamics & control for aerial recovery of micro air vehicles*, International Journal of Vehicle Autonomous Systems 9 (2011), 78–107.

[39] G. Corach, G. Fongi & A. Maestripieri, *Optimal inverses & abstract splines*, Linear Algebra Appl. 496 (2016), 182–192.

[40] G. Corach, A. Maestripieri & D. Stojanoff, *Oblique projections & Schur complements*, Acta Sci. Math. (Szeged) 67 (2001), 337–256.

[41] G. Corach, A. Maestripieri & D. Stojanoff, *Oblique projections & abstract splines*, J. Approx. Theory 117 (2002), 189–206.

[42] P. Craven & G. Wahba, *Smoothing noisy data with spline functions*, Numerische Mathematik. 31 (4) (1979), 377-Ű403.

[43] T. Dang, T. Tran & K. Ling, *Numerical Algorithms for Quadratic Programming in Model Predictive Control - An Overview*, Conference: ISSAT MCSE'15 (2015).

[44] C. de Boor, *Convergence of abstract splines*, J. Approx. Theory 31 (1981), 80–89.

[45] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines (Revised Edition)*, Springer (2001).

[46] F. Deutsch, *Existence of best approximations*, J. Approx. Theory 28 (1980), 132–154.

[47] F. Deutsch, *The angle between subspaces of a Hilbert space*, Approximation theory, wavelets & applications (Maratea, 1994), 107–130; NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 454, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995).

[48] F. Deutsch, *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer (2001).

[49] N. Dinh & V. Jeyakumar, *Farkas' lemma: Three decades of generalization for continuous optimization*, TOP 22 (2014), 1–22.

[50] V. V. Dong & N. N. Nguyen, *On the Solution Existence of Nonconvex Quadratic Programming Problems in Hilbert Spaces*, Acta Math Vietnam 43 (2018), 155–174.

[51] Z. Dostal, *Optimal Quadratic Programming Algorithms: With Applications to Variational Inequalities*, Spinger (2009).

[52] M. A. Dritschel & J. Rovnyak, *Operators on indefinite inner product spaces*, Fields Institute Monographs no. 3, Amer. Math. Soc. Edited by Peter Lancaster (1996), 141–232.

[53] M. Egerstedt & C. Martin, *Trajectory Planning for Linear Control Systems with Generalized Splines*, Proceedings of the Mathematical Theory of Networks & Systems (1998), 999–1002.

[54] M. Egerstedt & C. Martin, *Control theoretic splines. Optimal control, statistics, & path planning*, Princeton University Press (2010).

[55] Y. C. Eldar, *Sampling with Arbitrary Sampling & Reconstruction Spaces & Oblique Dual Frame Vectors*, Journal of Fourier Analysis & Applications 9 (2003), 77-Ű96.

[56] Y. C. Eldar & T. Werther, *General framework for consistent sampling in Hilbert spaces*, International Journal of Wavelets, Multiresolution & Information Processing, Vol. 03, No. 03 (2005), 347–359.

[57] L. Eldèn, *Solving Quadratically Constrained Least Squares Problems Using a Differential-Geometric Approach*, BIT Numerical Mathematics 42 (2002), 323–335.

[58] J. Farkas, *Theorie der einfachen Ungleichungen*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 124 (1902), 1–27.

[59] C. Fortin & H. Wolkowicz, *The trust region subproblem & semidefinite programming*, Optim. Methods Softw. 19 (2004), 41–67.

[60] W. Gander, *Least squares with a quadratic constraint*, Numer. Math. 36 (1980), 291–307.

[61] T. Gärtner, *Kernels for Structured Data*, World Scientific Publishing (2008).

[62] A. Gheondea, *On the geometry of pseudo-regular subspaces of a Krein space*, Spectral theory of linear operators & related topics, Birkhäuser Verlag (1984), 141–156.

[63] J. I. Giribet, A. Maestripieri & F. Martínez Pería, *Abstract splines in Krein spaces*, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010), 423–436.

[64] J. I. Giribet, A. Maestripieri & F. Martínez Pería, *A geometrical approach to indefinite least squares problems*, Acta Appl. Math. 111 (2010), 65–81.

[65] J. I. Giribet, A. Maestripieri & F. Martínez Pería, *Indefinite least-squares problems and pseudo-regularity*, J. Math. Anal. Appl. 430 (2016), 895–908.

[66] G. H. Golub & U. von Matt, *Quadratically constrained least squares & quadratic problems*, Numerische Mathematik, volume 59 (1991), 561–580.

[67] S. Gonzalez Zerbo, A. Maestripieri & F. Martínez Pería, *Indefinite Abstract Splines with a Quadratic Constraint*, Journal of Optimization Theory & Applications, vol. 186, issue 1, No 11 (2020), 209–225.

[68] S. Gonzalez Zerbo, A. Maestripieri & F. Martínez Pería, *Regularization of an Indefinite Abstract Interpolation Problem with a Quadratic Constraint*, Revista de la Unión Matemática Argentina, enviado a publicar (2020), arXiv:2008.03491.

[69] O. K. Gupta, *Applications of Quadratic Programming*, Journal of Information & Optimization Sciences 16:1 (1995), 177–194.

[70] B. Haasdonk & D. Keysers, *Tangent distance kernels for support vector machines*, Proc. of the 16th Int. Conf. on Pattern Recognition 2 (2002), 864–868.

[71] W. Hackbusch, *Tensor Spaces & Numerical Tensor Calculus*, Springer (2012).

[72] S. Hassi & K. Nordström, *On projections in a space with an indefinite metric*, Linear Algebra Appl. 208/209 (1994), 401–417.

[73] B. Hassibi, A. H. Sayed & T. Kailath, *Indefinite-Quadratic Estimation & Control. A Unified Approach to* $\mathcal{H}^2$ *&* $\mathcal{H}^\infty$ *Theories*, Society for Industrial & Applied Mathematics (1987).

[74] B. Hassibi, A. H. Sayed & T. Kailath, *Linear Estimation in Krein Spaces – Part I: Theory*, IEEE Transactions on Automatic Control 1, 41 (1996), 18–33.

[75] B. Hassibi, A. H. Sayed & T. Kailath, *Linear Estimation in Krein Spaces – Part II: Applications*, IEEE Transactions on Automatic Control 1, 41 (1996), 33–49.

[76] R. Hauser, *The S-Procedure via Dual Cone Calculus*, arXiv: Optimization & Control (2013).

[77] H. Hmam, *Quadratic optimisation with one quadratic equality constraint*, Technical Report DSTO-TR-2416, Electronic Warfare & Radar Division, Defence Science & Technology Organisation (2010).

[78] M. E. Hochstenbach, N. McNinch & L. Reichel, *Discrete ill-posed least-squares problems with a solution norm constraint*, Linear Algebra & its Applications, Volume 436, Issue 10 (2012), 3801–3818.

[79] J. C. Holladay, *A smoothest curve approximation*, Math. Tables Aids Comput. 11 (1957), 233–243.

[80] H. S. Hou & H. C. Andrews, *Cubic splines for image interpolation & digital filtering*, IEEE Trans. ASSP 26 (1978), 508–517.

[81] S. Izumino, *The product of operators with closed range & an extension of the reverse order law*, Tohoku Math. J. 34 (1982), 43–52.

[82] V. Jeyakumar, *Farkas lemma: Generalizations*, Encyclopedia of Optimization, Kluwer Academic Publisher, Netherland (2008), 87–91.

[83] C. D. Johnson, *Limits of propriety for linear-quadratic regulator problems*, Int. J. Control, vol. 45 (1987), 1835–1846.

[84] P. Jonas, *On spectral distributions of definitizable operators in Krein spaces*, Spectral theory, Banach Center Publications 6 (1982), 301–311.

[85] M. Kaeding, *Bayesian Analysis of Failure Time Data Using P-Splines*, Springer Spektrum (2015).

[86] F. Kallasi, D. Lodi Rizzini, F. Oleari, M. Magnani & S. Caselli, *A novel calibration method for industrial AGVs*, Robotics & Autonomous Systems Volume 94 (2017), 75–88.

[87] R. J. Kelly & W. A. Thompson, *Quadratic Programming in Real Hilbert Spaces*, Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics, Vol. 11, No. 4 (1963), 1063–1070.

[88] V. Klee, *Convexity of Cebysev sets*, Math. Annalen 142 (1961), 291–304.

[89] G. D. Knott, *Interpolating Cubic Splines*, Birkhäuser, Boston (1999).

[90] H. Kwakernaak & R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience (1972).

[91] P. J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris (1972).

[92] G. M. Lee, N. N. Tam & N. D. Yen, *Quadratic Programming & Affine Variational Inequalities: A Qualitative Study*, Springer (2005).

[93] G. Loosli, S. Canu & C. S. Ong, *Learning SVM in Krein spaces*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence 38 (2016), 1204–1216.

[94] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley, New York (1969).

[95] A. Maestripieri & F. Martínez Pería, *Decomposition of Selfadjoint Projections in Krein Spaces*, Acta Sci. Math. 72 (2006), 611–638.

[96] A. Maestripieri & F. Martínez Pería, *Normal Projections in Krein Spaces*, Integral Equations & Operator Theory 99 (2013), 1–24.

[97] H. Mahmoud & H. Arslan, *Sidelobe suppression in OFDM-based spectrum sharing systems using adaptive symbol transition*, IEEE Communications Letters 12 (2008), 133–135.

[98] C. Martin, P. Enqvist, J. Tomlinson & Z. Zhang, *Linear Control Theory, Splines & Interpolation*, Computation & Control IV, Progress in Systems & Control Theory, vol 20 (1995), 269–287.

[99] D. H. Martin & D. H. Jacobson, *Optimal control laws for a class of constrained linear-quadratic problems*, Automatica 15 (1975), 431–440.

[100] G. Mazzola, G. Milmeister & J. Weissmann, *Comprehensive Mathematics for Computer Scientists 2: Calculus & ODEs, Splines, Probability, Fourier & Wavelet Theory, Fractals & Neural Networks, Categories & Lambda Calculus*, Springer (2004).

[101] G. Micula, *A variational approach to spline functions theory*, General Mathematics Vol. 10, No. 1–2 (2002), 21–50.

[102] M. Mohri, A. Rostamizadeh & A. Talwalkar, *Foundations of Machine Learning*, MIT Press (2012).

[103] J. J. Moré, *Generalizations of the trust region problem*, Optimization Methods & Software, vol. 2 (1993), 189–209.

[104] A. M. Mosamam & J. T. Kent, *Semi-reproducing kernel Hilbert spaces, splines & increment kriging*, Journal of Nonparametric Statistics, 22(6) (2010), 711-722.

[105] M.Z. Nashed, *Inner, outer, & generalized inverses in Banach & Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. 9 (1987), 261–325.

[106] G. Nikaido, *Remarks on the lower bound of linear operators*, Proc. Japan Acad. 56 (1980), 321–323.

[107] D. Oglic & T. Gaertner, *Learning in Reproducing Kernel Krein Spaces*, Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning, PMLR 80 (2018), 3859–3867.

[108] D. Oglic & T. Gaertner, *Scalable Learning in Reproducing Kernel Krein Spaces*, Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning, PMLR 97 (2019), 4912–4921.

[109] M. Pachter & D. Jacobson, *Control with conic control constraint set*, J. Optim. Theory 25 (1978), 112–123.

[110] M. Pachter & D. Jacobson, *Observability with a conic observation set*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 24, 4 (1979), 632–633.

[111] H. J. Palanthandalam-Madapusi, T. H Van Pelt & D. S. Bernstein, *Matrix pencils & existence conditions for quadratic programming with a sign-indefinite quadratic equality constraint*, J. Global Optimization 45 (2008), 533–549.

[112] H. J. Palanthandalam-Madapusi, T. H. Van Pelt & D. S. Bernstein, *Parameter consistency and quadratically constrained errors-in-variables least-squares identification*, International Journal of Control, Volume 83, Issue 4 (2010), 862–877-

[113] J. Park & S. Boyd, *General Heuristics for Nonconvex Quadratically Constrained Quadratic Programming*, arXiv: Optimization & Control (2017).

[114] H. Patel, *Solving the indefinite least squares problem*, Ph. D. Thesis, Univ. of Manchester, (2002).

[115] T. H. Pelt & D. Bernstein, *Quadratically constrained least squares identification*, Proceedings of the American Control Conference, vol. 5 (2001), 3684–3689.

[116] A. Phan, P. Tichavsky & A. Cichocki, *Error Preserving Correction: A Method for CP Decomposition at a Target Error Bound*, IEEE Transactions on Signal Processing 67 (2018), 1175–1190.

[117] I. Pólik & T. Terlaky, *A Survey of the S-Lemma*, SIAM Review 49 (2007), 371–418.

[118] M. J. D. Powell & Y. Yuan, *A trust-region algorithm for equality constrained optimization*, Mathematical Programming, vol. 49 (1991), 189–211.

[119] H. Prautzsch, W. Boehm & M. Paluszny, *Bézier & B-Spline Techniques*, Springer (2002).

[120] P. M. Prenter, *Splines & Variational Methods*, Dover Publications (2009).

[121] C. E. Rasmussen & C. K. I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*, The MIT Press (2005).

[122] C. H. Reinsch, *Smoothing by Spline Functions*, Numerische Mathematik. 10 (3) (1967), 177–183.

[123] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).

[124] J. Rovnyak, *Methods on Krein space operator theory, interpolation theory, systems theory and related topics*, Oper. Theory Adv. Appl. 134 (2002), 31–66.

[125] A. I. Rozhenko, *On the convergence of abstract variational splines*, East J. Approx. 1 (1995), 25–36.

[126] A. I. Rozhenko & V. A. Vasilenko, *Variational approach in abstract splines: achievements & open problems*, East J. Approx. 1 (1995), 277–308.

[127] M. Samar, A. Farooq, C. Mu & I. Mushtaq, *Indefinite Least Squares Problem with Quadratic Constraint & Its Condition Numbers*, Journal of Mathematical Research with Applications, Vol. 40, No. 1 (2020), 57–72.

[128] R. Sameni, *Online filtering using piecewise smoothness priors: Application to normal & abnormal electrocardiogram denoising*, Signal Processing 133 (2016), 52–63.

[129] A. Sard, *Optimal approximation*, Journal of Functional Analysis 1 (1967), 222–244.

[130] A. H. Sayed, B. Hassibi & T. Kailath, *Inertia Conditions for the Minimization of Quadratic Forms in Indefinite Metric Spaces*, Operator Theory: Advances & Applications, Vol. 87 (1996), 309–347.

[131] I. J. Schoenberg, *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Parts A & B, Quart. Appl. Math. 4 (1946), 45–99, 112–141.

[132] B. Schölkopf & A. Smola, *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, & Beyond*, Cambridge: MIT Press (2002).

[133] R. Schöne & T. Hanning, *Least squares problems with absolute quadratic constraints*, J. Appl. Math. (2012), 1–12.

[134] M. H. Schultz, *Spline Analysis*, Prentice-Hall (1972).

[135] L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*, Cambridge University Press (2007).

[136] M. Signoretto, K. Pelckmans & J. Suykens, *Quadratically Constrained Quadratic Programming for Subspace Selection in Kernel Regression Estimation*, Proc. of the 18th International Conference on Artificial Neural Networks (2008), 175–184.

[137] V. Sima, *Algorithms for Linear-quadratic Optimization*, Chapman & Hall/CRC (1996).

[138] D. Singh, M. Singh & Z. Hakimjon, *Signal Processing Applications Using Multidimensional Polynomial Splines*, Springer (2019).

[139] I. Skog, J. O. Nilsson, D. Zachariah & P. Händel, *Fusing information from two navigation system using an upper bound on their maximum spatial separation*, International Conference on Indoor Positioning & Indoor Navigation (2012), 1–5.

[140] S. Sonnenberg, G. Rätsch, C. Schäfer & B. Schölkopf, *Large scale multiple kernel learning*, Journal of Machine Learning Research 7 (2006), 1531–1565.

[141] R. Stern & H. Wolkowicz, (1993). *Indefinite Trust Region Subproblems & Nonsymmetric Eigenvalue Perturbations*, SIAM J. Optimization 5 (2) (1995), 286–313.

[142] C. J. Stone & C. Y. Koo, *Additive Splines in Statistics*, Proceedings of the American Statistical Association (1985), 45–48.

[143] R. K. Sundaram, *A First Course in Optimization Theory*, Cambridge University Press (1996).

[144] S. Thoen, L. Deneire, L. Van der Perre & M. Engels, *Constrained least squares detector for OFDM/SDMA-based wireless networks*, IEEE Transactions on Wireless Communications 2(1) (2003), 129–140.

[145] A. N. Tikhonov, *Solution of Incorrectly Formulated Problems & the Regularization Method*, Soviet Mathematics Doklady 4 (1963), 1035–1038.

[146] A. N. Tikhonov & V. Y. Arsenin, *Solution of Ill-posed Problems*, V. H. Winston & Sons (1977).

[147] A. N. Tikhonov, A. S. Leonov & A. G. Yagola, *Nonlinear ill-posed problems*, Springer (2014).

[148] K. Torachi, S. Yang, M. Kamada & R. Mori, *Two dimensional spline interpolation for image reconstruction*, Patt. Recognition 21 (1998), 275–284.

[149] M. Vukosavljev, A. Schoellig & M. Broucke, *The Regular Indefinite Linear Quadratic Optimal Control Problem: Stabilizable Case*, SIAM Journal on Control & Optimization 56 (2018), 496–516.

[150] Y. Wang, *Smoothing splines: Methods & applications*, Chapman & Hall/CRC (2011).

[151] E. J. Wegman & I. W. Wright, *Splines in Statistics*, Journal of the American Statistical Association Vol. 78, No. 382 (1983), 351–365.

[152] Y. Xia, S. Wang & R. Sheu, *S-Lemma with Equality & Its Applications*, Mathematical Programming 156 (2015), 513–547.

[153] J. W. Xu, A. R. C. Paiva, I. Park & J. C. Principe, *A Reproducing Kernel Hilbert Space Framework for Information-Theoretic Learning*, IEEE Transactions on Signal Processing 56(12) (2009) 5891–5902.

[154] V. A. Yakubovich, *S-Procedure in nonlinear control theory*, Vestnik Leningrad University, Vol.1 (1971), 62–77.

[155] Y. Ye & S. Zhang, *New results on quadratic minimization*, SIAM Journal on Optimization 14 (2003), 245–267.

[156] Z. Zhang, J. Tomlinson & C. Martin, *Splines & Linear Control Theory*, Acta Applicandae Mathematicae 49 (1997), 1–34.